

# 적분공정을 위한 민감도 함수 $M_s$ 를 이용한 안정된 PID 동조

## Stable PID Tuning for Integrating Processes using sensitive function $M_s$

이원혁\* · 황형수\*\*

Won-Hyok Lee · Hyung-Soo Hwang

**Abstract** - PID control is widely used to control stable processes, however, its application to integrating processes is less common. In this paper, we proposed a simple PID controller tuning method for integrating processes with time delay to meet a sensitive function  $M_s$ . With the proposed PID tuning method, we can obtain stable integrating processes using PD controller in inner feedback loop and a loop transfer function with desired stable specification. This guarantees both robustness and performance. Simulation examples are given to show the good performance of the proposed tuning method to other methods.

**Key Words** : PID control, stable, integrating process, sensitive function, robustness

### 1. 장 서 론

PID 제어기는 간단한 구조로 인해 이해하기 쉽고, 모델링 시 에러가 적으며 실현하기 용이하여 현재까지 산업현장에 가장 널리 운영되어지고 있다. 또한 최적의 성능을 얻을 수 있는 PID 제어기의 동조 방법이 연구되어 있으며 그 중에서 Ziegler-Nichols rules, Cohen-Coon Method, IAE, ISE, ITAE, IMC Method 등이 보편적으로 사용되고 있다. 그러나 이 동조방법들은 시간지연을 갖는 적분공정을 제어하기에는 어려움이 많다. 현재 시간지연을 갖는 적분공정에 대한 제어 역시 많은 동조 방법들이 제안되어지고 있다.[2]-[8] 그러나, 일반적으로 발생되는 과도한 오버슈트 그리고 정상상태로 수렴하는 정정시간이 길어지는 단점으로 페루프 응답이 좋지 못하다. 일반적인 적분공정은 작업의 조건과 시간에 따라 변화하기 때문에 제어기 설계나 해석 시에 민감하지 않도록 페루프 시스템의 제어기 파라미터를 동정하는 것은 매우 중요하다. 본 논문에서는 적분공정이 안정한 조건을 갖게 하는 설정가중치를 갖는 PID제어기[1]의 개선된 동조방법을 제안한다. 이 동조방법은 내부 폐환루프에 PD 제어기를 이용하여 적분공정을 안정된 조건으로 설계한 후, 민감도 함수  $M_s$ 를 이용하여 공정의 안정조건에 맞는 PID제어기를 동조하였다. 그리고 적분공정의 특성인 오버슈트를 줄이기 위하여 설정가중치를 갖는 PID제어기를 사용하므로 기존의 제어기가 갖는 결점을 극복했다. 제안되어진 동조 방법은 매우 간단하며 기존의 제어 동조방법보다 더 좋은 성능을 보여준다.

### 2. 장 본 론

#### 2.1. PID 제어기의 동조

적분공정을 제어하기 위한 내부 피드백 루프 제어기의 블록선도는 그림 1.처럼 표현된다. 여기서, 내부 피드백 루프의 PD 제어기는 적분공정이 안정하도록 변화시키는 중요한 동작을 하게 된다.

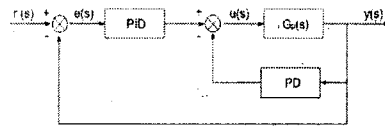


그림1. Two-loop Controller block diagram

PID 제어기와 공정의 전달함수는  $G_c(s)$ 와  $G_p(s)$ 도 표현되며, 적분공정은 저차에 지연시간이 포함된 형태로 표현된다.

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s \quad (1)$$

$$G_p(s) = \frac{K}{s(Ts+1)} e^{-Ls} \quad (2)$$

내부 피드백 루프의 PD 제어기는 다음과 같은 전달함수  $G_{PD}(s)$ 로 주어진다.

$$G_{PD}(s) = k_p + k_d s = k_1(a + bs) \quad (3)$$

여기에서 공정과의 계산을 고려하여

$$a=1, b=T \quad (4)$$

로 설정한다. PD 제어기를 포함한 내부 피드백 루프의 페루프 시스템 전달함수  $G_I(s)$ 는 다음과 같다.

$$G_I(s) = \frac{G_p(s)}{1 + G_{PD}G_p(s)} = \frac{Ke^{-Ls}}{Ts^2 + s + k_1K(Ts+1)e^{-Ls}} \quad (5)$$

식 (5)에서 분모항의 시간지연  $e^{-Ls}$  부분을 테일러 급수 전개를 사용하여 근사화하면

$$e^{-Ls} \cong 1 - Ls \quad (6)$$

식 (6)으로 표현되고, 식(6)을 식(5)에 대입하면

저자 소개

\* 이원혁 : 圓光大學 制御計測學科 博士課程

\*\* 황형수 : 圓光大學 制御計測學科 教授 · 工博

$$G_1(s) \cong G_m(s) = \frac{Ke^{-Ls}}{(1-k_1KL)Ts^2 + (1-k_1KL+k_1KT)s + k_1K} \quad (7)$$

