

고정-스프링 일정체적 기둥의 자유진동 및 좌굴하중

Free Vibrations and Buckling Loads of Column with Clamped-Spring Ends and Constant Volume

윤 희 민*, 이 태 은**, 박 광 규***, 이 병 구****

Hee Min Yoon, Tae Eun Lee, Kwang Kyu Park and Byoung Koo Lee

ABSTRACT

This study deals with the free vibrations and buckling loads of column with clamped-spring ends and constant volume. The column has the regular polygon cross-section whose depth is varied with the linear functional fashion. The differential equation governing the free vibration of such column is derived in which the effect of axial load is included. The differential equation is solved numerically for calculating frequencies. By using the relationship between loads and frequencies, the buckling loads are also obtained.

Keywords: free vibration, buckling load, column, clamped-spring ends, constant volume

1. 서 론

기둥은 보, 평판, 곡선 부재 등과 더불어 가장 기본적인 구조단위 중에 하나이므로 토목, 건축, 기계 등 각종 구조공학 분야에서 빼대구조로 이용되고 있다. 일정체적을 갖는 부재는 최소중량 설계의 개념에서 매우 중요한 변단면의 형식이다(Haftka, 1990). 스프링으로 지지된 구조물은 스프링의 강성을 적절히 조절하므로 구조물의 거동을 제어할 수 있는 하나의 수단이 된다(Sato, 1996). 이러한 관점에서 이 논문은 압축하중이 작용하는 고정-스프링 기둥의 자유진동 및 좌굴하중을 해석하는데 연구목적이 있다. 대상 기둥은 단면이 정다각형이고 길이와 체적이 일정하며, 단면 깊이가 선형 함수로 변화하는 변단면으로 채택하였다.

2. 기둥 부재의 정의

그림 1은 체적 V 와 길이 l 이 일정한 기둥을 나타낸다. 단면은 변수가 m 인 정다각형이다. x 는 기둥의 축방향 좌표이고 h 는 단면 깊이이다. $x=0$ 에서 $h=h_a$ 이고, $x=l$ 에서 $h=h_b$ 이다. 단면 깊이 h 는 축방향 좌표 x 에 따라서 변화하기 때문에 단면적 A 및 단면2차모멘트 I 도 x 에 따라서 변화한다. 기둥의 기하학적 형상을 정의하기 위하여 단면비 α 를 다음과 같이 도입한다.

$$\alpha = h_b/h_a \tag{1}$$

* 학생회원 • 원광대학교 대학원 토목환경공학과 석사과정 Email: thms4@wonkwang.ac.kr
** 정회원 • 원광대학교 토목환경공학과 겸임교수 Email: telee@wonkwang.ac.kr
*** 정회원 • 대전대학교 토목공학과 교수 Email: kkpark@dju.ac.kr
**** 정회원 • 원광대학교 토목환경공학과 교수 Email: bkleest@wonkwang.ac.kr

단면 깊이가 h 이고 변수가 m 인 정다각형 단면의 A 및 I 는 다음과 같다.

$$A = c_1 h^2, \quad c_1 = k \sin(\pi/m) \cos(\pi/m) \quad (2a,b)$$

$$I = c_2 h^4, \quad c_2 = (m/12) \sin(\pi/m) \cos^3(\pi/m) [3 + \tan^2(\pi/m)] \quad (3a,b)$$

함수식 h 는 모든 함수식이 가능하지만 본 연구에서는 선형식으로 채택하였다. 그림 1에서 함수식 h 는 직교좌표계 (x, h) 에서 $(0, h_0)$, $(l, \alpha h_0)$ 를 통과하므로 다음과 같이 결정된다.

$$h = h_0 [c_3(x/l) + 1], \quad c_3 = \alpha - 1 \quad (4a,b)$$

위에서 정의된 기둥의 체적 V 를 식 (2), (4)를 이용하여 산정하면 다음과 같이 구할 수 있다.

$$V = \int_0^l A dx = c_1 c_4 h_0^2 l, \quad c_4 = (\alpha^2 + \alpha + 1)/3 \quad (5a,b)$$

3. 수학적 모형

그림 2는 압축하중 P 를 받고 있는 자유진동하는 고정-스프링 기둥의 진동형 $y(x)$ 를 나타낸다. 점선은 정적 상태의 기둥 축이며 $y(x)=0$ 이고, 실선은 진동형 $y(x)$ 를 나타낸다. 기둥의 상단은 스프링 상수가 K 인 스프링으로 지지되어 있다. 기둥의 자유진동을 조화진동으로 가정하면 변위의 조화진동식 $\bar{y}(x,t)$ 는 다음과 같다.

$$\bar{y}(x,t) = y(x) \sin(\omega_i t) \quad (6)$$

여기서 $y(x)$ 는 진폭, ω_i 는 고유진동수, $i(=1,2,3,4,\dots)$ 는 모드 번호, t 는 시간이다.

