유한구간 임펄스 응답 평활기의 최적 지연시간에 대한 연구

A study of the optimal lag size of FIR smoothers

권보규*, 한수희**, 권욱현***
Bo Kyu Kwon, Soohee Han, and Wook Hyun Kwon

Abstract - In this paper, we propose the optimal lag size which is optimize the performance of the fixed-lag minimum variance FIR smoother. Since the performance of estimation is represented with two Riccati equation and the nonlinear equation of lag size, it is difficult to obtain the optimal lag size. Therefore, we consider the optimal lag size for the scalar system and the numerical example is provided to demonstrate the proposed algorithm.

Key Words : Finite impulse response, fixed-lag size, smoother, estimation

1. 서론

필터의 확장 개념인 평활기에 대한 연구는 매우 오랜 기간 동안 이루어져 왔다. 실제로, 평활기는 필터 보다 개선된 성능으로 인하여 종종 필터를 대신하여 사용된다.

평활기를 포함하는 추정기는 임펄스 응답에 근거하여 유한 주기를 가진 유한 임펄스 응답(FIR : Finite Impulse Response)과 무한 주기를 가진 무한 임펄스 응답(IIR : Infinite Impulse Response)으로 나누어진다.

유한 임펄스 응답 추정기들은 이동 구간으로 불리는 최근 시간 구간의 유한 출력 정보를 사용하는 반면, 무한 임펄스 응답 추정기들은 초기 시간부터 현재까지의 모든 출력 정보를 사용한다. 특히, 추정기 중 필터 문제에 대해 유한 임펄스 응답과 무한 임펄스 응답의 관점에서 많은 연구가 이루어져 왔다.[1]

무한 임펄스 응답 필터의 경우, 그 구조로 인하여 모델링 오차[2] 또는 계산 오차[3]로 인한 발산 문제가 발생할 수 있다. 또한, 순간적으로 발생한 오차로 인해 수렴하는데 매우 오랜 시간이 걸릴 수도 있다.

이러한 무한 임펄스 응답 필터의 문제점을 해결하기 위하여 방대한 양의 계산이 필요함에도 불구하고 유한 임펄스 응답 필터들이 사용되어 왔다.[4][5][6] 평활기 설계에서도 필터에서와 같은 문제가 발생하며, 무한 임펄스 응답 평활기의 단점을 극복하기 위하여 고정 시간 지연 유한 임펄스 응답 평활기가 다음과 같이 제안되었다.[7]

$$\hat{x}(t-l|t) = \int_{t-T}^{t} H(t-\sigma)y(\sigma)d\sigma \qquad (1)$$

여기서 t와 l은 각각 현재 시간과 지연시간이고, $y(t)$는 출력, 그리고 $H(t-\sigma)$는 추정 오차의 공분산이 최소화 되도록 설계된 평활기 이득행렬이다.

유한 임펄스 응답 평활기에 대한 연구들에서는 시간 지연이 고정되어 있음을 가정하고 최적화된 이득 행렬을 구하는 문제가 대부분이나, 통신 분야를 포함한 신호 처리 분야에서는 시간 지연에 대한 최적 해를 구하는 것이 중요한 문제가 된다. 그러나 시간 지연에 대한 최적화 문제의 해를 구하는 연구 결과는 거의 없어 일반적으로 시간 지연이 이동구간의 중간 값으로 정해 졌을 때 추정기의 성능이 좋을 것으로 예상하고 있다. 이는 평활기 이득 행렬이 두개의 리카티 방정식으로 표현되고, 시간 지연에 대한 비선형 행렬식을 다루어야 하는 등 수학적으로 다루기 어렵다는 점에 기인된다. 따라서 이 논문에서는 일반적인 안정화된 스칼라 시스템에 대한 최적의 시간 지연을 계산하고 이를 시뮬레이션을 통해 검증해 보도록 한다.

이 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 유한 임펄스 응답 평활기의 성능을 최적화 시키는 시간 지연에 대한 수학적 해를 구하고, 이를 검증하기 위하여 3장에서는 일반적인 스칼라 시스템에 대한 시뮬레이션을 수행하여 그 결과를 비교 및 확인하도록 한다. 마지막으로 4장에서 이 논문에 대한 결론을 내리도록 한다.

