

유체유동 회전 외팔파이프의 안정성에 미치는 끝단질량의 영향

Stability Analysis of Cracked cantilever beam Subjected to Follower force

윤한익*·손인수**·김동진***
Yoon, Han-Ik · Son, In-Soo · Kin, Dong-Jin

ABSTRACT

In this paper the vibration system is consisted of a rotating cantilever pipe conveying fluid and a tip mass. The equation of motion is derived applying a modeling method that employs hybrid deformation variables. The influences of the rotating angular velocity, mass ratio and the velocity of fluid flow on the stability of a cantilever pipe are studied by the numerical method. The effect of tip mass on the stability of a rotating cantilever pipe are also studied. The influences of a tip mass, the velocity of fluid, the angular velocity of a cantilever pipe and the coupling of these factors on the stability of a cantilever pipe are analytically clarified.

Keywords: pipe conveying fluid, stability, tip mass, natural frequency

1. 서론

스프링 쿨러는 이송유체를 갖는 회전 외팔 파이프의 한 형태이며, 파이프의 끝단에 집중 종동력으로 작용하는 비점성 유체의 분사력은 미사일의 추진력과 같이 탄성계의 동특성과 안정성에 큰 영향을 미친다. 이러한 영향을 고려한 회전하지 않는 유체유동 외팔보에 관한 연구에 비해 회전하는 유체유동 외팔보에 관한 연구는 그다지 활발하지 않은 실정이다. 회전운동을 하는 외팔보의 진동해석에 관한 연구는 Southwell(1921)로부터 비롯하였으며, 최근 들어 회전 운동을 하는 외팔보에 대한 연구는 회전하는 유연 매니플레이터의 비선형 자유진동해석(Handan & Al-Bedoor, 2001), 이동질량을 갖는 회전 매니플레이터의 고유진동수 평가(Fung & Yau, 2001), 그리고 끝단질량을 갖는 곡선 보의 회전운동의 동특성 해석에 관한 연구(Park and Kim, 1999)들이 있다. 또 Bhat(1986)는 회전에 의한 운동에너지를 고려하여 끝단질량과 끝단질량의 관성모멘트를 고려한 해석결과를 발표하였다. 회전 구조물에 관련된 모델링의 종류는 크게 3 가지로 분류할 수 있다. 그 첫 번째는 직교 변형변수를 쓰는 관습적 선형 모델링(conventional linear cartesian modeling)이며, 두 번째는 비선형 모델링, 그리고 마지막으로 복합 변형변수를 쓰는 선형 모델링(hybrid deformation variable modeling) 이 있다(유, 1991). 회전 구조물이 유연한 탄성체인 경우 선형 모델링으로는 그 동적반응을 정확히 예측할 수 없음이 발견되었으며, 비선형 모델링은 회전 구조물의 정확한 동적반응을 예측할 수 있으나 계산시간 및 계산의 복잡성으로 인한 여러 가지 단점들을 가지고 있다. 따라서 모델링의 정확성을 유지하면서도 이러한 단점들을 극복할 수 있도록 제기된 모델링 방법이 복합 변형변수를 이용한 선형 모델링 방법이다. Kane(1987)

* 동의대학교 기계공학과 교수 Email: hiyoon@deu.ac.kr
** 동의대학교 기계공학과 NURI 사업단 계약교수 Email: isson92@deu.ac.kr
*** 동의대학교 기계공학과 석사과정 Email: redhornets@hanmail.net

와 유(1991)은 이 모델링이 선형모델링과는 달리 비선형 모델링과 동등하게 회전 구조물의 정확한 동특성을 예측하게 하는 동시에 선형 모델링으로서의 효율성을 유지할 수 있다는 결과를 보여주었다.

이 연구에서는 점성이 매우 작은 이송유체의 분사력에 의하여 끝단에 집중중동력이 작용하고 끝단질량이 부가된 유연한 회전 외팔 파이프 계를 고려하였다. 수치해석을 통하여 이송유체의 속도와 파이프의 회전각속도에 따른 회전 외팔 파이프의 동특성과 끝단질량이 계의 안정성에 미치는 영향을 비교 고찰하였다.