식 (6)의 조화진동으로 표현되며 압축하중을 받는 변단면 기둥의 자유진동을 지배하는 미분방정식은 다음과 같다(Lee 등, 2006).

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + 2EI \frac{dI}{dx} \frac{d^3 y}{dx^3} + (E \frac{d^2 I}{dx^2} + P) \frac{d^2 y}{dx^2} - \rho A \omega_i^2 y = 0 \quad (7)$$

여기서 E 는 탄성계수, ρ 는 질량밀도이다.

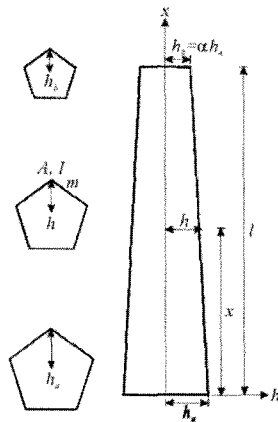


그림 1. 대상기둥의 형상 및 재변수

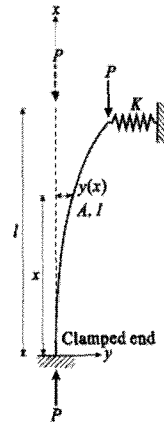


그림 2. 기둥의 진동형

지배미분방정식을 무차원으로 유도하기 위하여 다음의 무차원 변수를 도입한다.

$$\xi = x/l, \eta = y/l, k = Kl^5/(EV^2), p = Pl^4/(EV^2), C_i = \omega_i l^2 \sqrt{\rho l/(EV)} \quad (8 \sim 12)$$

위에서 (ξ, η) 는 직교좌표계 (x, y) 를 기둥길이 l 로 정규화한 무차원량이고, k 는 무차원 스프링 상수, p 는 무차원 하중, C_i 는 무차원 고유진동수이다.

이상의 식들을 이용하면 고정-스프링 기둥의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\frac{d^4 \eta}{d\xi^4} = a_1 \frac{d^3 \eta}{d\xi^3} + (a_2 + a_3 p) \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + a_4 C_i^2 \eta \quad (13)$$

$$a_1 = -8c_3 \xi / (c_3 \xi + 1), \quad a_2 = -12c_3^2 / (c_3 \xi + 1)^2 \quad (14a, b)$$

$$a_3 = -c_1^2 c_4^2 / [c_2 (c_3 \xi + 1)^4], \quad a_4 = c_1^2 c_4 / [c_2 (c_3 \xi + 1)^2] \quad (14c, d)$$

기둥의 고정단 $x=0$ 에서 진폭 $y=0$, 회전각 $dy/dx=0$ 이다. 식 (8), (9)를 이용하면 $\xi=0$ 에서 무차원 경계조건을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\eta = 0, \quad \frac{d\eta}{d\xi} = 0 \quad (15, 16)$$

스프링 지지 $x=l$ 에서 휨모멘트 $EI_f(d^2y/dx^2)=0$ 이고, 전단력 $EI_f(d^3y/dx^3)=-P(dy/dx)+Ky$ 의 경계조건을 갖는다. 여기서 I_f 는 $x=l$ 에서 단면2차모멘트이며, 식 (3)을 이용하면 $I_f = \alpha^4 c_2 V^2 / (c_1 c_4 l)^2$ 으로 구할 수 있다. 식 (8)~(12)의 무차원 변수를 이용하면 $\xi=1$ 에서 무차원 경계조건을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\frac{d^2 \eta}{d\xi^2} = 0; \quad \frac{d^3 \eta}{d\xi^3} + p\lambda \frac{d\eta}{d\xi} - k\lambda \eta = 0, \quad \lambda = c_1^2 c_4^2 / (\alpha^4 c_2) \quad (17, 18 a, b)$$

4. 수치해석 예 및 토의

위에서 유도한 미분방정식과 경계조건에 적절한 수치해석법을 적용하면 무차원 고유진동수 C_i 를 산정할 수 있다. 미분방정식의 수치적분은 Runge-Kutta법을 이용하였고, 고유치인 C_i 는 행렬값 탐사법을 이용하였다. 이 연구에서는 최저차 고유진동수(fundamental frequency) $C_1 (i=1)$ 만을 산출하였다.

그림 3은 $\alpha - C_1$ 곡선이다. 단면비 α 가 증가하면 무차원 고유진동수 C_1 은 증가하며 최대값을 보인 후에 감소한다. 정삼각형($m=3$) 단면 기둥은 ○로 표시한 $\alpha=0.87$ 에서 최대값 $C_1=4.24$ 를 보인다. 정삼각형 단면 기둥은 ■에서와 같이 α 가 0.216보다 작으면 좌굴한다.

