

입력과 매칭되지 않는 외란을 갖는 시스템에 대한 가변구조제어

Variable Structure Control for a System with Mismatched Disturbances

최윤종* · 박부경**
(Yun Jong Choi · PooGyeon Park)

Abstract – For several decades, VSC has gained much attention as one of the useful design tools for handling the practical system with uncertainties or disturbances. Generally, the disturbances in the matching condition can be perfectly rejected via VSC; however, these in the mismatching condition are known to be hardly rejected. There have been some trials on it, in which the resulting controls in fact belong to the class of robust control guaranteeing disturbance γ -attenuation. Therefore, in this paper, we propose a new Variable Structure Control (VSC) for a system with mismatched disturbances. The proposed controller is composed of linear and nonlinear parts; the former plays a role in stabilizing the system and the latter takes care of attenuating the disturbances. The main contribution is to introduce the concept of switching-zone, rather than switching-surface, that is designed through piece-wise Lyapunov functions. The resulting non-convex conditions are formulated with an iterative linear programming algorithm, which provides an excellent performance of almost rejecting the disturbances.

Key Words : Variable Structure control, Mismatched, Disturbances, SMC, LMI

1. 장 서 론

1970년대 이후로 활발히 연구가 진행중인 가변구조제어(VSC)는 비선형 시스템, MIMO 시스템, 스위칭 시스템, 심지어 확률적 시스템에 이르기까지 다양한 실제 시스템을 다루는데 유용한 제어기법으로 널리 사용되고 있다.[1]-[3] 특히, sliding mode 를 포함한 가변구조제어기는 order reduction 과 invariance 특성을 가지고 있어, 복잡한 시스템이나 시스템 파라메타의 불확실성(uncertainty) 혹은 외부 잡음(disturbance)을 갖는 시스템을 다루기에 아주 적합하다.

가변구조제어에 대한 기존의 많은 연구들은 주로 입력으로 제어 가능한(즉, 매칭이 되는) 불확실성이나 외란에 대해서 행해져 왔으며, 그 결과 그것들을 성공적으로 제거함으로써 점근적 안정화(asymptotic stability)를 추구할 수 있었다. 하지만, 실제 시스템에서는 이런 입력과 매칭된 불확실성이나 외란에 대한 영향뿐만 아니라 입력으로 제어가 불가능한(즉, 매칭이 되지 않는) 부분에 대한 영향도 함께 고려해야 된다. 이럴 경우, 가변구조제어기를 사용하더라도 점근적 안정화를 추구하기가 쉽지 않다. 이에 대한 몇몇 연구들이 있었지만 [4]-[5], 이를 또한 점근적 안정화 대신에 강인제어 기법을 도입하여, 외란에 대한 출력의 크기의 비율(γ)을 작게 제한

(bound)만 하고 있을 뿐 완벽하게 제거해내지는 못하고 있다.

이를 개선하기 위해, 본 논문은 입력과 매칭되지 않는 외란을 갖는 시스템에 대해서 스위칭 영역(switching zone)을 이용한 새로운 가변구조제어를 제안하고자 한다. 스위칭 영역은 piece-wise Lyapunov 함수를 이용해서 디자인 되었으며, 각각의 영역에 해당되는 가변구조제어기는 선형/비선형 제어기의 혼합으로, 전자는 시스템의 안정화에, 후자는 외란의 억제에 기여한다. 본 논문의 non-convex 한 조건들은 반복선형 프로그램 알고리즘을 이용하여 수식화 되었으며, 시뮬레이션 결과는 외란의 영향을 거의 완벽히 억제하고 있음을 보여준다.

2. 장 본 론

2.1 절 시스템 모델

본 연구에서 사용된 시스템 모델은 다음과 같다.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_w w(t), \quad (1)$$

여기서, $x(t)$: 상태변수($\in R^n$) $u(t)$: 제어입력($\in R^m$)
 $w(t)$: 입력과 매칭되지 않는 외란($\in R^p, |w(t)| \leq \epsilon$)

본 연구는 위와 같은 시스템(1)을 안정화시키는 가변구조

저자 소개

* 최윤종 : 浦項工科大學 電子工學科 博士課程

** 박부경: 浦項工科大學 電子工學科 教授 · 工博

제어를 설계하는 것이 그 목적이다.