2. 시스템 모델링

Fig. 1은 이 연구에서 해석 예제로 사용한 반경 r 의 회전축에 고정되어 회전운동을 하는 이송유체를 갖는 유연 외팔 파이프를 모델링한 것이다. 중력의 영향과 이송유체를 가진 외팔 파이프 시스템의 내부, 외부 감쇠는 고려하지 않았으며, 오일러-베르누이 보 이론을 적용하였다. 수치해석 예제에 사용한 구조물은 유연하다고 가정하였다. Fig. 1에서 x 는 외팔 파이프의 고정점 O 로부터 변형전 임의 절점 P_0 까지의 거리를 의미하며, s 는 변형전 임의 절점 P_0 에서 변형후의 절점 P 까지 변형할 때 파이프가 인장된 길이를 나타낸다. \mathbf{w} 는 임의 절점의 탄성변위 벡터를 나타낸다. 또 r 은 파이프가 부착된 고정축의 반경을 나타내며, U 와 m_p 는 각각 유체의 속도와 끝단질량을 의미한다. 외팔 파이프의 회전운동 중에 생기는 복합 변형변수는 가정 모드법(assumed-mode method)을 이용하여 다음과 같이 근사화 할 수 있다.

$$s(x, t) = \sum_{i=1}^n \phi_{1i}(x) q_{1i}(t), \quad w_2(x, t) = \sum_{i=1}^n \phi_{2i}(x) q_{2i}(t) \quad (1)$$

여기서 $\phi_{1i}(x)$, $\phi_{2i}(x)$ 는 각각 축방향 및 횡방향의 가정모드함수를 나타내며, $q_{1i}(t)$, $q_{2i}(t)$ 는 일반화 좌표를, 그리고 n 은 일반화 좌표의 수를 의미한다. 그리고 가정모드함수 $\phi_{1i}(x)$, $\phi_{2i}(x)$ 는 각각 다음과 같다.

$$\phi_{1i}(x) = \sin \frac{\lambda_i x}{L}, \quad \phi_{2i}(x) = \cos(\lambda_i x) - \cosh(\lambda_i x) + \beta_{mi} [\sin(\lambda_i x) - \sinh(\lambda_i x)] \quad (2)$$

여기서 β_{mi} 와 λ_i 는 다음 식에서 각각 구할 수 있다.

$$\beta_{mi} = - \frac{\cos(\lambda_i L) + \cosh(\lambda_i L)}{\sin(\lambda_i L) + \sinh(\lambda_i L)} \quad (3)$$

$$\frac{1 + \cos(\lambda_i L) \cosh(\lambda_i L)}{\sin(\lambda_i L) \cos(\lambda_i L) + \cos(\lambda_i L) \sinh(\lambda_i L)} = \frac{m_p}{m L} (\lambda_i L) \quad (4)$$

2.1. 회전 외팔 파이프의 에너지식

변형에 따른 외팔 파이프의 임의 절점 P 점의 속도는 다음 식을 이용하여 구할 수 있다.

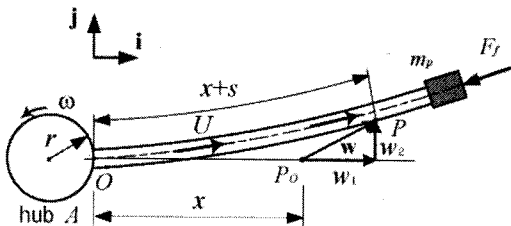


Fig. 1 Schematic diagram of a rotating cantilever pipe conveying fluid with a tip mass

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + \mathbf{v}_{P/A} + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x} + \mathbf{w}) \quad (5)$$

여기서 \mathbf{v}_O 는 O 점의 속도, $\mathbf{v}_{P/A}$ 는 A 점에 대한 P 점의 상대속도, 그리고 $\boldsymbol{\omega}$ 는 축의 회전각속도를 나타내고 있다. 식 (5) 의 각 항들은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{v}_O = r\boldsymbol{\omega}\mathbf{j}, \quad \mathbf{v}_{P/A} = \dot{w}_1\mathbf{i} + \dot{w}_2\mathbf{j} \quad (6)$$

$$\mathbf{x} = x\mathbf{i}, \quad \boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}, \quad \mathbf{w} = w_1\mathbf{i} + w_2\mathbf{j}$$

여기서 $(\dot{\cdot})$ 는 시간 t 에 대한 미분을 나타낸다. w_1 대신 인장방향 변위 s 를 사용하기 위하여 w_1 과 s 의 관계를 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$s(x,t) \approx w_1 + \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{\partial w_2}{\partial x} \right)^2 dx \quad (7)$$

식 (5) ~ 식 (7) 을 이용하여 회전 외팔 파이프의 운동에너지와 포텐셜에너지를 구하면 각각 다음과 같다.

$$T_p = \frac{1}{2} m \int_0^L \mathbf{v}_P \mathbf{v}_P dx + \frac{1}{2} m_p (\mathbf{v}_P|_{x=L})^2 \quad (8)$$

$$V_p = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ EA_p \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 + EI \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \right)^2 \right\} dx \quad (9)$$

여기서 E 는 Young 의 계수, I 는 2 차 면적모멘트, 그리고 A_p 는 외팔 파이프의 단면적을 각각 나타낸다. 이 연구에서는 끝단질량의 관성모멘트의 영향을 무시하고 수치해석 하였다.