2. 유한구간 임펄스 응답 평활기의 최적 시간 지연

다음과 같은 스칼라 시스템에 대해 고려해 보자.

$$\dot{x}(t) = ax(t) + w(t) \qquad (1)$$
$$y(t) = cx(t) + v(t) \qquad (2)$$

여기서, $x(t)$는 상태, $y(t)$는 출력, 그리고 $w(t) \sim N(0,q)$와 $v(t) \sim N(0,r)$는 각각 시스템 잡음과 측정 잡음이다. 또한, 안정한 시스템을 설계하기 위해 $a < 0$으로 가정도록 한다.

기존의 유한 임펄스 응답 평활기는 고정된 시간 지연에 대해 추정 오차의 공분산이 최소가 되도록 설계되었다.[7] 이 논문에서는 시간 지연에 대한 추정 성능 지수 $J(h)$를 다음

과 같이 정의하고

$$J(h)=\mathrm{E}[x(t)-\hat{x}(t)]^2=[p_1(T-h)+p_2(h)]^{-1} \quad (3)$$

이를 최소화 시키는 최적 시간 지연 h를 구해 보자. 여기서 $p_1(\cdot)$과 $p_2(\cdot)$은 다음과 같은 미분 방정식으로부터 구할 수 있으며,

$$\dot{p_1}(t)=-qp_1^2(t)-2ap_1(t)+c^2/r,\ p_1(0)=0, \quad (4)$$
$$\dot{p_2}(t)=-qp_2^2(t)-2ap_2(t)+c^2/r,\ p_2(0)=0, \quad (5)$$

시간 지연 h의 범위는 $0\le h\le T$이다.

이제 비용함수가 최소가 되는 시간 지연 h를 구해 보자.

우선 식 (3)의 $p_1(T-h)$를 구하기 위해 식(4)으로부터 다음과 같은 관계식을 유도할 수 있다.

$$\int_0^{p_1(T-h)}\frac{dp_1}{-qp_1^2-2ap_1+\frac{c^2}{r}}=\int_0^{T-h}dt \quad (6)$$

분모항의 2차식을 다음과 같은 형태로 나타 낼 수 있다.

$$p_1^2+\frac{2a}{q}p_1-\frac{c^2}{qr}=(p_1-\alpha)(p_1-\beta), \quad (7)$$

여기서 α와 β는 각각 $\alpha>0$, $\beta<0$, 그리고 $|\alpha|>|\beta|$가 만족되어야한다.

식 (7)로부터 식 (6)을 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$-\frac{1}{q}\frac{1}{\alpha-\beta}\int_0^{p_1(T-h)}\frac{1}{(p_1-\alpha)}-\frac{1}{(p_1-\beta)}dp_1 \quad (8)$$
$$=T-h,$$

이 식의 양변에 자연로그를 취하고 정리하면 다음과 같은 식을 구할 수 있으며,

$$\ln\left|\frac{p_1(T-h)-\alpha}{p_1(T-h)-\beta}\right|=-q(\alpha-\beta)(T-h)-\ln\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|, \quad (9)$$
$$-\frac{p_1(T-h)-\alpha}{p_1(T-h)-\beta}=-\frac{\beta}{\alpha}e^{-q(\alpha-\beta)(T-h)}, \quad (10)$$

이 식으로부터 다음과 같이 $p_1(T-h)$를 시간 지연 h에 대해 표현 할 수 있다.

$$p_1(T-h)=-\alpha\beta\frac{-1+e^{-r(T-h)}}{\beta-\alpha e^{-r(T-h)}} \quad (11)$$

다음으로 비슷한 과정을 통하여 $p_2(h)$를 시간지연 h에 대해 나타내어 보자.