2.2 절 시스템 안정화

본격적인 설명에 앞서, 위에서 정의된 시스템 (1)은 2 차의 SISO (Single Input Single Output) 타입으로 가정하고 (즉, $m = 1, n = 2$), n 차로의 확장은 차후 과제로 다룰 것이다.

2.2.1 절 스위칭 영역 설정

위 시스템을 안정화시키기 위해서, 제일 먼저 해야 될 일은 piece-wise Lyapunov 함수를 이용한 스위칭 영역을 설정하는 것이다. 이 영역의 설정은 다음과 같이 수행한다. 우선 다음과 같이 piece-wise Lyapunov 함수를 고려한다.

$$V_i(x(t)) = x^T(t)P_i x(t), \quad i = 1, 2 \quad (2)$$

이때, 각각의 $V_i(x(t))$ 는 스위칭 영역 Z_i^+, Z_i^- 에 대해서 정의되며, 그림 1과 같은 영역을 나타낸다.

$$\begin{aligned} Z_i^+ &= \left\{ x(t) \mid |x^T(t)P_i B| \geq |x^T(t)P_i B_w| \right\} \\ &= \left\{ x(t) \mid x^T(t)P_i(BB^T - B_w B_w^T)x(t) \geq 0 \right\} \\ Z_i^- &\equiv R^n - Z_i^+ \end{aligned} \quad (3)$$

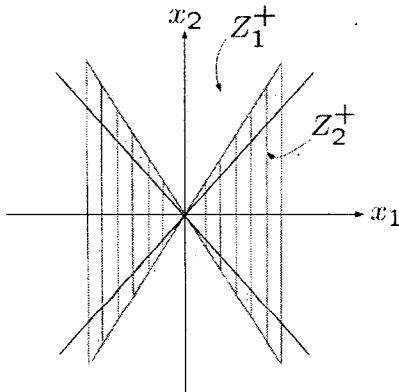


그림 1 스위칭 영역 Z_1^+, Z_2^+

Fig. 1 Switching region Z_1^+, Z_2^+

그러면, 이 영역들은 다음과 같은 속성을 지니게 된다.

$$\bigcup_{i=1}^n Z_i^+ = R^n \quad (4)$$

$$Z_i^+ \cap Z_j^+ \neq \emptyset, \text{ for some } i, j \quad (5)$$

2.2.2 절 가변구조제어기 설계

위에서 설정된 스위칭 영역을 바탕으로, 다음과 같은 정리 1을 유도해 볼 수 있다.

[정리 1] 주어진 시스템(1)과 양수의 λ_i, η_i, μ_i 에 대해서 ($i = 1, 2$), 만일, 식(6)-(8)을 만족시키는 P_i, K_i 가 존재하고, 그 값을 이용하여 식(9)을 만족시키는 공통변수 P_{eq} 가 또한 존재한다면, 주어진 시스템은 식(10)에서 제안된 가변구

조제어기로 외란이 없을 경우 접근적 안정화, 외란이 있을 경우 BIBO(Bounded Input Bounded Output) 안정화 시킬 수 있다.

$$(A + BK_i)^T P_i + P_i (A + BK_i) + \lambda_i (P_i (BB^T - B_w B_w^T) P_i) < 0 \quad (6)$$

$$P_i - \eta_i (P_i (BB^T - B_w B_w^T) P_i) \geq 0 \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^2 P_i (BB^T - B_w B_w^T) P_i > 0 \quad (8)$$

$$(A + BK_i)^T P_{eq} + P_{eq} (A + BK_i) + \mu_i (P_i (BB^T - B_w B_w^T) P_i) < 0 \quad (9)$$

이럴 경우, 가변구조제어기는 다음과 같이 디자인된다.

$$\begin{aligned} \bar{u}_i(t) &= K_i x(t) + \bar{u}_i(t), \quad \text{for } x(t) \in Z_i^+ \\ \bar{u}_i(t) &= -\epsilon \operatorname{sgn}(x^T(t)P_i B) \end{aligned} \quad (10)$$

여기서, $\operatorname{sgn}(\sigma)$ 는 σ 의 부호를 나타낸다.