2.2 유동유체의 에너지식

파이프에 대한 유체의 상대속도를 U 라고 하면, 유체의 절대속도에는 파이프의 운동이 포함되어야 한다. 따라서 이송유체의 절대속도의 수직성분, 즉 외팔 파이프의 횡방향 성분은 $(r\omega + \dot{w}_2 + \omega x + \omega w_1) + U w_2'$ 이고, 축방향에 평행한 수평성분은 $\dot{w}_1 - w_2 \omega + U w_1'$ 이다. 이송유체의 절대속도를 이용하여 유속의 합을 구하면

$$f_v = \left[\left\{ (r\omega + \dot{w}_2 + \omega x + \omega w_1) + U w_2' \right\}^2 + \left\{ U w_1' + (\dot{w}_1 - w_2 \omega) \right\}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

이 된다. 여기서 미소항의 3 차 이상의 고차 항을 생략한다. 또 (\cdot) 은 축방향 좌표 x 에 대한 미분을 의미한다. 식 (10) 의 유체의 속도를 이용하면 유동유체의 운동에너지는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$T_f = \frac{1}{2} M \int_0^L (f_v f_v) dx \quad (11)$$

여기서 M 은 유동유체의 단위 길이당 질량이다.

점성이 매우 작은 이송유체를 갖는 파이프에서는 유체의 분사력에 의하여 파이프 끝단에 집중접선종동력이 작용하며, 이러한 접선종동력에 의한 일은 그 보존력성분에 의한 일과 비보존력 성분에 의한 일로 구분된다. 집중접선종동력의 보존력성분과 비보존력 성분에 의한 일은 각각 다음과 같다.

$$W_c = M \int_0^L U^2 (w_1')^2 dx \quad (12)$$

$$\delta W_{nc} = -[M \omega^2 w_2'(L,t) + M U \dot{w}_2(L,t)] \delta w_2(L,t) \quad (13)$$

식 (13) 에서 밑줄 친 부분은 코리올리력을 표현하고 있다.

2.3 계의 운동방정식 및 고유치 해석

계의 운동방정식은 앞에서 구한 일과 에너지 식을 Lagrange 방정식에 대입하여 구할 수 있으며, 유체유동 회전 외팔 파이프의 무차원 운동방정식을 유도하기 위하여 사용한 무차원 매개변수는 다음과 같다.

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad d = \frac{q}{L}, \quad \tau = \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m+M}}, \quad \beta = \frac{M}{m+M}, \quad u = UL \sqrt{\frac{M}{EI}}, \quad (14)$$

$$R = \frac{r}{L}, \quad \Omega = \omega L^2 \sqrt{\frac{m+M}{EI}}, \quad \Omega_f = \omega L^2 \sqrt{\frac{M}{EI}}, \quad \bar{J} = \frac{A_p L^2}{I}, \quad \mu = \frac{m_p}{(m+M)L}.$$

식 (14) 의 무차원 매개변수를 이용하여 다음 식과 같이 무차원 운동방정식을 유도할 수 있다.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{P} \quad (15)$$

여기서 식 (15) 의 무차원 운동방정식을 구성하는 행렬 \mathbf{M}, \mathbf{C} , 그리고 \mathbf{K} 는 각각 유체유동을 갖는 회전 외팔 파이프의 질량행렬, 감쇠행렬, 그리고 강성행렬을 나타내며, $\mathbf{d} = [d_{1i}(\tau) \ d_{2i}(\tau)]^T$ 이며, $\mathbf{d}(\tau) = \mathbf{D}e^{\lambda\tau}$ 이다. 고유치 λ 는 복소수 형태로써 $\lambda = a \pm ib$ ($i = \sqrt{-1}$) 과 같이 표현할 수 있다. 여기서 파이프의 동적안정성은 고유치 λ 의 실수부인 a 의 부호에 의해 결정된다. 만약 $a < 0$ 이면 파이프는 안정하게 되며, $a > 0$ 이면 불안정이 되는데 이 때 허수부 $b=0$ 의 경우 발산형 불안정, $b \neq 0$ 인 경우 플러터형 불안정이 된다. 또, $a=0$ 일 때는 안정과 불안정의 경계가 되는 임계값이며 이 때의 유속을 임계유속 u_{cr} 이라 한다.

