

# 적응적 내부 경계를 갖는 레벨셋 방법을 이용한 셸 구조물의 위상최적설계

## Topology Optimization of Shell Structures Using Adaptive Inner-Front(AIF) Level Set Method

박강수\* · 윤성기\*\*

Park, Kang-Soo · Youn, Sung-Kie

---

### ABSTRACT

A new level set based topology optimization employing inner-front creation algorithm is presented. In the conventional level set based topology optimization, the optimum topology strongly depends on the initial level set distribution due to the incapability of inner-front creation during optimization process. In the present work, in this regard, an inner-front creation algorithm is proposed, in which the sizes, shapes, positions, and number of new inner-fronts during the optimization process can be globally and consistently identified by considering both the value of a given criterion for inner-front creation and the occupied volume (area) of material domain. To facilitate the inner-front creation process, the inner-front creation map which corresponds to the discrete valued criterion of inner-front creation is applied to the level set function. In order to regularize the design domain during the optimization process, the edge smoothing is carried out by solving the edge smoothing partial differential equation (PDE). Updating the level set function during the optimization process, in the present work, the least-squares finite element method (LSFEM) is employed. As demonstrative examples for the flexibility and usefulness of the proposed method, the level set based topology optimization considering lightweight design of 3D shell structure is carried out.

*Keywords:* Topology Optimization, Level Set Method, LSFEM, Shell Structure

---

### 1. 서론

균질화법과 밀도법에 근거한 기존의 위상최적화 방법에서 벗어나 설계 영역 내에 존재하는 재료의 경계를 다루거나 추출하는데 레벨셋 방법을 이용하여 구조물의 최적형상을 찾는, 레벨셋 위상최적화가 Sethian과 Wiegmann(2000)에 의해 처음 제안되었다. 이 후로 구조문제 해석에 유한요소법을, 레벨셋 방정식은 유한차분법을 이용해 최적화를 수행하는 연구가 Wang 등(2003) 과 Allaire 등(2004)에 의해 다양하게 시도되었다. 하지만 기존의 레벨셋을 이용하는 위상최적화 방법들은 현재 상태에서 구조물 경계에서의 형상민감도만을 이용하였기 때문에 설계과정 중에 새로운 내부 경계가 생기는 위상의 변화가 이루어 지지 못한다. 즉, 기존의 레벨셋 위상최적화는 내부 경계가 초기에 적절히 주어지지 못하면 원하는 위상의 변화를 이루지 못한다.

---

\* 정회원 · 한국과학기술원 기계공학과 박사후 연구원 Email: pgs00@kaist.ac.kr

\*\* 정회원 · 한국과학기술원 기계공학과 교수 Email: skyoun@kaist.ac.kr

또한 초기에 주어진 내부 경계의 수에 따라 최적의 형상이 바뀌는 문제점도 안고 있다. 이와 같은 문제점을 해결하기 위한 시도로서 설계영역 내에 새로운 내부 경계의 생성여부를 판단하기 위해 추가적으로 위상민감도 (topological sensitivity or topological derivative)를 도입하는 연구가 진행된 바 있다(Allaire 등, 2004; Wang 등, 2004). 하지만 이 방법들에서도 임의성이 있는 내부 경계 생성 크기와 횟수 등의 사용자 의존 변수에 따라 다른 최적해의 형상으로 수렴해 간다. 따라서 본 연구에서는 앞서 언급한 레벨셋 위상최적화 방법과 달리 설계민감도 해석으로부터 직접 얻을 수 있는 구조물의 에너지 밀도값을 이용하여 새로운 내부 경계를 생성시키는 알고리즘을 제안하고 예제를 통하여 제안된 알고리즘의 위상변화에 대한 유연성 및 수렴의 안정성 등을 확인하고자 한다.