증명: 식 (2)의 piece-wise Lyapunov 함수를 미분해서,

$$\dot{V}_i(x(t)) = 2x^T(t)P_i(Ax(t) + Bu_i(t) + B_w w(t)) \quad (11)$$

식(10)을 식(11)에 대입하면, 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= 2x^T(t)P_i(A + BK_i)x(t) + \\ &\quad 2x^T(t)P_i(B\bar{u}_i(t) + B_w w(t)) \end{aligned} \quad (12)$$

여기서, 식(12)이 음수가 될 때, 즉 $\dot{V} < 0$, 위 시스템은 안정화되며, 이는 식(13)-(14)가 만족할 때 성립된다.(충분조건)

$$(A + BK_i)^T P_i + P_i (A + BK_i) < 0, \text{ for } x(t) \in Z_i^+ \quad (13)$$

$$x^T(t)P_i B \bar{u}_i(t) + x^T(t)P_i B_w w(t) \leq 0 \quad (14)$$

$$Z_1^- \subset Z_2^+, \quad Z_2^- \subset Z_1^+ \quad (15)$$

식(13)은 자명하며, 조건 $x(t) \in Z_i^+$ 를 S-procedure를 사용하여 앞의 식과 합치면, 식(6)이 된다. 이때, P_i 는 스위칭 영역 Z_i^+ 에서 정의된다(식(7)). 식(14)는 식(10)에서 정의된 $\bar{u}_i(t)$ 를 대입하면 성립됨을 쉽게 알 수 있다. 즉,

$$\begin{aligned} x^T(t)P_i B (-\epsilon \operatorname{sgn}(x^T(t)P_i B)) + x^T(t)P_i B_w w(t) \\ \leq -\epsilon (|x^T(t)P_i B| - |x^T(t)P_i B_w|) \leq 0 \end{aligned}$$

식(15)는 스위칭영역의 속성(4)-(5)을 만족시키기 위한 조건으로 식(8)과 같이 표현 가능하다.

마지막으로, [6]에서도 지적했듯이, 두 스위칭 시스템

$(A + BK_1, A + BK_2)$ 은 식(9)을 만족시키는 공통변수 P_{eq} 가 존재한다면, 이 시스템은 외란이 없을 경우 점근적 안정화가 되고, 외란이 있을 경우에는 BIBO 안정화가 된다. ■

위 정리1의 식(8)은 non-convex 조건으로 그 해를 쉽게 구할 수 없는데, 여기서는 반복선형 프로그램 알고리즘을 이용해서 그 해를 구했다.

3. 장 시뮬레이션 결과

시뮬레이션을 위해서 사용된 시스템 파라메터는 다음과 같고, 상태변수의 초기 값은 $(3, -2)$ 이며, 제안된 제어기와 H_∞ 제어기와의 비교를 통해 그 성능을 검증하고자 한다.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, B_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \epsilon = 0.1$$

위 정리1에 의거하여, 구해진 해는 다음과 같으며,

$$P_1 = 1e^{-6} \times \begin{bmatrix} 0.6297 & -0.4179 \\ -0.4179 & 0.3046 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = 1e^{-6} \times \begin{bmatrix} 0.2566 & -0.0839 \\ -0.0839 & 0.0512 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = [-24.0542, 16.0935]$$

$$K_2 = [-7.4759, 2.5279]$$

$$P_{eq} = 1e^8 \times \begin{bmatrix} 5.8629 & 2.4718 \\ 2.4718 & 6.6979 \end{bmatrix}$$

공통변수 P_{eq} 가 존재하므로, 위 시스템은 그림 2에서 보는 바와 같이 안정화됨을 알 수 있다. 그림 3은 그림 2의 결과를 20~30초 구간에서 살펴본 그림이며, 결과에서 보는 바와 같이, 제안된 제어기가 H_∞ 제어기에 비해, 외란을 효과적으로 억제하여 거의 영향을 받지 않을 정도로 그 성능이 월등하다.

