호장법을 이용한 공간구조의 기하학적 비선형 해석에 관한 연구

A Study on the Geometrically Nonlinear Analysis of Spatial Structures by Using Arc Length Method

한 상 을* • 이 상 주** • 이 경 수***
Han, Sang-Eul • Lee, Sang-Ju • Lee, Kyoung-Soo

ABSTRACT

The present study is concerned with the application of Constant arc-length method that proposed by Crisfield in the investigation of the geometrically nonlinear behaviour of spatial structures composed by truss or beam element. The arc-length method can trace the full nonlinear equilibrium path of Spatial structure far beyond the critical point such as limit or bifurcation point. So, we have developed the constant arc-length method of Crisfield to analysis spatial structure. The finite element formulation is used to develop the 3d truss/beam element including the geometrical nonlinear effect. In an effort to evaluate the merits of the methods, extensive numerical studies were carried out on a number of selected structural systems. The advantages of Constant arc length method, in tracing the post-buckling behavior of spatial structures, are demonstrated.

Keywords: *spatial structure, post-buckling behavior, arc-length method*

1. 서 론

좌굴해석에 관한 연구를 살펴보면, Papadrakakis(1981)는 보-기둥요소(beam-column element, Oran(1973))와 Explicit-Vector iteration method를 이용하여, 12-member space frame 모델에 대한 기하학적 비선형 해석을 수행하였는데, 1개의 부재를 1개의 요소로 모델링한 해석결과가 실험값에 매우 근접한 결과를 나타내었다. Meek(1984)은 Crisfield(1981)의 호장법과 FEM에 의해 유도한 빔요소를 이용하여, 검증문제에 대한 기하학적 비선형 해석을 수행하였는데, 축력에 의한 휨응력의 추가적인 증가와 휨변형에 의한 축변형의 증가(bowing effect, Jennings(1968))를 고려하였다. Meek(1984)은 Papadrakakis(1981)가 해석한 12-member space frame 검증문제에서 Papadrakakis(1981)와 같이 1개의 부재를 1개의 요소로 모델링하여 해석을 수행하였는데, 해석결과는 실험값에 비교적 유사하였지만, Papadrakakis(1981)의 보-기둥요소에 의한 결과와 비교하였을 때 정확성이 떨어짐을 알 수 있었다. Chan(1988), 김문영(1996)은 Papadrakakis(1981), Meek(1984)과 같은 이전의 연구자와 달리 하나의 부재를 2개 이상의 요소로 모델링하여 해석을

* 정회원 • 인하대학교 건축학부 교수 Email: hsang@inha.ac.kr
** 정회원 • 한양대학교 건축공학과 BK21 계약교수 Email: kyotolsj@empal.com
*** 정회원 • 인하대학교 건축공학과 박사과정 Email: lks1838@inhaian.net

수행하였다. Chan(1988)은 Meek(1984)이 사용한 Hermite-Cubic 빔요소를 사용하여 기하학적, 재료적 비선형 해석을 수행하였는데, Papadrakakis(1981)의 보-기둥요소와 근접한 결과를 보여주었다. 김문영(1996)은 Bathe(1979)의 degenerated beam 요소를 사용하였으며, 1개의 부재를 2개의 요소로 모델링하여 해석을 수행하였으며, 해석결과를 Papadrakakis(1981)의 결과와 비교하였다. Bathe(1979)와 Chan(1988, 1993)은 유한요소에 의해 모델링한 Hermite-Cubic 빔요소는 보다 더 정확한 결과를 얻기 위해서 부재를 2개 이상의 요소로 분할해 해석을 수행해야 한다고 지적하였다. 또 다른 연구로 Atluri(1986), Nee(1988)는 assumed stress method를 도입하였고, Chan(1993)은 부재 중간에 제약식을 도입하여 빔요소를 모델링하여, 기존의 Hermite-Cubic 빔요소의 성능을 향상시켰다.