## 2. 레벨셋 방법

### 2.1. 기본 개념

레벨셋 방법은 파랑, 화염 그리고 변형하는 재료의 진전부와 같이 시간에 따라 변화하는 경계를 기술하고 진화시키기 위해 Osher와 Sethian(1988)이 제안한 방법이다. 기본적인 개념은 등위선 혹은 등위면의 집합을 구성된 고차원의 함수를 레벨셋 함수  $\phi$ 라 하고 속도  $V$ 를 고려해 다음의 해밀턴-자코비 방정식의 일종인 레벨셋 방정식을 계산함으로써 진전시키게 된다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + V \cdot \nabla \phi = 0 \quad \text{with } \phi(x, t = 0) = \phi_0(x) \quad (1)$$

위상최적화에 있어서 이러한 레벨셋 함수가 설계 구조물의 경계를 표현하며, 따라서 최적화 과정의 설계변수가 된다. 또한 다음의 조건식을 이용하여 위상최적화를 수행할 때 임의의 시간에서의 재료 존재영역  $\Omega_{\text{MAT}}$ 과 빈 영역  $\Omega_{\text{VOID}}$ , 그리고 경계  $\partial\Omega_{\text{MAT}}$ 를 구분지어 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi(x) &> 0 \quad \text{for } x \in \Omega_{\text{MAT}} \\ \phi(x) &= 0 \quad \text{for } x \in \partial\Omega_{\text{MAT}} \\ \phi(x) &< 0 \quad \text{for } x \in \Omega_{\text{VOID}} \end{aligned} \quad (2)$$

수학적 편의를 위해 레벨셋 함수값으로 표현되는 재료 존재영역과 공간영역을 다음의 헤비사이드 함수  $H$ 를 이용하여 나타낼 수 있다.

$$H(\zeta) = \begin{cases} 0 & \text{if } \zeta \leq 0 \\ 1 & \text{if } \zeta > 0 \end{cases} \quad (3)$$

### 2.2. 최소제곱 유한요소 수식화

기존의 레벨셋 방법과 관련한 연구에서는 식(1)을 풀기 위해 ENO(essentially non-oscillatory) 혹은 WENO(weighted ENO)(Osher와 Fedkiw, 2003) 등의 유한차분법에 근거한 알고리즘을 적용하였다. 하지만 본 연구에서는 유한요소법에 근거한 최소제곱 유한요소법(Jiang, 1998)을 적용하였다. 식(1)의 최소제곱 유한요소 수식화 과정은 다음과 같다. 우선 식(1)을 시간과 공간 미분항으로 각각 분리한 후 후방차분법을 적용하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\phi^{k+1} - \phi^k + \Delta t \left( u^k \frac{\partial \phi^{k+1}}{\partial x} + v^k \frac{\partial \phi^{k+1}}{\partial x} + w^k \frac{\partial \phi^{k+1}}{\partial x} \right) = 0 \quad (4)$$

식(4)를 행렬식 형태로 표현하면 다음과 같다.

$$A^{k+1} \phi^{k+1} = r^{k+1} \quad (5)$$

$$\text{여기서 } A^{k+1} = \left[ 1 + \Delta t \left( u^k \frac{\partial}{\partial x} + v^k \frac{\partial}{\partial x} w^k \frac{\partial}{\partial x} \right) \right], \phi^{k+1} = [\phi^{k+1}], r^{k+1} = [r^k]$$

시험함수  $\varphi \in H^1(\Omega)$  을 이용하여 식(5)에 최소제곱 유한요소 수식화를 수행하면 다음의 최종적인 행렬식을 얻을 수 있다.

$$B(\phi, \varphi) = R(\varphi) \quad \text{for all } \varphi \in H^1(\Omega) \quad (6)$$

$$\text{여기서 } B(\phi, \varphi) = (A^{k+1} \phi^{k+1}, A^{k-1} \varphi), R(\varphi) = (r^{k-1}, A^{k+1} \varphi)$$

### 3. 내부 경계 생성 알고리즘 및 최적화 문제 수식화

기존의 레벨셋 위상최적화의 경우 초기의 레벨셋 함수의 분포에 따라 최적해의 형상이 상당히 의존하는 경향을 가지고 있다. 예로서 그림 1에서 처럼, 초기에 내부 경계가 존재하지 않는 경우 경계만 변할 뿐 설계영역 가운데에 새롭게 내부 경계가 생성되지 않는다. 본 연구에서는 기존의 레벨셋 위상최적화의 이러한 단점을 개선하기 위해, 새로운 개념으로서 내부 경계 생성 맵을 도입하여 이러한 한계점을 극복하고자 한다.