3. 수치해석 결과 및 고찰

앞 절에서 유도된 운동방정식을 가지고 이송유체를 갖는 회전 외팔 파이프의 동특성을 8차 모드까지 고려하여 수치해석 하였다. 수치해석 예제에 사용한 계의 각 파라미터는 Table 1 에 나타내었다.

Table 1 Specifications of a rotating cantilever pipe conveying fluid

Property	Values
Length of pipe (L)	1 (m)
Outer radius of pipe (R_o)	0.025 (m)
Inner radius of pipe (R_i)	0.02 (m)
Bending stiffness (EI)	8.9782 (Nm ²)
Density of pipe (ρ)	2.766×10 ³ (kg/m ³)
Hub radius (r)	0.05 (m)

Fig. 2 - Fig. 5 는 질량비 β , 무차원 회전 각속도, 그리고 끝단질량의 크기에 따른 유체유동 회전 외팔 파이프의 안정성을 해석한 결과이다. 즉, 플러터 불안정을 일으키는 임계유속 값의 변화를 수치해석을 통하여 2차 모드까지 도시한 것이다. 전반적으로 회전 각속도가 빠를수록 임계유속 값은 증가하는 경향을 보이고 끝단질량이 클수록 임계유속 값은 작아지는 것을 알 수 있다. 질량비와 임계유속의 비례적임은 회전하지 않은 외팔 파이프의 경우와 그 결과가 동일함을 판단할 수 있다. 또, 플러터 불안정에 미치는 영향은 회전 각속도의 영향에 비해 질량비와 끝단질량에 의한 영향이 더 크다는 것을 알 수 있다.

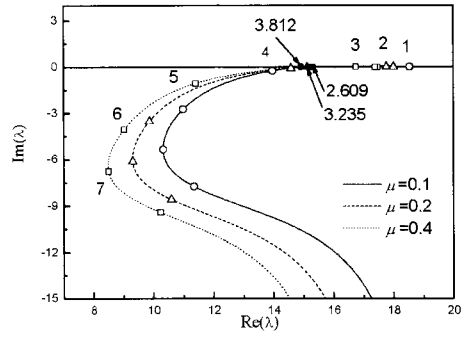
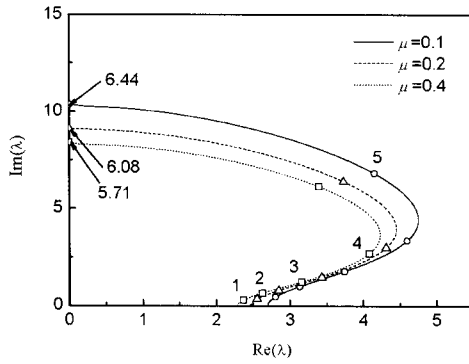


Fig. 2 The complex frequency of the two lowest modes of the rotating cantilevered system as a function of the flow velocity for $\beta = 0.1, \Omega = 1$

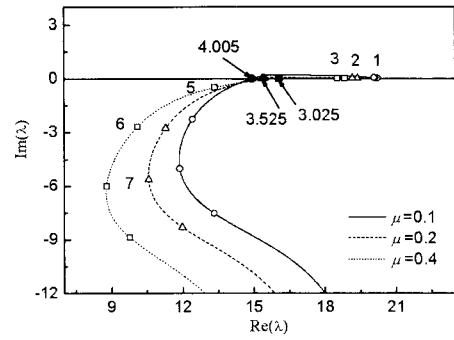
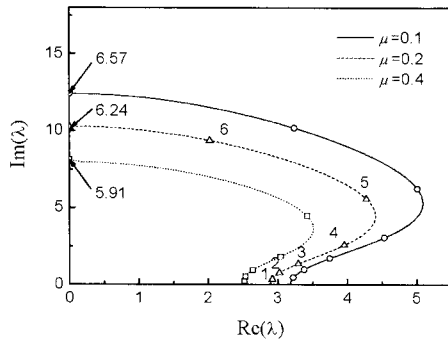


Fig. 3 The complex frequency of the two lowest modes of the rotating cantilevered system as a function of the flow velocity for $\beta = 0.1, \Omega = 2$

