

불확실한 초기치를 갖는 반복시스템에 대한 유한구간 추종제어

최윤중, 윤성욱, 이창희, 조재영, 박부건
 포항공과대학교 전자전기공학과

Finite-horizon Tracking Control for Repetitive Systems with Uncertain Initial Condition

Yun Jong Choi, Sung Wook Yun, Chang Hee Lee, Jae Young Cho, PooGyeon Park
 Electrical and Computer Engineering Division, Pohang University of Science and Technology

Abstract - Repetitive systems stand for a kind of systems that perform a simple task on a fixed pattern repetitively and are widely spread in industrial fields. Hence, those systems have been of much interests by many researchers, especially in the field of iterative learning control (ILC).

In this paper, we propose a finite-horizon tracking control scheme for linear time-varying repetitive systems with uncertain initial conditions. The scheme is derived both analytically and numerically for state-feedback systems and only numerically for output-feedback systems. Then, it is extended to stable systems with input constraints. All numerical schemes are developed in the forms of linear matrix inequalities. A distinguished feature of the proposed scheme from the existing iterative learning control is that the scheme guarantees the tracking performance exactly even under uncertain initial conditions. The simulation results demonstrate the good performance of the proposed scheme.

1. 서 론

반복 시스템이란 고정된 형태의 단순한 일을 반복적으로 수행하는 시스템을 가리킨다. 이는 산업 여러 분야 (Robot manipulator, batch reactor, batch distillation, injection molding, semiconductor process and heating process) 에 많이 사용되고 있기 때문에 현장 엔지니어들에게 흥미로운 주제이다. 이런 시스템의 공통적인 특징들은 다음과 같다. 첫째, 반복 시스템과 관련된 제어문제들은 주로 서보 시스템과 연관이 있다. 둘째, 시스템 동작 중 시스템 파라메타들이 많이 변하기 때문에, 이 시스템이 비선형 상황에 있게 된다. 따라서 정확하게 시스템을 모델링하기가 쉽지 않다. 셋째, 이러한 시스템은 단순한 일을 반복적으로 수행하기 때문에, 오프라인 상에 있는 시스템으로 다룰 수 있다.

지난 20년 동안, 반복 시스템을 위한 추종제어 이론에 많은 노력이 기울어져왔다. 반복 학습 제어는 알려지지 않은 시스템 모델에 적용될 수 있기 때문에, 이는 강력한 추종제어 기술이다. 하지만 반복 학습 제어의 추종 성능 분석은 충분하지 않다. 또한, 반복 시스템 학습과정에서의 연속적인 시도 시, 초기치를 정확히 초기화해야한다. 그렇지 않을 경우 추종 성능을 보장할 수 없다.

지금까지의 추종 제어 연구는 무한 구간에 대해 무계가 실렸었고 또한 이것의 안정성 문제에 대해 다루었다. 하지만 실제 많은 응용분야는 유한 구간에서 다루어지고 있으며, 실제 산업 현장의 기술자들에게 성능 보장은 고려해야할 중요한 문제이다. 하지만 유한 구간에서의 성능 보장에 대한 연구는 많지 않은 실정이다. 따라서 본 논문에서 불확실한 초기치를 갖는 반복시스템의 유한구간 추종제어에 대해서 다루고자 한다.

본 논문은 다음과 같이 이루어져있다. 2장에서는 시스템 모델과 문제 정의에 대해 설명한다. 3장에서는 선형 행렬 부등식을 이용한 성능 보장에 대한 설명을 한다. 또한 상태 궤환과 출력 궤환에 대한 계산 방법과 입력이 제한된 상태에서의 시스템 제어 방법에 대해서 자세히 다룬다. 4장은 MATLAB 으로 한 실험 결과를, 5장에서는 결론과 앞으로 보완해야 할 내용에 대해 기술한다.

2. 문제의 정형화

다음과 같은 시변 반복 시스템을 고려해보자.

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_k x_k + B_k u_k \\ y_k &= C_k x_k \end{aligned} \quad (2.1)$$

위 식에서 k는 시간 인덱스를 나타낸다. 참조 경로 $y_0^T, y_1^T, \dots, y_n^T$ (reference trajectory)는 미리 주어져 있다. 여기서 몇 가지 가정을 하기로 한다.

(가정 1) 각각의 연속적인 동작은 유한한 시스템 $F(>0)$ 후에 끝이 난다.
 (가정 2) 초기 상태 값은 불확실하지만 ϵ 의 경계를 가진다.

$$\|x_0 - x_c\|_P \leq \epsilon$$

P는 가중치 행렬이고, diagonal 이다.

이 모델은 유한 구간이고 정확히 초기화될 수 없다. 이것은 다음과 같이 표현된다.

$$Y = Nx_0 + M$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} C_0 & & & & \\ & C_1 A_0 & & & \\ & & C_2 A_1 A_0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & C_n A_{n-1} \dots A_1 A_0 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} C_1 B_0 & & & & 0 \\ C_2 A_1 B_0 & & & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ C_n A_{n-1} \dots A_1 B_0 & C_n A_{n-1} \dots A_2 B_1 & \dots & C_n B_{n-1} \end{bmatrix}$$

그리고 여기서 문제 정형화를 다음과 같이 하기로 한다.

$$\min \|Y_r - Y\|^2 \leq \gamma \text{ subject to } \|x_0 - x_c\|_P \leq \epsilon \quad (2.2)$$

초기 상태 값이 ϵ 의 경계를 가질 때, γ 를 최소화 하는 제어 입력 u 를 찾는 것이 목적이다.