그림 4는 $k - C_1$ 곡선이다. 무차원 스프링 상수 k 가 증가하면 C_1 은 증가한다. 정사각형($m=4$) 단면 기둥은 ■으로 표시한 바와 같이 k 가 0.418보다 작으면 좌굴한다.

그림 5는 $p - C_1$ 곡선이다. 무차원 하중 p 가 증가하면 C_1 은 감소하고 $C_1=0$ 이 되는 p 에서 기둥은 좌굴한다. 정삼각형 단면 기둥의 무차원 좌굴하중은 ■로 표시한 $b=0.568$ 임을 알 수 있다.

그림 6은 그림 5의 관계를 이용하여 산정한 $\alpha - b$ 곡선이다. α 가 증가하면 b 는 증가하며 최대값을 지나면 감소한다. 정삼각형 단면 기둥은 ○로 표시한 $\alpha=1.03$ 에서 최대값 $b=0.984$ 를 보인다.

그림 3, 4, 5, 6을 통하여 가장 강인한 단면은 정삼각형 단면임을 알 수 있다.

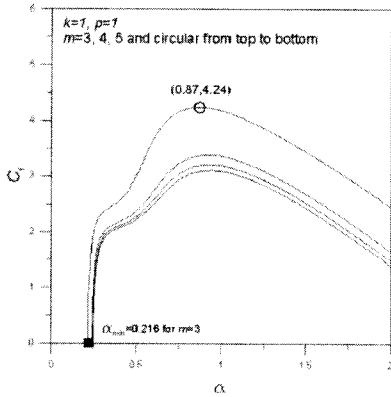


그림 3. $\alpha - C_1$ 곡선

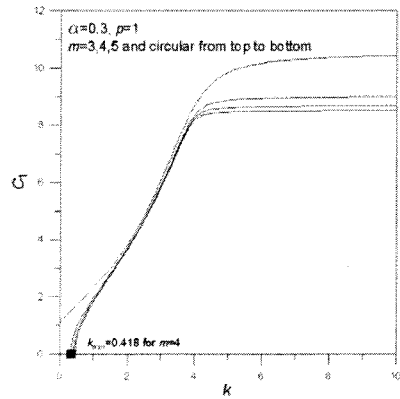


그림 4. $k - C_1$ 곡선

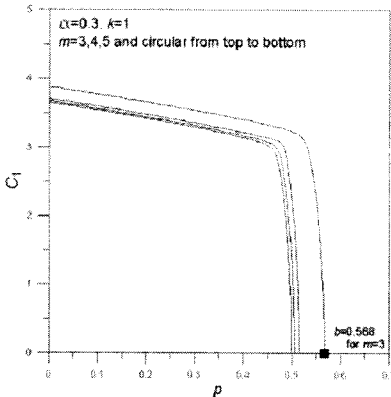


그림 5. $p - C_1$ 곡선

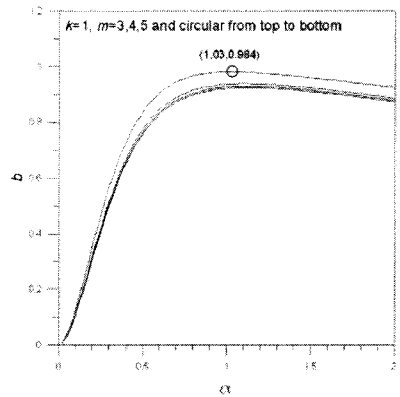


그림 6. $\alpha - b$ 곡선

5. 결론

이 논문은 고정-스프링 일정체적 기둥의 자유진동 및 좌굴하중에 관한 연구이다. 기둥의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 유도하고 이를 수치해석하여 고유진동수를 산정하였다. 좌굴하중은 하중-고유진동수의 관계를 이용하여 산정하였다. 수치해석의 결과를 이용하여 최대의 제1고유진동수와 최대의 좌굴하중을 갖는 기둥의 형상을 결정하였다. 이 연구의 결과는 최소중량 기둥의 설계에 유용한 자료를 제공할 수 있다.

참고문헌

- Haftka, R.T., Grudal, Z. and Kamat, M.P. (1990) Element of structural optimization, *Klüver Academic Publisher*.
- Lee, B.K., Carr, A.J., Lee, T.E. and Kim, I.J. (2006) Buckling loads of columns with constant volume, *Journal of Sound and Vibration*, 294, pp. 381 ~ 387.
- Sato, K. (1996) Instability of a clamped-elastically restrained Timoshenko columns carrying a tip load subjected to a follower force, *Journal of Sound and Vibration*, 194, pp. 623 ~ 630.