우선 식(5)로부터 다음과 같은 관계식을 구할 수 있다.

$$\int_0^{p_2(h)}\frac{dp_2}{-qp_2^2+2ap_2+\frac{c^2}{r}}=\int_0^{h}dt, \quad (12)$$

이 식의 분모항의 2차식을 다음과 같이 나타 낼 수 있다.

$$p_2^2-\frac{2a}{q}p_2-\frac{c^2}{qr}=(p_2+\alpha)(p_2+\beta), \quad (13)$$

식 (13)의 결과로부터 식 (12)를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$-\frac{1}{q}\frac{1}{\beta-\alpha}\int_0^{p_2(h)}\frac{1}{(p_2+\alpha)}-\frac{1}{(p_2+\beta)}dp_2=h \quad (14)$$

이 식 양변에 자연로그를 취하고 정리하면 다음과 같이 전개할 수 있으며,

$$\ln\left|\frac{p_2(h)+\alpha}{p_2(h)+\beta}\right|=-q(\alpha-\beta)h+\ln\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|, \quad (15)$$
$$-\frac{p_2(h)+\alpha}{p_2(h)+\beta}=-\frac{\beta}{\alpha}e^{-rh}, \quad (16)$$

이 식으로부터 다음과 같이 $p_2(h)$를 h에 대한 식으로 나타낼 수 있다.

$$p_2(h)=-\alpha\beta\frac{1-e^{rh}}{\beta-\alpha e^{rh}}. \quad (17)$$

식 (11)과 (17)로부터 $p_1(T-h)+p_2(h)$를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
&p_1(T-h)+p_2(h)\\
&=-\alpha\beta\left[\frac{-1+e^{-r(T-h)}}{\beta-\alpha e^{-r(T-h)}}+\frac{1-e^{rh}}{\beta-\alpha e^{rh}}\right]\\
&=-\alpha\beta\frac{\alpha e^{rh}(1-e^{-rT})+\beta e^{rh}(e^{-rT}-1)}{(\beta-\alpha e^{-r(T-h)})(\beta-\alpha e^{rh})}\\
&=-\alpha\beta\frac{(\alpha e^{rh}-\beta e^{rh})(1-e^{-rT})}{(\beta-\alpha e^{-r(T-h)})(\beta-\alpha e^{rh})}\\
&=-\alpha\beta(\alpha-\beta)(1-e^{-rT})\frac{e^{rh}}{(\beta-\alpha e^{-r(T-h)})(\beta-\alpha e^{rh})}\\
&=-\alpha\beta(\alpha-\beta)(1-e^{-rT})\frac{1}{(\beta e^{-rh}-\alpha e^{-rT})(\beta-\alpha e^{rh})}
\end{aligned} \quad (18)$$

이 식으로부터 추정 성능지수 $J(h)$를 시간 지연 h에 대해 최소화시키는 문제는 다음과 같은 최적화 문제로 바뀔 수 있다.

$$\max J_h(h), \tag{18}$$

여기서 새롭게 정의된 비용함수 $J_h(h)$는 다음과 같다:

$$\begin{aligned} J_h(h) &= (\beta e^{-rh} - \alpha e^{-rT})(\beta - \alpha e^{rh}) \\ &= \beta^2 e^{-rh} + \alpha^2 e^{-r(T-h)} - \alpha\beta(1 + e^{-rT}). \end{aligned} \tag{19}$$

최적화 문제는 다음과 같은 조건을 만족 시키는 켜야 하며,

$$\frac{dJ_h(h)}{dh} = -r\beta^2 e^{-rh} + r\alpha^2 e^{-r(T-h)} = 0, \tag{20}$$

이 식으로부터 최적화된 시간 지연 h를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$h = \frac{T}{2} - \frac{1}{2r} ln \frac{\alpha^2}{\beta^2} \tag{21}$$

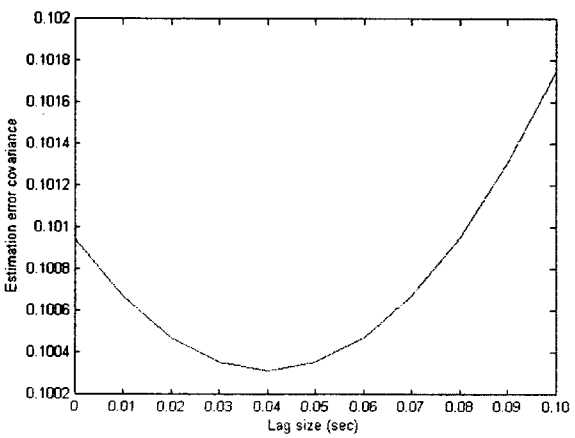
이때, 만약 해가 존지 하지 않는다면 $h = 0$인 경우 최적화된 해를 가진다.