본 논문은 트러스나 빔으로 이루어진 공간구조의 좌굴후거동(post buckling behavior)을 파악하기 위 해, 비선형 해석알고리즘으로 Crisfield(1981)가 제안한 Constant arc-length method를 이용하였고, 트러스와 빔요소의 강성메트릭스와 비선형 응력-변형도관계식은 유한요소법에 근거한 Hemite-Cubic 빔요소(Przemieniecki(1968), Makowiski(1990), Chen(1991), Yang(1994) 등)를 이용하였다. 이 요소는 축방향, 횡방향으로 각각 선형, 3차식으로 변형한다고 가정하여 요소를 정식화한다. 따라서 기하학적 비선형성이 강한 문제에 대해서는 보다 정확한 값을 얻기 위해서는 부재를 2개 이상으로 나누어서 해석해야 한다. 그러나 Bathe(1979)가 지적했듯이 Hermite-Cubic 빔요소는 비교적 쉽게 구현이 가능하고, 이론적으로 명확하며, 축력, 휨응력, 비틀림응력이 서로 독립적으로 표현되기 때문에 해석적으로 매우 안정적이라는 장점이 있다. 따라서 일반적인 비선형해석 유리하게 적용될 수 있다.

2. 유하요소법에 의한 평형방장식 및 빔요소의 정식화

2.1 평형방정식

구조물의 전체 포텐셜에너지 Π는 변형에너지 U와 외부하중에 의한 일인 V의 합으로 나타낼 수 있다.

$$\Pi = U + V \tag{1}$$

위 식에서 부재 변형에너지와 외부하중에 의한 일은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$U = \frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij} e_{ij}\, dV \tag{2}$$

$$V = -\int_s Q_{is} u_i\, dS \tag{3}$$

부재응력과 변형이 재료적으로 선형이라고 가정하면 식(2)의 σ_{ij}는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}\, e_{kl} \tag{4}$$

2.1 3차원 빔요소의 정식화

양단의 상대적 비틀림 변형을 ε_{xy}로 나타내고, 전단변형도의 영향을 무시하면 부재의 변형에너지

는 다음과 같이 나타낼 수 있다. 이때 비틀림 변형은 휨변형과 축변형에 대해 독립적이라고 가정한다.

$$U = \frac{E}{2}\int_V \varepsilon_{xx}^2 dV + \frac{G}{2}\int_V \varepsilon_{xy}^2 dV \tag{5}$$

위 식을 절점변위 vector q_i에 대해 미분하면, 카스티글리아노(Castigliano)의 정리에 의해 아래와 같은 편미분식을 얻을 수 있다.

$$U_{,q_i} = [\boldsymbol{K_L} + \boldsymbol{K_G}]\boldsymbol{q} = \boldsymbol{F} \tag{6}$$

위 식에서 $\boldsymbol{K_L}$, $\boldsymbol{K_G}$ 는 각각 빔요소의 탄성강성매트릭스(elastic stiffness matrix)와 기하강성매트릭스(geometric stiffness matrix)를 나타낸다.

3. 검증예제

본 논문에서 사용하고 있는 비선형 요소와 해석법의 정확성 및 적용성을 검증하기 위해서, 트러스 및 빔 요소로 구성된 쉘형 공간구조의 기하학적 비선형 검증예제를 수행하였다.

트러스요소를 사용한 그림1의 Hexagonal 24-member shallow dome(star dome)은 Hangai가 최초로 후좌굴해석을 시도한 모델로, 본 논문의 해석결과는 Papadrakakis(1981), 한상을(2000) 등이 제시한 결과에 매우 근접함을 알 수 있었다. 이와 달리 Hangai(1972)와 Jagannathan(1975)의 해석결과는 정해와 오차가 있음을 알 수 있다.

본 논문에서 사용한 Hermite-Cubic 빔요소의 정확성을 검증하기 위해서, 그림2와 같이 이론해가 있는 순수휨을 받는 캔틸레버에 대한 비선형 해석을 수행하였다. 본 논문에서는 8개의 요소로 분할하였고, Epstein(1975)은 4개, 6개요소로 분할하여 해석을 수행하였다. 외단에 작용하는 모멘트 M에 대한 절점변위 θ, u, v의 이론해는 각각 다음과 같다. $\theta = ML/EI$, $u = L(1-\sin(\theta)/\theta)$, $v = L(1-\cos(\theta)/\theta)$. 비선형 해석법으로 Newton-Raphson method와 동적이완법(Dynamic-Relaxation method, 한상을(1999, 2006), Han(2003))을 사용하였으며, 2가지 모두 정해와 매우와 거의 일치하는 해석결과를 얻을 수 있었다.