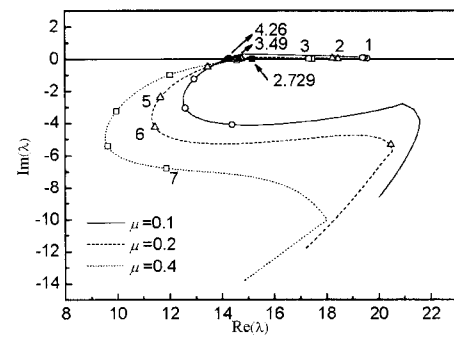
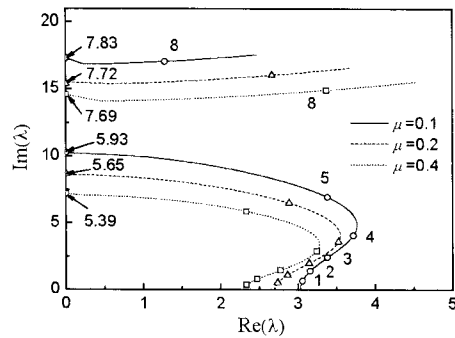


Fig. 4 The complex frequency of the two lowest modes of the rotating cantilevered system as a function of the flow velocity for $\beta = 0.2, \Omega = 1$

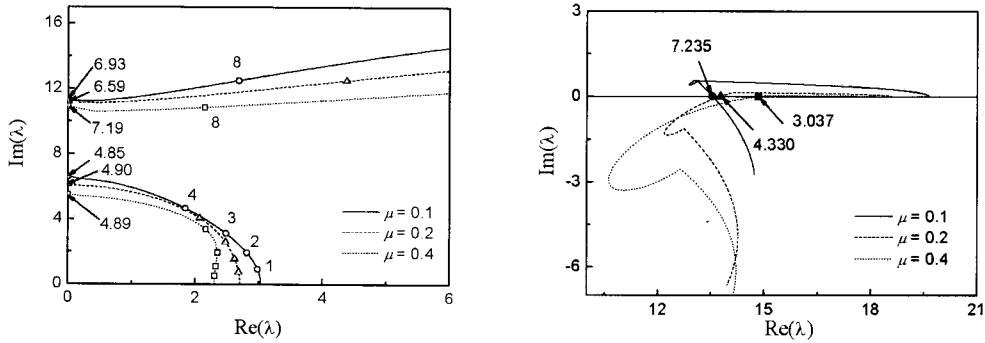


Fig. 5 The complex frequency of the two lowest modes of the rotating cantilevered system as a function of the flow velocity for $\beta = 0.4$, $\Omega = 1$

4. 결론

이 연구에서는 유체유동을 가진 회전 외팔 파이프의 안정성, 즉 플러터 불안정을 일으키는 질량비, 회전 각속도, 그리고 끝단질량의 영향에 따른 임계유속의 변화에 대하여 수치해석하였다. 전반적으로 동일한 질량비를 가진 경우 회전 각속도가 증가할수록 임계유속 값이 증가하며, 질량비와 임계유속 값은 서로 비례적인 경향을 가짐을 알 수 있다. 또, 끝단질량의 크기가 증가할수록 임계유속 값이 점점 작아지는 것을 알 수 있다. 즉, 끝단질량이 클수록 파이프의 불안정을 일으킬 가능성이 높아진다. 파이프의 불안정을 유발하는 임계유속에 미치는 영향은 회전 각속도의 영향보다 질량비와 끝단질량의 영향이 더 크다는 것을 알 수 있다.

참고문헌

- Bhat, R. (1986) Transverse Vibrations of a Rotating Uniform Cantilever Beam with Tip Mass as Predicted by Using Bema Characteristic Orthogonal Polynomials in the Rayleigh-Ritz Method, *Journal of Sound and Vibration*, 105(2), pp. 199~210.
- Fung, E. H. K. and Yau, D. T. W. (2001) Vibration Frequencies of a Rotating Flexible Arm Carrying a Moving Mass, *Journal of Sound and Vibration*, 241(5), pp. 857~878.
- Handan, M. N. and Al-Bedoor, B. O., (2001) Non-Linear Free Vibrations of a Rotating Flexible Arm, *Journal of Sound and Vibration*, 242(5), pp. 839~853.
- Kane, T., Ryan, R. and Banerjee, A. (1987) Dynamics of Cantilever Beam Attached to a Moving Mase, *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 10, pp. 139~151.
- Park, J. H. and Kim, J. H. (1999) Dynamic Analysis of Rotating Curved Beam with a Tip Mass, *Journal of Sound and Vibration*, 228(5), pp. 1017~1034.
- Southwell, R. and Gough, F. (1921), The Free Transverse Vibration of Airscrew Blades, *British A. R. C. Reports and Memoranda*, No. 766.
- 유홍희 (1991) 회전 구조물의 Hybrid 변형변수를 이용한 선형 동적 모델링, *한국항공우주학회지*, 19(3), pp. 32~39.