4. 장 결 론

본 논문은 입력과 매칭이 되지 않는 외란을 갖는 시스템에 대해서 스위칭 영역 (switching zone)을 이용한 세로운 가변구조제어를 제안하였다. 제안된 제어기는 각각의 스위칭 영역에서 정의된 piece-wise Lyapunov 함수를 이용해서 디자인되었으며, 선형/비선형 제어기의 혼합으로 구성되어 있다. 시뮬레이션 결과는 외란의 영향을 거의 완벽히 억제하여 H_∞ 제어기보다 월등한 성능을 보여줌을 알 수 있다.

참 고 문 헌

- [1] V.I. Utkin, "Variable structure systems with sliding modes", IEEE Transactions on Automatic Control, vol.22, pp. 212-222, 1977.

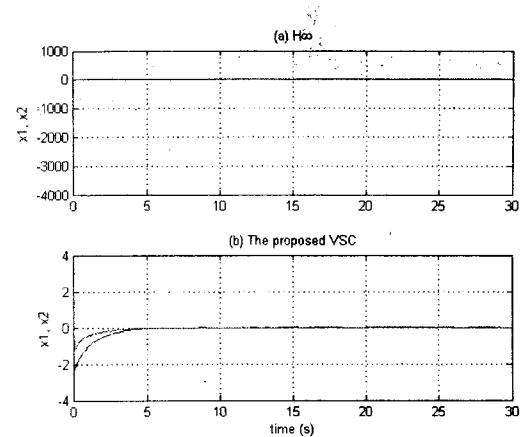


그림 2 상태변수의 시간에 따른 궤적

Fig. 2 The state trajectories of (a) H_∞ and

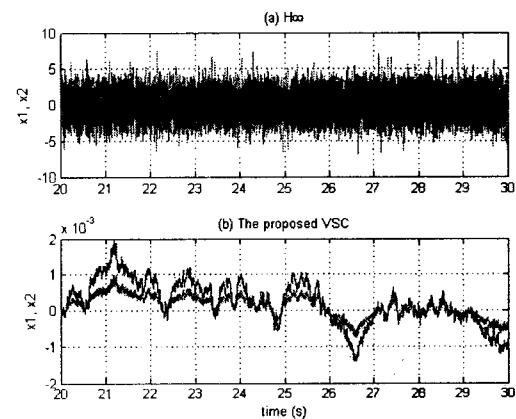


그림 3 상태변수의 시간에 따른 궤적

Fig. 3 The state trajectories of (a) H_∞ and (b) the proposed VSC

- [2] R.A. DeCarlo, S.H. Zak, G.P. Matthews, "Variable structure control of nonlinear multivariable systems: a tutorial", IEEE Proceeding, vol. 76, pp. 212-232, 1988.
- [3] J.Y. Hung, W. Gao, J.C. Hung, "Variable structure control: a survey", IEEE Transactions on Electronics, vol. 40, pp. 2-22, 1993.
- [4] B.M. Dions, J.V. Medanic, "Simplex-type variable structure controllers for systems with non-matching disturbances and uncertainties", International Journal of Control, vol. 68, no. 3, pp. 625-656, 1997.
- [5] B.M. Dions, "Sliding-mode control design for a class of systems with non-matching nonlinearities and disturbances", International Journal of Systems Science, vol. 35, no. 8, pp. 445-455, July 2004.
- [6] R.A. DeCarlo, M.S. Branicky, S. Pettersson, B. Lennartson, "Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems", IEEE Proceeding, vol. 88, no. 7, pp. 1069-1082, July 2000.