이 된다. 여기서,  $G_m(s)$  은 테일러 급수 전개 방법으로 부터 얻어진 2차 시간지연 모델이 된다. 전달함수  $G_m(s)$  은 특성 방정식은 공정의 안정성을 위해 음의 극점을 가져야 한다. 그렇기 때문에 Routh-Hurwitz 안정도 판별식로부터 다음과 같은 조건을 만족해야만 한다.

$$k_1 < \frac{1}{KL} \quad (8)$$

PD 제어를 포함한 내부 피드백 루프의 이득 값  $k_1$  은 최적의 외란 억제력을 위해 Sung and Lee [3]의 이득 값을 사용하여 다음과 같이 설정할 수 있다.

$$k_1 = \frac{0.2}{KL} \quad (9)$$

구해진 공정이득 값  $k_1$  을 내부 피드백 루프 전달함수 식 (7)에 대입하면,

$$G_1(s) \cong G_m(s) = \frac{e^{-Ls}}{\frac{(1-k_1KL)Ts^2}{K} + \frac{(1-k_1KL+k_1KT)}{K}s + k_1K} \quad (10)$$

식(10)으로 다시 표현된다.

제어 시스템의 설계와 해석에서 강인성(robust)은 항상 고 민되어지는 중요한 문제이다. 제어기의 파라미터는 공정의 동특성에 의해 발생하는 모델의 에러나 변화에 민감하지 않은 방법으로 동조되어야 한다. 공정의 민감도는 다음과 같이 정의된다.

$$M_s = \max_{0 \leq \omega < \infty} \left| \frac{1}{1+G_p(j\omega)G_c(j\omega)} \right| = \max_{0 \leq \omega < \infty} |S(j\omega)| \quad (11)$$

여기서 루프 전달함수는  $G_1(s) = G_c(s)G_p(s)$  이다.

$S(j\omega)$ 는 민감도 함수라고 하며,  $M_s$ 의 정도(quantity)는 루프 전달함수  $G_1(s)$ 의 Nyquist curve로부터 임계점  $(-1, j0)$ 까지의 가장 짧은 거리의 역수로 간단히 표현되며 큰 값을 가질수록 시스템이 민감하게 된다. 기본적으로 최대값은 1.3 ~ 2.0의 범위를 갖는다. 그림 2에서처럼 루프 전달함수  $G_1(s)$ 의 Nyquist curve는 임계점을 중심으로 반지름이  $1/M_s$ 를 가지는 원에 접하게 된다.

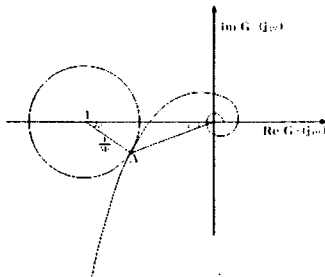


그림 2. Nyquist curve of the loop transfer function

민감도 그리고 이득여유, 위상여유와의 관계는 다음과 같이 정의된다.[1]

$$Am > \frac{M_s}{M_s - 1} \quad (12)$$

$$\phi > 2 \arcsin \frac{1}{2M_s} \quad (13)$$

여기서  $Am$  과  $\phi_m$  은 이득여유와 위상여유이다. 만약

$M_s = 1.6$ 으로 선택하면  $Am > 2.66$ ,  $\phi > 36.4^\circ$ 를 얻을 수 있다. 그러므로 일정한 각도에서는 이득여유와 위상여유를 만족할 수 있다. 그림 2.에서와 같이 A점에서 Nyquist curve가 접하게 되었다면, A점을 지나는 루프 전달함수  $G_1(s) = G_c(s)G_p(s)$ 의 접하기 위한 조건은

$$G_1(j\omega) = -1 + \frac{1}{M_s} e^{-j\theta} \quad (14)$$

$$\arg \frac{dG_1(j\omega)}{d\omega} = \frac{\pi}{2} - \theta \quad (15)$$

가 된다.[1]

PID 제어기의 전달함수 식(1)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$G_{PID}(s) = k \left( \frac{As^2 + Bs + C}{s} \right) \quad (16)$$

여기서,  $A = \frac{K_d}{k}$ ,  $B = \frac{K_p}{k}$ ,  $C = \frac{K_i}{k}$  가 된다.

