

가우시안과 임펄스 잡음이 혼재한 이미지에 적용하기 위한 비선형 잡음제거 알고리즘의 제안

Proposal of Nonlinear Image Denoising Algorithm for Images Corrupted with Gaussian and Impulse Noise

한 희 일
Hee-il Hahn

Abstract - The statistics for the Gaussian noise mixed with impulsive noise are modelled. The denoising algorithm called amplitude-limited sample average filter is derived, which is optimal in terms of minimizing mean square errors under the assumption that contaminating noise is heavy-tailed Gaussian distributed. Its performance is shown to be excellent when image is corrupted mainly with Gaussian noise. However, it shows visually grainy output as the amount of impulsive noise increases. In order to overcome such problems, it is combined with the myriad filter to propose an amplitude-limited myriad filter. Simulation shows it effectively removes both Gaussian and impulsive noise, not blurring edges severely.

Key Words : 화질개선, 잡음제거, maximum likelihood estimator, 미리어드 필터, 진폭제한 미리어드 필터

1. 장 서 론

이미징 디바이스로 이미지를 획득하는 과정에서 다양한 원인으로 잡음의 영향을 받을 수 있는데, 이러한 잡음은 대부분 가우시안 분포를 갖는다. 이러한 이미지가 통신채널을 통하여 전송될 때 전송오류로 인하여 특정픽셀의 값이 심하게 훼손되는데 이러한 잡음을 임펄스 잡음이라고 부른다. 잡음으로 인하여 화질을 개선하기 위한 연구는 오래 전부터 수많은 연구가 진행되고 있는 고전적인 분야에 속한다. 하지만 지금까지 발표된 어떤 알고리즘도 뚜렷하게 우수한 성능을 보여주지 못하는 만큼 끊임없는 연구가 요구되고 있다.

일반적으로 평균이 0이고 통계적으로 서로 독립인 잡음은 단순히 주변 픽셀들에 대한 평균을 구함으로써 쉽게 제거할 수 있다. 이러한 평균필터는 잡음이 가우시안 분포를 갖는다는 가정 하에서 평균자승오차를 최소화한다는 점에서 maximum likelihood estimator(MLE)이다. 하지만 평균필터는 이미지의 에지 같은 디테일 성분을 블러링시켜 오히려 화질을 열화시키는 한계를 드러내고 있다. 이러한 문제를 극복하기 위해, 메디언 필터 같은 비선형 알고리즘이 제안되었다. 특히, 메디언 필터는 라플라시안 분포를 갖는 잡음 환경 하에서 MLE인데, 임펄스 잡음에 비교적 강인한 것으로 알려져 있다. 그런데, 메디언 필터는 기본적으로 주변픽셀들 중의 하나를 출력하기 때문에 이미지 내에 가느다란 선이나 코너 등과 같은 부분에서는 왜곡을 피할 수 없다. 이를 해결하기 위하여 미리어드(myriad) 필터가 제안되었는데, 이는 코시분포(Cauchy distribution) 하에서 MLE로 알려져 있다[5][6]. 기본적으로 이미지에 가해진 잡음을 제거하기 위해서는 그 잡

음의 통계적 특성에 대한 사전지식이 필요하다. 이미지에 가우시안 잡음뿐만 아니라 임펄스 잡음 등이 혼재한 경우에 이러한 잡음에 대한 확률분포함수와 같은 통계적 특성을 명확히 정의하기는 쉽지 않다. Hamza와 Krim[3]은 이러한 잡음에 대한 확률분포를 가우시안 분포와 라플라시안 분포의 선형조합 또는 가우시안 분포와 코시분포의 선형조합으로 모델링하였다. 이에 근거하여 평균필터와 메디언 필터를 조합하거나 평균필터와 미리어드 필터를 조합하여 새로운 형태의 알고리즘을 제안하기도 하였다. 본 논문에서는 가우시안 잡음과 임펄스 잡음이 혼재한 경우의 확률분포를 다음과 같이 정의하였다. 즉, 잡음의 크기가 $(-\delta, \delta)$ 사이의 값을 가지면 가우시안 분포이나 그 밖의 영역에서는 라플라시안 분포를 갖는다고 가정하였다. 이는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$f(x) = \begin{cases} ce^{-\delta^2/2} e^{-\alpha\delta(x-\delta)} & x > \delta \\ ce^{-x^2/2} & -\delta \leq x \leq \delta \\ ce^{-\delta^2/2} e^{\alpha\delta(x+\delta)} & x < -\delta \end{cases} \quad (1)$$