3. 시뮬레이션

이제 시뮬레이션 수행을 통해 제안된 최적 시간 지연 h에 대한 검증을 해 보자. 시뮬레이션을 위한 시스템 계수를 각각 $a = -0.01$, $c = 1$, $q = 0.01$, $r = 0.04$, 그리고 $T = 0.1sec$ 으로 설정하였다.

우선, 이 설정과 식 (21)로부터 이 시스템에 대한 최적 시간 지연 h는 $0.04001sec$로 구할 수 있다.

이제 최적 시간 지연에 대한 검증을 위해 $0 \le h \le 0.1$ 구간에서 시간지연에 따른 추정 성능지수에 대한 시뮬레이션을 수행하여 보자. 시간 지연에 따른 추정 성능 지수의 변화 그래프는 [그림 1]과 같다.



[그림 1] 시간지연에 따른 추정 성능 지수의 변화

[그림 1]에서 관찰할 수 있듯이 시간 지연 h가 $0.04sec$ 근처에서 추정 성능 지수의 값이 최소가 되는 것을 확인 할 수 있으며, 이로부터 일반적으로 생각되었던 최적의 시간 지연이 이동 구간의 중간 값이 아닌 다른 값으로 나타남을 알 수가 있다. 또한, 제안한 최적 시간 지연이 최적화 된 해를 제공하는 것을 확인 할 수가 있다.

4. 결론

이 논문에서는 유한구간 임펄스 응답 평활기 설계 시 추정 성능을 최적화하기 위한 시간 지연을 결정하는 문제를 다루었다. 유한 임펄스 응답 평활기의 추정 성능은 두개의 리카티 방정식을 풀어서 표현되고 시간 지연에 대해 비선형 행렬식이 되어 수학적으로 다루기 어려워, 이 논문에서는 안정한 스칼라 시스템에 대한 최적 시간 지연을 계산하였다. 그 결과 일반으로 생각되어져 왔던 이동 구간의 중간 값이 아닌 값으로 최적 시간 지연이 결정됨을 알 수가 있었으며, 제안된 최적 시간 지연에 대해 시뮬레이션을 통해 검증하였다.

참 고 문 헌

[1] A. V. Oppenheim, R. W. Schafer, and J. R. Buck, "Discrete-Time Signal Processing", Prentice-Hall, 1998.

[2] R. J. Fitzgerald, "Divergence of the Kalman filter," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 6, pp. 736-747, 1971.

[3] M. S. Grewal and A. P. Anderews, "Kalman filtering : Theory and Practice," Prentice-Hall, 1993.

[4] W. H. Kwon, P. S. Kim, and P. Park, "A Receding Horizon Kalman FIR Filter for Linear Continuous -Time Systems," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 44, no. 11, pp. 2115-2120, 1999.

[5] W. H. Kwon, P. S. Kim, and S. Han, "Best Linear Unbiased Estimation Filters with FIR Structures for Continuous-Time State Space Models," Asian Journal of Control, vol. 3, no. 1, pp. 1-9, 2001.

[6] S. Han, W. H. Kwon, and P. S. Kim, "Receding Horizon Unbiased FIR Filters for Continuous-Time State Space Models without A Priori Initial State Information," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 46, no. 5, pp. 766-770, 2001.

[7] B. K. Kwon, S. Han, and W. H. Kwon, "Minimum Varinace FIR smoothers for Continuous-time State Space Models," submitted to IEEE Signal Processing Letters, 2007.