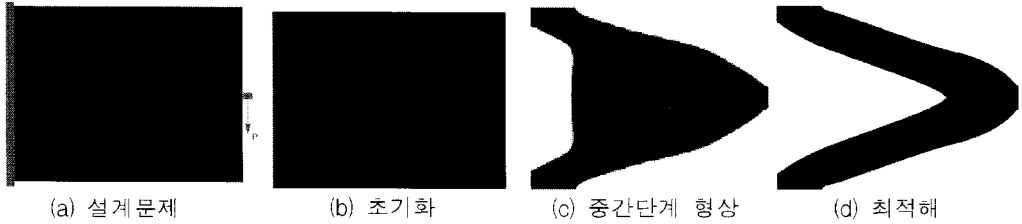


그림 1 동기에제 - 기존 레벨셋 위상최적화의 결과

#### 3.1. 내부 경계 생성 맵

레벨셋 위상최적화를 수행하는 과정에서 임의의 축차과정에서 응력이나 변형률 혹은 탄성에너지 밀도의 분포는 레벨셋의 분포와 밀접한 관계를 가지고 있다. 즉, 레벨셋이 양의 값을 가지는 영역 내에서 재료가 존재하게 되므로 최적화 과정에 필요한 선행 해석은 이러한 재료 존재영역 내에서의 평형방정식을 고려하게 된다. 본 연구에서는 경계를 표현하는 레벨셋 값의 분포와 탄성에너지 밀도의 분포를 비교하여 내부 경계가 생성될 수 있는 영역을 조사하고 이를 이용하여 새로운 내부 경계를 생성시킬 수 있는 내부 경계 생성 맵을 구성한다. 내부 경계 생성 맵을 구성하기 위해 레벨셋의 분포를 개선하는 레벨셋 방정식을 풀기 전, 선형 탄성문제의 평형방정식을 계산하여 탄성에너지 밀도의 분포를 구한다. 계산된 탄성에너지 밀도 분포를 +1과 -1의 값을 갖는, 일정 영역에서 균일한 값을 갖도록 재생성 시킨다. 이 과정을 수식으로 정리하면 다음과 같이 표현할 수 있다. 임의의 점  $x \in \Omega_{DES}$  에 대해 다음의 공간적분  $V_{SE_n}$  을 정의한다.

$$V_{SE_n}(\chi) = \int_{\Omega_{DES}} 1_\chi(x) d\Omega \quad (7)$$

$$\text{여기서 } 1_\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } SE_n(x) \geq SE_n(\chi), x, \chi \in \Omega_{DES} \\ 0 & \text{if } SE_n(x) < SE_n(\chi), x, \chi \in \Omega_{DES} \end{cases}$$

식(7)을 이용하여  $V_{SE_n}$ 와 현재의 레벨셋 함수의 분포로부터 계산되는 재료존재영역의 면적(혹은 부피)이 동일하게 되는 위치를  $\chi^*$ 라 할 때, 다음의 내부 경계 생성 맵  $H_{MAP}$ 을 구성할 수 있다

$$H_{MAP}(x) = \begin{cases} -1 & \text{for } V_{SE_n}(x) \geq V_{SE_n}(\chi^*) \\ +1 & \text{for } V_{SE_n}(x) < V_{SE_n}(\chi^*) \end{cases} \quad (8)$$

현재 상태의 레벨셋 함수  $\phi^{OLD}$ 로부터 새로운 레벨셋 함수  $\phi^{NEW}$ 를 얻기 위한 과정은 다음의 식으로 표현 가능하다.

$$\phi^{NEW}(x) = Sgn(x) \circ H_{MAP}(x) \circ \phi^{OLD}(x), \quad x \in \Omega_{DES} \quad (9)$$

$$\text{여기서 } Sgn(x) = \begin{cases} -1 & \text{for } \phi^{OLD}(x) > 0 \text{ and } H_{MAP} = -1 \\ +1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

이 때 재구성된 레벨셋 함수가 경계부근에서 급격히 변화하게 되므로 이를 부드럽게 하기 위해 경계완화를 위한 필터링 과정을 수행하였다. 본 연구에서는 주로 영상처리분야에서 많이 사용되고 있는 경계완화 편미분 방정식(Aubert와 Kornprobst, 2001)을 적용하였다. 적용된 경계완화 편미분 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \phi(x, \eta)}{\partial t} - \Delta \phi(x, \eta) = 0 \text{ with } \phi(x, \eta = 0) = \phi_0(x) \quad (10)$$

### 3.2. 컴플라이언스 최소화 문제의 수식화 및 설계 민감도 해석

재료제한조건을 고려한 컴플라이언스 최소화 문제는 다음과 같이 표현 가능하다.