평면프레임의 비선형해석 예제로 자주 사용되는 그림3의 예제는 극한점(limit point)이후 "Snap back" 현상이 발생한다. 따라서 하중증분법이나 변위증분법을 이용하여 전체 평형경로를 해석한다는 것은 매우 어려운 문제로써, 현재까지는 호장법이나 이와 유사한 해석법에 의해서만 해석이 가능한 문제로 알려져 있다. 본 예제는 Cichon(1983) 등 다수의 저자에 의해 해석이 수행되었고, 본 논문의 해석결과와 비교적 일치하고 있음을 알 수 있었다.

그림4는 3D 빔요소의 검증예제로 자주 사용되는 12-member space frame의 형상 및 해석결과를 나타낸 것이다. 그림4의 그래프에는 지점조건과 요소분할 수에 따른 해석결과를 참고문헌의 결과와 비교하여 도식하였다. Papadrakakis(1981), Nee(1988) 등은 각각의 부재를 1개의 빔요소로 모델링하였다. 우선 지점이 이동단(roller)으로 지지된 경우 부재를 2개의 요소로 모델링한 결과가 Papadrakakis(1981)의 결과에 더 근접하고 있음(Chan(1988, 1993), 김문영(1996))을 알 수 있었다. 이는 지점이 핀(pin)으로 지지된 경우에도 동일한 경향을 나타내었다. 그러나 핀지지의 경우 부재의 분할 수에 대한 좌굴하중의 변화정도가 더 심하게 나타났으며, 2개의 요소를 사용하여 해석한 본 논문의 결과는 Atluri(1986)의 Assumed stress method를 사용한 Nee(1988)의 결과에 접근하고 있음을 알 수 있었다.