여기서, 상수 c 는 확률분포함수 $f(x)$ 를 전 구간에 대하여 적분하였을 때 1이 되도록 정한다. 이와 같은 확률분포 하에서 MLE를 유도하고 이의 성능을 확인하였다. 또한, 유도한 필터를 미리어드 필터와 결합함으로써 보다 강인한 필터를 제안하고 이를 이론적으로 분석한 다음 실험을 통하여 그 성능을 확인하였다.

2. 장 잡음제거 알고리즘의 제안

일련의 랜덤변수 x_1, x_2, \dots, x_M 이 주어졌을 때, 이들이 iid(independent, identical distribution)이면서 각각 가우시안 분포를 갖게 되면 이들의 확률분포함수는 다음과 같이 주어지고,

$$p(x/\mu) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{M/2}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^M (x_i - \mu)^2/\sigma^2} \quad (2)$$

저자 소개

* 한희일: 韓國外國語大學校 情報通信工學科 教授 · 工博

이에 대한 MLE는 다음의 식 (3)에 나타난 바와 같이 평균필터이다.

$$\hat{\mu} = \operatorname{argmin} \sum_{i=1}^M (x_i - \mu)^2 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M x_i \quad (3)$$

즉, 가우시안 잡음 환경 하에서 신호를 추정하기 위한 MLE는 단순히 측정값들에 대한 평균값이다. 동일한 방법으로 랜덤변수가 라플라시안 분포를 갖게 되면 이들의 확률분포 함수는 식 (4)로 표현되고,

$$p(x/\eta) = \frac{1}{(2\sigma^2)^{M/2}} e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \sum_{i=1}^M |x_i - \eta|} \quad (4)$$

이의 MLE는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\hat{\eta} = \operatorname{argmin} \sum_{i=1}^M |x_i - \eta| \quad (5)$$

즉, MLE는 이들의 메디안 값과 동일하다. 그런데 가우시안 잡음에 임펄스 잡음이 첨가되면 이에 대한 확률분포함수를 정의하는 방법은 여러 가지가 있을 수 있으나, 본 논문에서는 랜덤변수가 $(-\delta, \delta)$ 사이에서는 가우시안 분포를 갖지만 그 밖의 영역에서는 라플라시안 분포를 갖는다고 정의하였다. 라플라시안 분포는 가우시안 분포 보다 heavy-tailed 하므로 임펄스 잡음의 양이 제한적이라는 가정 하에 위와 같은 혼합형태의 확률분포 함수는 적절한 모델이 될 수 있다. 이러한 확률분포 하에서의 MLE는 다음의 식 (6)과 같이 구할 수 있다.

$$\hat{\theta}_\delta = \operatorname{argmin} \left\{ \sum_{|x_i - \theta| \leq \delta} (x_i - \theta)^2 + \sum_{|x_i - \theta| > \delta} |x_i - \theta| \right\} \quad (6)$$

이는 다음과 같이 구현할 수 있다.

$$\hat{\theta}_\delta = \sum_{i=1}^M g(x_i) \quad (7)$$

여기서, $g(x)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$g(x) = \begin{cases} \delta & x > \delta \\ x & -\delta \leq x \leq \delta \\ -\delta & x < -\delta \end{cases} \quad (8)$$

이 필터는 outlier라고 판정된 잡음에 대하여 클리핑한 다음 평균을 취함으로써 출력값을 얻는다. 본 논문에서는 이 필터를 진폭제한 평균필터(amplitude-limited sample average filter: ALSAF)로 명명하였다. robust statistics의 관점에서 이 필터에 해당하는 error norm은 다음과 같이 구할 수 있는데[1],

$$\rho(x) = \begin{cases} x^2/2 & |x| \leq \delta \\ k|x| - k^2/2 & |x| > \delta \end{cases} \quad (9)$$

이는 Huber의 minimax norm과 일치한다[4]. 한편, 위의 랜덤변수가 코시 분포(Cauchy distribution)를 가질 때, 이의 MLE는 다음과 같이 구할 수 있는데

$$\hat{\beta}_k = \operatorname{argmin} \prod_{i=1}^M (k^2 + (x_i - \beta)^2) \quad (10)$$