PID 제어기의 영점과 내부 피드백 루프 전달함수  $G_m(s)$ 의 극점을 같게 선택한다면

$$A = \frac{1-k_1KL}{K}T, \quad B = \frac{1-k_1KL+k_1KT}{K}, \quad C = k_1$$

이 되며,

$$G_c(s)G_m(s) = \frac{ke^{-Ls}}{s} \quad (17)$$

이 된다. 여기에서  $k$ 는 민감도 조건을 바탕으로 결정할 수 있다. 식(17)을 식(14), 식(15)에 대입하여 민감도를 고려하여 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{cases} \frac{k}{\omega} \sin(\omega L) = 1 - \frac{1}{M_s} \cos\theta & [RE] \\ \frac{k}{\omega} \cos(\omega L) = \frac{1}{M_s} \sin\theta & [IM] \\ \omega L + \arctan \frac{1}{\omega L} = \frac{\pi}{2} + \theta \end{cases} \quad (18)$$

파라미터  $k$  값을 근사화하여 다음과 같은 식을 얻을 수 있다. [8]

$$k = \frac{1}{d} \left( 1.451 - \frac{1.508}{M_s} \right) \quad (19)$$

식 (16)에  $k$ 값을 적용하여 PID 파라미터를 계산하면,

$$\begin{cases} K_p = \frac{1}{kL^2} (0.8L + 0.2T) \left( 1.451 - \frac{1.508}{M_s} \right) \\ K_i = \frac{1}{kL^2} \left( 0.2902 - \frac{0.3016}{M_s} \right) \\ K_d = \frac{0.8T}{k} \left( 1.451 - \frac{1.508}{M_s} \right) \end{cases} \quad (20)$$

을 얻을 수 있다.

그림 1.의 블록선도에서  $e(s) = r(s) - y(s)$ 를 고려하여 입력  $u(s)$ 는 다음식으로 표현된다.

$$u(s) = \left( K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \right) (r(s) - y(s)) - (k_p + k_d s) y(s) \quad (21)$$

여기서, 적분공정의 오버슈트를 줄이기위해 그림 1.은 내부 피드백 루프가 없는 설정가중치를 더한 PID 제어기 형태[1]로 바꿀 수 있으며, 이때 제어기의 파라미터는  $K'_p$ ,  $K'_i$ ,  $K'_d$ 와 설정가중치  $b, c$ 로 다시 변경되어진다.

$$u(s) = K'_p (br(s) - y(s)) + \frac{K'_i}{s} e(s) + K'_d s (cr(s) - y(s)) \quad (22)$$

적분공정을 위한 PID 제어기의 파라미터를 다시 계산하면,

$$\begin{aligned}
 K_p' &= \frac{1}{KL^2}(0.8L+0.2T)\left(1.451-\frac{1.508}{M_s}\right)+\frac{0.2}{KL} \\
 K_i' &= \frac{1}{KL^2}\left(0.2902-\frac{0.3016}{M_s}\right) \\
 K_d' &= \frac{0.8T}{K}\left(1.451-\frac{1.508}{M_s}\right)+\frac{0.2T}{KL} \\
 b &= \frac{(0.8L+0.2T)\left(1.451-\frac{1.508}{M_s}\right)}{(0.8L+0.2T)\left(1.451-\frac{1.508}{M_s}\right)+\frac{0.2L}{KL}} \\
 c &= \frac{0.8T\left(1.451-\frac{1.508}{M_s}\right)}{0.8T\left(1.451-\frac{1.508}{M_s}\right)+0.2T}
 \end{aligned}$$

### 3. 장 시뮬레이션

제안된 PID제어기는  $M_s=1.6$ 일 때 파라미터를 구하였으 며, 시뮬레이션은 시간지연이 짧은 적분공정과 시간지연이 긴 적분공정으로 나누어 공정의 특성에 따른 결과를 보았다. 비교로 사용된 동조방법은 적분공정에 많이 쓰이는 Tan의 동 조방법[4]과 Poulin의 동조방법[2] 그리고 최근에 제안된 Wang의 동조방법[7]과 Xu의 동조방법[8]을 사용하였다.

공정1 : 짧은 시간지연을 갖는 적분공정

$$G_p(s) = \frac{e^{-0.2s}}{s(s+1)}$$

제안된 방법으로 PID 제어기의 파라미터를 동조하면  $K_p=5.5765$ ,  $K_i=2.5425$ ,  $K_d=3.0340$ ,  $b=0.8207$ 가 된다. 시뮬 레이션은 스텝함수에 외란을 주어 외란에 대한 강인성(robust) 를 비교하였다. 결과는 그림 3.과 같이 주어진다.