$$\begin{aligned} \text{Minimize } F_{OBJ} &= \int_{\Omega_{DES}} H(\phi) \varepsilon_u^T E \varepsilon_u d\Omega \\ \text{Subject to } H_{VOL} &= \int_{\Omega_{DES}} H(\phi) d\Omega \leq V_{RATIO} \cdot V_{TOT} \end{aligned} \quad (11)$$

라그랑지 승수  $\lambda$ 를 이용해 재료제한조건을 포함하는 컴플라이언스 최소화 문제의 라그랑지 범함수  $L_{LAG}$ 에 대해 레벨셋 함수값의 미소변화량에 관한 형상민감도는 다음과 같다.

$$\left. \frac{\partial L_{LAG}}{\partial \phi} \right|_{\psi} = \left. \frac{\partial F_{OBJ}}{\partial u} \right|_{u} + \left. \frac{\partial F_{OBJ}}{\partial \phi} \right|_{\psi} + \lambda \left. \frac{\partial H_{VOL}}{\partial \phi} \right|_{\psi} \quad (12)$$

최종적인 라그랑지 범함수에 관한 형상민감도는 다음과 같이 표현된다 (Wang 등, 2003; Allaire 등, 2004).

$$\left. \frac{\partial L_{LAG}}{\partial \phi} \right|_{\psi} = \int_{\Omega_{DES}} \delta(\phi) [M_{\phi} + \lambda] \psi d\Omega \quad (13)$$

$$\text{여기서 } M_{\phi} = f^T u + \kappa h^T u$$

이 때 형상변형에 관한 레벨셋 방정식의 속도장을 다음과 같이 정의한다.

$$V_{SV} = [M_{\phi} + \lambda] \psi \quad (14)$$

#### 4. 적용예제

본 연구에 제안된 최적화 과정에 관한 흐름도는 그림 2와 같다.

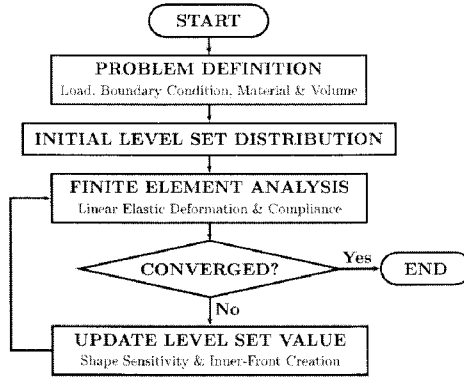


그림 2 최적화 과정의 흐름도

##### 4.1. 강철 덩 경량화 설계

제안된 내부 경계 생성 알고리즘을 이용한 레벨셋 위상최적화의 예제로서 강철 덩의 경량화 설계를 고려하였다. 적용예제에 사용된 모델의 기하학적 형상은 그림 3과 같다. 2500개의 이차원 선형 쉘 요소를 사용하여 설계영역을 분할하였으며 변형해석은 평면응력상태를 가정하였다. 해석 및 설계에 적용된 변수 및 조건을 표 1에 나타내었다. 그림 4는 최적화 중간과정에서 얻어진 형상과 수렴된 최적해를 나타낸다. 그림 4에서 보는 바와 같이 최적화 과정 중 새로운 내부 경계가 생성되는 것을 확인할 수 있다. 그림 5는 단조함수의 특징을 갖는 목적함수의 변화를 보여준다.

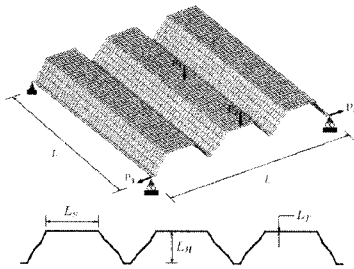
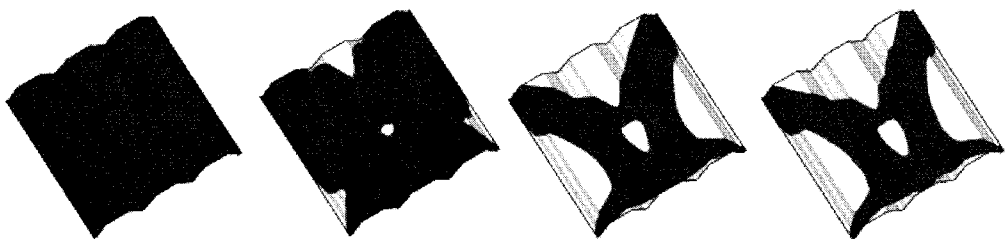