이를 미리어드 필터라고 부른다. 이 필터는 선형화 파라미터인 k 에 따라서 그 특성이 결정된다. 예를 들어, k 가 작은 값을 가지면 임펄스 잡음을 제거하는데 효과적인 성능을 보이지만 k 가 무한히 증가함에 따라 $\hat{\beta}_k$ 는 평균필터의 출력 즉, 식 (3)의 $\hat{\mu}$ 에 수렴하게 된다[5]. 본 논문에서는 식 (11)에 제시한 바와 같이, $(-\delta, \delta)$ 밖의 영역에 있는 outlier에 대하여 식 (8)에 주어진 함수로 제한을 둔 다음, 이에 대하여 미리어드 필터를 적용하는 알고리즘을 제안하였다.

$$\hat{\gamma}_k = \operatorname{argmin} \prod_{i=1}^M (k^2 + (g(x_i) - \gamma)^2) \quad (11)$$

이 필터를 진폭제한 미리어드 필터(amplitude-limited myriad filter: ALMF)라고 명명하였다. 이 필터의 출력 $\hat{\gamma}_k$ 는 k 가 무한히 증가함에 따라 진폭제한 평균필터의 출력 즉, 식 (7)의 $\hat{\theta}_\delta$ 에 수렴하는 특성을 보여준다. 따라서, ALMF는 위에서 언급한 바와 같이 outlier에 강한 특성을 보여주어 미리어드 필터의 성능을 개선시킬 수 있다.

3. 장 실험 결과

Lena 이미지에 가우시안 잡음과 임펄스 잡음을 동시에 인가한 다음 이를 이용하여 본 알고리즘의 성능을 실험하였다. 즉, 가우시안 잡음으로 훼손된 이미지의 픽셀에 대하여 랜덤하게 임펄스로 대체하였다. 임펄스는 동일한 확률로 0 (검정) 또는 255 (흰색)의 값을 갖는다. 본 논문에서는 잡음의 레벨을 다양하게 변화시키면서 시뮬레이션을 수행하였다. 따라서, 본 논문에서 제안한 ALMF는 에지 부분에서의 선명도를 유지하면서 가우시안 잡음과 임펄스 잡음으로 열화된 이미지의 화질을 개선할 수 있다고 말할 수 있다.

본 알고리즘의 성능을 평가하기 위하여 평균자승오차(mean-square-error: MSE)와 PSNR(peak signal-to-noise ratio)를 이용하였다. 여기서, PSNR은 다음과 같이 정의된다.

$$PSNR = 20 \log_{10} \left(\frac{255}{\sigma_e} \right) \quad (12)$$

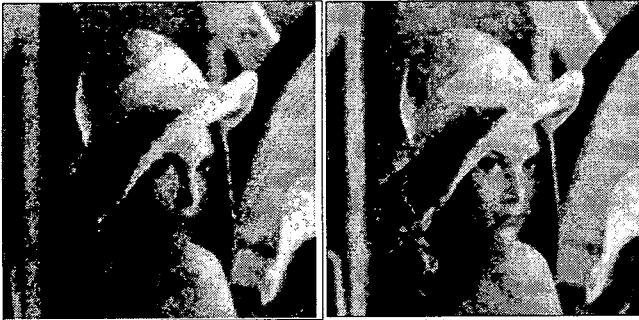
여기서, σ_e 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{1}{|\Omega|} \sum_{i \in \Omega} (x_i - \hat{x}_i)^2} \quad (13)$$

그림 1은 분산 $\sigma_n^2 = 924$ ($PSNR = 20dB$) 인 가우시안 잡음으로 열화된 Lena 이미지를 이용하여 시뮬레이션한 결과를 보여주고 있다. 본 논문에서 제안한 ALSAF와 ALMF는 Perona-Malik 비선형 확산 알고리즘에 비해 PSNR의 관점에서 큰 차이는 없지만 디테일 성분에 대한 보존 능력이 보다 더 우수함을 알 수 있다. 동일한 알고리즘에 대하여 분산 $\sigma_n^2 = 900$ 인 가우시안 잡음과 $p = 10\%$ 의 임펄스 잡음으로 열화된 이미지를 이용하여 시뮬레이션한 결과는 그림 2에 제시한 바와 같다. 이 그림에서 알