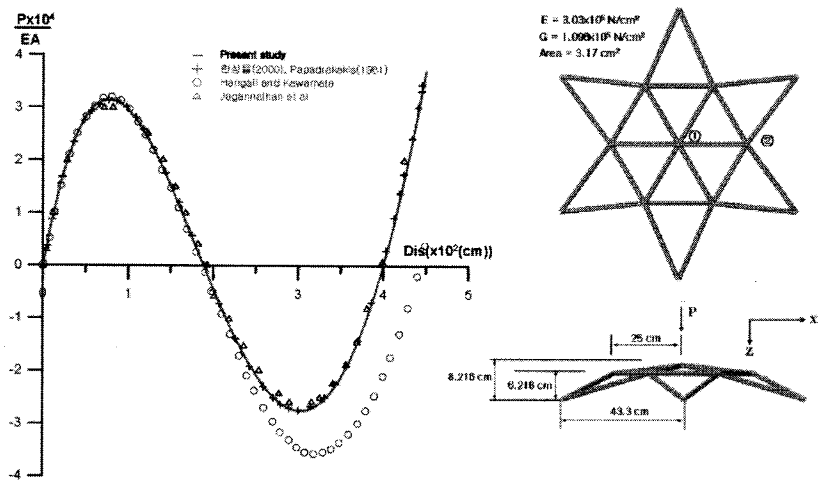

그림 1. 24-member shallow truss dome : geometry and load-deflection curves

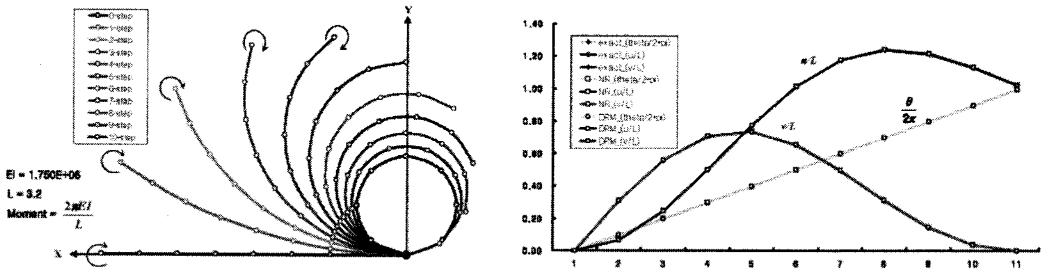

그림 2. Cantilever beam under pure bending: geometry and load-deflection curves

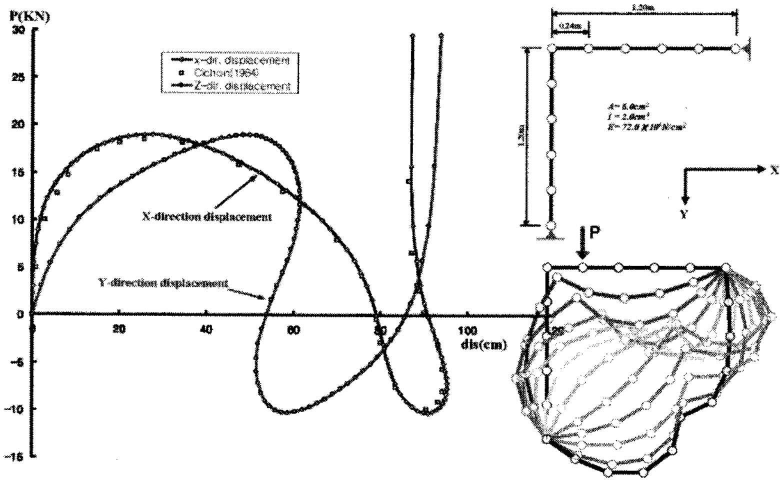

그림 3. Two bar plane frame: geometry and load-deflection curves

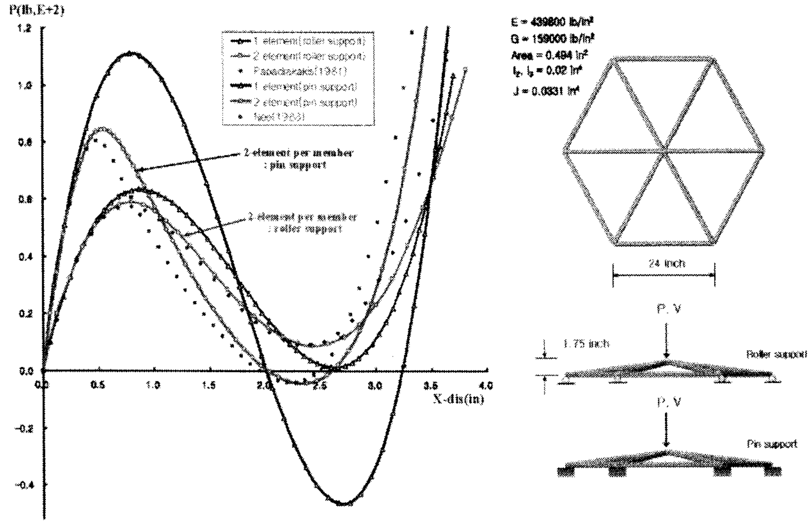

그림 4. 12-member space frame : geometry and load-deflection curves

4. 결 론

본 논문은 유한요소법에 의해 유도된 일반적으로 널리 사용되는 Hermite-cubic 빔요소와, 비선형 해석법으로 극한점 이후의 거동까지 추적하여, 후좌굴해석을 수행할 수 있는 Crisfield의 호장법을 사용하여 공간구조의 비선형해석을 수행하였다. 본 논문에서 사용한 빔요소는 단일부재를 1개의 요소로 모델링하여 사용하였을 경우에 부재강성이 과대평가되는 경향을 보였으나, 2개이상으로 분할할 경우 정해에 근접함을 알 수 있었다. 일반적으로 보-기둥요소는 더 적은 요소로 더 정확한 계산결과를 얻을 수 있지만, 해석과정이 복잡하고 부재강성에 대한 부재축력의 영향이 커서 해석과정 중 해석적 안정성이 떨어지고, 단면형상이 복잡해 질 경우 적용성이 떨어질 수 있다. 따라서 일반적인 비선형해석을 수행할 경우 해석적으로 안정적이고, 비교적 단순하고 명확한 유도과정을 가지는 본 논문의 Hermite-cubic 빔요소를 사용하면, 후좌굴 거동특성과 같이 복잡한 비선형 문제에 대한 정확한 결과를 얻을 수 있을 것으로 사료된다.