그림 3 설계 형상

표 1 해석 및 설계조건

Parameter	Specified Data
Geometry	$L=1.2\text{m}$ , $L_S=20\text{cm}$ , $L_H=11\text{cm}$ , $L_T=1\text{mm}$
Mesh	2500 Linear Quadrilateral Shell Element
Material	Steel ( $E=200\text{GPa}$ , $\nu=0.3$ )
Volume Ratio	30%
Applied Load	$P_1=10\text{kN}$ , $P_2=20\text{kN}$ , $P_3=1\text{kN}$



(a) 초기 레벨셋 (b) 축차수 10 (c) 축차수 60 (d) 축차수 121: 최적해

그림 4 최적화 과정 중의 레벨셋 분포 및 최적해 형상

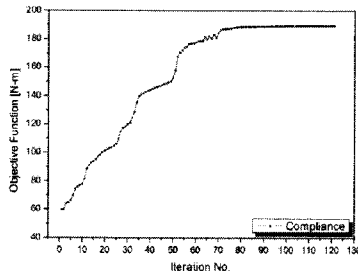


그림 5 목적함수의 변화

## 5. 결론

기존의 레벨셋 위상최적화 방법에서는 최적화의 중간과정에서 형상민감도를 사용하여 레벨셋 함수값을 개선하기 때문에 균질화법과 밀도법에 근거한 기존의 위상최적화와 같이 새로운 내부 경계가 생성될 수 없었다. 따라서 본 연구에서는 최적화 축차과정의 선행 해석에서 얻어진 탄성에너지 밀도값을 바탕으로 내부 경계 생성 맵을 구성하고, 이를 현재 상태의 레벨셋 함수와 함께 고려하여 새로운 내부 경계를 생성시켰다. 예제에서 강철 락 구조물 경량화 위상최적설계에 제안된 방법을 적용하여 최적형상을 도출할 수 있었다. 적용 과정 및 최종해로부터 제안된 알고리즘이 적절히 작동하고 있으며 동시에 내부 경계가 초기에 전혀 주어지지 않은 경우에 있어서도 최적해에서는 새로운 내부 경계가 생성됨을 확인할 수 있었다. 따라서 본 연구에서 제안한 내부 경계 생성 알고리즘을 이용한 레벨셋 위상최적화가 초기의 내부 경계의 분포에 둔감하게 안정적으로 최적해의 수렴성을 가져올 수 있음을 확인하였다. 향후 추가적으로 다양한 분야에 있어서 제안된 레벨셋 위상최적화 방법을 적용함으로써 그 유용성을 확인하고자 한다.

## 참고문헌

- Sethian, J.A. and Wiegmann, A. (2000) Structural boundary design via level set and immersed interface method, *Journal of Computational Physics*, 163(2), pp.489~528.
- Wang, M. Y., Wang, X. M. and Guo D.M. (2003) A level set method for structural topology optimization, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(1-2), pp.227~246.
- Allaire, G., Jouve, F. and Toader A.M. (2004) Structural optimization using sensitivity analysis and a level set method, *Journal of Computational Physics*, 194(1), pp.363~393.
- Allaire, G., Jouve, F. and Toader A.M. (2004) Structural optimization using topological and shape sensitivity via a level set method, *Internal report*, n. 555, CMAP, Ecole Polytechnique.
- Wang, X. M., Mei, Y. and Wang, M.Y. (2004) Incorporating topology derivatives into level set methods for structural topology optimization, *Proceeding of 10th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference*, Albany, New York.
- Osher, S. and Sethian, J.A. (1988) Front propagating with curvature dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations, *Journal of Computational Physics*, 79, pp.12~49.
- Osher, S. and Fedkiw, R. (2003) *Level set methods and dynamic implicit surfaces*, Springer-Verlag, Berlin.
- Jiang, B.N. (1998), *The least-squares finite element method*, Springer-Verlag, Berlin.
- Aubert, G. and Kornprobst, P. (2001) *Mathematical problems in image processing: partial differential equations and the calculus of variations*, Springer-Verlag, Berlin.