(a) (b)



(c) (d)

그림 1. (a) $\sigma_n^2 = 924$ ($PSNR = 20dB$)인 가우시안 잡음으로 열화된 이미지 (b) Perona-Malik 확산 알고리즘의 출력 이미지 $\sigma_n^2 = 153.3$ ($PSNR = 26.3dB$) (c) ALSAF의 출력 이미지 $\sigma_n^2 = 137.6$ ($PSNR = 26.8dB$) (d) ALMF의 출력 이미지 $\sigma_n^2 = 155.2$ ($PSNR = 26.2dB$)



(a) (b)



(c) (d)

그림 2. (a) $\sigma_n^2 = 900$ 인 가우시안 잡음과 $p = 10\%$ 의 임펄스 잡음으로 열화된 이미지 $\sigma_n^2 = 2059.3$ ($PSNR = 15.0dB$) (b) ALSAF의 출력 이미지 $\sigma_n^2 = 359.6$ ($PSNR = 22.6dB$) (c) 미리어드 필터의 출력 이미지 $\sigma_n^2 = 557.9$ ($PSNR = 20.67dB$) (d) ALMF의 출력 이미지 $\sigma_n^2 = 234.7$ ($PSNR = 24.42dB$)

수 있는 바와 같이 ALSAF는 가우시안 잡음에서는 우수한 성능을 보여주고 있으나 임펄스 잡음을 제거하는 데에는 효과적이지 못하다. 하지만, ALMF는 가우시안 잡음뿐만 아니라 임펄스 잡음에 대해서도 디테일 성분에 대한 왜곡 없이 잡음을 제거하는 능력을 보여주고 있다. 이를 확인하기 위해 α -stable 랜덤 잡음을 발생시켜 테스트 이미지에 가한 다음 위와 동일한 실험을 하였다. 실험결과, α 가 2에 수렴하면 즉, 가우시안 분포에 가까울수록 ALSAF가 ALMF에 비하여 우수한 성능을 보여주고 있다. 그러나 α 가 1에 접근함에 따라 즉, outlier의 양이 증가하여 코시 분포에 가까울수록 ALMF가 ALSAF보다 성능이 우수하였다.

4. 장 결론

가우시안 분포와 라플라시안 분포가 결합된 특별한 분포의 잡음 환경 하에서 efficacy를 최대화하는 최적의 필터(ALSAF)를 유도하였다. 이 필터는 적절한 edge stoping 함수를 선택하면 Perona-Malik 비선형 확산방정식[1][2]으로 구현될 수 있다. 그런데, 이 필터는 위의 잡음환경 하에서는 강인하지만 임펄스 잡음의 양이 증가함에 따라 눈에 거슬릴 정도로 얼룩져 보이는 문제를 노출시키고 있다. 이러한 한계를 극복하기 위하여 본 논문에서는 임펄스 잡음에 강인한 특성을 나타내는 미리어드 필터를 채택하여 이를 ALSAF와 결합함으로써 새로운 구조를 갖는 ALMF를 제안하였다. 실험을 통하여 이 필터는 가우시안 잡음뿐만 아니라 임펄스 잡음으로 열화된 이미지에 대하여도 디테일 성분에 대한 심각한 왜곡 없이 효과적으로 잡음을 제거할 수 있음을 확인하였다.

참고 문헌

- [1] M. J. Black, G. Sapiro, D. H. Marimont, "Robust Anisotropic Diffusion", *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 7, No. 3, Mar., 1998.
- [2] Pietro Perona and Jitendra Malik, "Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion," pp.629-639, *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol.12, No.7, July, 1990.
- [3] A. B. Hamza and H. Krim, "Image Denoising: A Nonlinear Robust Statistical Approach", pp. 3045-3054, *IEEE Trans. Signal Processing*, vol.49, No.12, Dec., 2001.
- [4] P. Huber, *Robust Statistics*. New York: Wiley, 1981.
- [5] J. G. Gonzalez and G. R. Arce, "Optimality of the Myriad Filter in Practical Impulsive-Noise Environments", pp. 438-441, *IEEE Trans. Signal Processing*, vol.49, No.12, Feb., 2001.
- [6] P. Zurbach, J. G. Gonzalez and G. R. Arce, "Weighted Myriad Filter for Image Processing", pp. 726-728, *ICIP1996*.