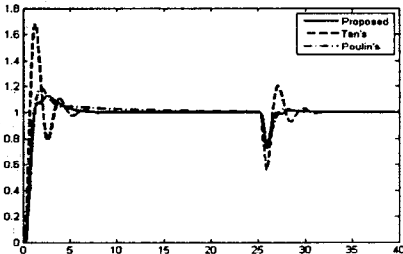


그림 3. Comparison of process response

과도상태에서 Tan의 동조방법은 초기에 큰 오버슈트와 언 더슈트가 발생하며, Poulin의 동조방법은 Tan의 동조방법보 다 오버슈트가 작아 좋은 성능을 나타내지만 정상상태로의 수렴시간이 20s 정도로 Tan의 동조방법보다 수렴시간이 길 게 나타난다. 본 논문에서 제안된 동조방법은 비교되어진 두 동조방법 보다 오버슈트가 적으며 정상상태까지의 수렴시간 역시 8s 정도로 더 우수한 성능을 보여준다.

공정2 : 긴 시간지연을 갖는 적분공정

$$G_p(s) = \frac{e^{-2s}}{s(s+1)}$$

제안된 방법으로 PID 제어기의 파라미터를 동조하면  $K_p=0.3288$ ,  $K_i=0.0254$ ,  $K_d=0.3034$ ,  $b=0.6959$ 가 된다. 시뮬 레이션 결과는 그림 4.과 같이 주어진다. 비교로 사용된 PID 동조방법은 최근에 좋은 성능을 나타내는 적분공정의 PID 동 조방법인 Wang[7]와 Xu[8]의 동조방법과 비교하였으며, 90s 에 외란을 주어 외란에 대한 강인성도 비교하였다.

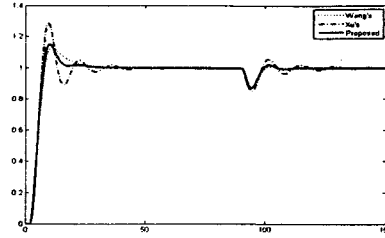


그림 4. Comparison of process response

비교된 동조방법 중 Wang의 동조방법은 Xu의 방법보다 과도상태의 오버슈트가 적으며 수렴속도 역시 25s 정도로 좋 은 성능을 나타낸다. 본 논문에서 제안되어진 동조방법은 오 버슈트가 Wang의 방법과 거의 큰 차이를 나지 않으며 정상 상태로의 수렴속도는 Wang의 동조방법보다 더 좋은 성능을 나타낸다. 또한 외란에 대한 성능을 비교해 보면 외란 후 오버슈트가 적으며 수렴속도면에서 우수한 성능을 보여준다.

### 4. 장 결론

본 논문에서는 시간지연을 갖는 적분공정을 위한 발전된 형태의 PID 동조방법을 제안하였다. 적분공정을 위한 전형적 인 구조의 PID 제어기 형태를 벗어나 두 개의 루프를 사용한 구조를 채택하여 내부 루프에 PD 제어기로부터 공정의 안정 성을 확보한 후, 민감도 함수  $M_s$ 를 이용하여 공정의 안정조 건에 맞는 PID제어기를 동조하였다. 그리고 적분공정의 특 성인 오버슈트를 줄이기 위하여 설정가중치를 갖는 PID제어 기를 사용하므로 더욱 우수한 성능을 보였다. 제안된 PID 동 조방법은 매우 간단한 구조를 가지고 있으며, 시뮬레이션 결 과에서 보였듯이 시간지연을 갖는 적분공정에서 다른 동조방 법들보다 응답성과 외란의 강인성 면에서 매우 뛰어난 성 능을 나타낸다.

### 참 고 문 헌

- [1] Astrom, K.J. and Hagglund, T. PID Controllers: Theory, Design, and Tuning, Instrument Society of America, Research Triangle Park, NC, 1995.
- [2] Poulin, E. and Pomerleau, A. PID tuning for integrating and unstable processes, IEE Proc.-Control Theory Appl., 1998, Vol. 143, No.5, 429-435.
- [3] Sung, S.W. and Lee, I. Limitations and Countermeasures of PID controllers. Ind. Eng. Chem. Res. 1996, Vol. 35, No. 8,2596-2610.
- [4] Tan, W., Liu, J. and Tam, P.K.S. PID Tuning based on loop-shaping H. control, IEE Proc.-Control Theory Appl., 1998, Vol. 145, No. 6,485-490.
- [5] Wang, L. and Cluett, W.R. Tuning PID controllers for integrating processes, IEE Proc.-Control Theory Appl. 1997, Vol. 144, No. 5, 385-392.
- [6] Wang, Y.G and Shao, H.H. Optimal tuning for PI controller, Automatica, 2000, 36, 147-152.
- [7] Ya-Gang Wang and Wen-Jian Cai PID Tuning for Integrating Processes with Sensitivity Specification. Proc.-40th IEEE conference. Dec. 2001, 4087-4091
- [8] Jianghua Xu and Huihe Shao, A Novel Method of PID Tuning for Integrating Processes. proc-the 42nd IEEE conference. Dec. 2003, 139-142