감사의 글

본 연구는 2005년 건설교통기술평가원(과제번호:2005-33305) 및 과학기술부 우수연구센터육성사업인 한양대학교 친환경건축 연구센터(과제번호:R11-2005-056-01004-0)의 연구비 지원으로 이루어진 것으로, 이에 감사의 의를 표합니다.

참고문헌

김문영, 장승필(1996), 개선된 하중 및 변위 증분법, 한국강구조학회, vol.8, no.4, pp.157-168

한상을, 윤한흠(2000), 래티스 돔의 다분기 해석을 위한 알고리즘. 대한건축학회. 16(9)

한상을, 이경수(2006), 동적이완법을 이용한 공간구조의 후좌굴 해석에 관한 연구. 대한건축학회 구조계 22권 10호 pp.61-68

한상을, 이경수(1999). 동적이완법에 의한 불안정 구조물의 안정화이행과정 해석에 관한 연구. 한국강구조공학회. 11(6).

Atluri S.N. and Kondoh K. (1986), Simplified Finite Element Method for Large Deformation, Post-Buckling Analysis of Large Frame Structures, Using Explicitly Derived Tangent Stiffne ss Matrices, International journal for numerical methods in engineering vol.23 no.1 pp.69-90

Bathe K.J. and Bolourchi S.(1979), Large displacement analysis of three dimensional beam st ructures, Int. J. Num. Meth. Eng. vol.14, pp.961-986

Chan, S. L.(1988). Geometric and Material Nonlinear Analysis of Beam-Columns and Frames Using the Minimum Residual Displacement Method. Int. J. Num. Meth. Eng. vol.26

Chan S.L. and Zhou Z.H.(1993), Pointwise Equilibration Polynomial Element for Nonlinear An alysis of Frames, J. Struct. Eng., ASCE, vol.120, no.6, pp.1703-1716

Chen W.F. and Lui E.M.(1991), Stability Design of Steel Frames, CRC Press

Cichon, Cz.(1984), Large displacement-in plane analysis of elastic-plastic frames, Computer & Structures, vol.19, pp.737-45

Crisfield. M.S.(1981) A fast inremental iterative solution procedure that handles 'snap through ', Computer & Structures vol.13 pp.55-62

Epstein M and Murray D.W.(1975), Large deformation in-plane analysis of elastic beams, Co mputer & Structures, vol.6, pp.1-9

Jagannathan D.S., Epstein H.I. and Christiano P.(1975), Nonlinear analysis of reticulated sp ace trusses, J. Struct. Div. ASCE vol.100(ST7), pp.1451-1488

Jennings A.(1968), Frame analysis including change of geometry, J. Struct. Div. ASCE, vol.94, pp.2081-2105

Han S.E, Lee K.S.(2003). A Study of the Stabilizing Process of Unstable Structures, Compute r & Structures. vol 81.

Hangai. Y. and Kawamata S.(1972), Perturbation method in the analysis of geometrically no nlinear and stability problems. Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design, UAH Press. pp.473-489

Makowski Z.S.(1990), Regular Lattice Plates and Shells, Elsevier

Meek, J. L., and Tan, H. S.(1984), Geometrically Nonlinear Analysis of Space Frames by an Incremental Iterative Technique. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. vol.47. pp261-282

Nee K.M and Haldar A.(1988), Elastoplastic Nonlinear Post-Buckling Analysis of Partially Re strained Space Structures. Methods in Applied Mechanics and Engineering. vol.71. pp.69-97

Oran. C(1973), Tangent stiffnes in space frame, J. Struct. Div., ASCE pp.987-1001

Papadrakakis, M.(1981), Post Buckling Analysis of Spatial Structures by Vector Iteration Met hods. Computer & Structure. vol.14.

Przemieniecki J.S.(1968). THEORY OF MATRIX STRUCTURAL ANALYSIS, McGraw-Hill

Ramm. E.(1981), Strategies for tracing the nonlinear response near limit points, in : W. Wund erlich, E. Stein and K.J. Bathe, eds., Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechan ics. Springer, pp.63-89

Yang Y.B and Kuo S.R.(1994), Theory & Analysis of nonlinear frames, Prentice-Hall