3. 성능 보장 유한구간 추종 제어

3.1 성능 한계의 분석적 전개

(2.2)를 S-procedure와 Schur complement 기법을 통하여 다음과 같은 선형 행렬 부등식을 만들 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \gamma - \pi^2 + \pi x_c^T P x_c & (*) & (*) \\ (Y_r - M) & I & -\pi x_c^T P \\ N^T (Y_r - M) - \tau P x_c & 0 & -N^T N + \tau P \end{bmatrix} \geq 0, \tau > 0$$

이것으로부터 다음을 유도할 수 있다.

$$\gamma \geq \pi^2 - \pi x_c^T P x_c + J(\bar{u}), J(\bar{u}) = [\Phi - \bar{\psi} \bar{u}]^T H [\Phi - \bar{\psi} \bar{u}] \quad (3.1)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} Y_r \\ N^T Y_r - \tau P x_c \end{bmatrix}, \bar{\psi} = \begin{bmatrix} I \\ N^T \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & (\tau P - N^T N)^{-1} \end{bmatrix}$$

$J(\bar{u})$ 를 최소화하기 위해 Weighted Least Squares 방법을 사용하여 아래와 같은 결과를 유도할 수 있다.

$$\bar{u}^* = M^* = (\bar{\psi}^T H \bar{\psi})^{-1} \bar{\psi}^T H \Phi = Y_r - N x_c$$

(3.1)에 대입하면

$$\begin{aligned} \gamma &\geq \pi^2 - \pi x_c^T P x_c + J(\bar{u}^*) \\ &= \pi^2 - \pi x_c^T P x_c + x_c^T [N^T N + (\tau P - N^T N)] x_c \\ &= \pi^2 \end{aligned}$$

또한 $J(\bar{u})$ 의 Hessian이 0보다 크다는 것을 이용하여

$\tau \geq \lambda_{\max}(NP^{-1}N^T)$ 임을 구할 수 있다. 따라서

$$\gamma_{\min} = \lambda_{\max}(NP^{-1}N^T)\epsilon^2 \quad (3.2)$$

를 구할 수 있다.

보조정리 3.1.1 선형 시변 이산시간 시스템에서, 행렬 M이 full row rank를 가진다면, 성능 경계 γ 를 최소화하는 입력 u^* 를 구할 수 있다.

정리 3.1.2 선형 시변 이산시간 시스템에서, 초기 상태가 ϵ 의 경계를 가진다면, 최대추종오류는 $\lambda_{\max}(NP^{-1}N^T)\epsilon^2$ 를 가진다.

3.2 $\lambda_{\max}(NP^{-1}N^T)$ 의 계산

만약 행렬 A가 안정화되어 있다면, $\lambda_{\max}(NP^{-1}N^T)$ 를 다음과 같이 구할 수 있다. $Q_p = C_p^T C_p$ 로 놓고,

$$Q_{n-1} = A_{n-1}^T Q_n A_{n-1} + C_{n-1}^T C_{n-1}$$

$$Q_0 = N^T N \text{을 얻을 수 있다. } P \text{는 대각행렬이므로}$$

$\gamma_{\min} = \lambda_{\max}(Q_0 P^{-1})\epsilon^2$ 이다. 만약 행렬 A가 안정화되어 있지 않다면 궤환 시스템을 이용한 안정화가 필요하다. 앞에서의 계산 방법을 선형 행렬 부등식 방법을 이용하여 다음과 같이 정형화 할 수 있다.

$$Q_{n-1} \geq A_{n-1}^T Q_n A_{n-1} + C_{n-1}^T C_{n-1} \text{ for all } n$$

또한 다음과 같은 선형행렬 부등식을 풀으로써 $\lambda_{\max}(Q_0)$ 를 최소화할 수 있다.

$$\min tr(Q_{n-1}) \text{ s.t.}$$

$$\begin{bmatrix} Q_{n-1} & (*) & (*) \\ \frac{1}{2} Q_n^T A_{n-1} & I & 0 \\ C_{n-1} & 0 & I \end{bmatrix} \geq 0$$

3.2.1 상태 귀환

상태 귀환 시 앞 단원에서 행렬 A_i 를 $A_i + B_i K_i$ 로 바꾸면 된다. 즉

$$Q_{n-1} = (A_{n-1} + B_{n-1} K_{n-1})^T Q_n (A_{n-1} + B_{n-1} K_{n-1}) + C_{n-1}^T C_{n-1}$$

$$\therefore K_{n-1} = -2(B_{n-1}^T Q_n B_{n-1})^{-1} B_{n-1}^T Q_n A_{n-1}$$

이다. 이것은 선형 행렬 부등식 방법으로 나타내면 다음과 같다.

$$\min tr(Q_{n-1}) \text{ s.t.}$$

$$\begin{bmatrix} Q_n & (*) & (*) \\ \frac{1}{2} Q_{n+1}^T (A_n + B_n K_n) & I & 0 \\ C_n & 0 & I \end{bmatrix} \geq 0$$

3.2.2 출력 귀환

실제 시스템에서 시스템의 상태를 알 수는 없다. 따라서 출력 귀환을 통한 관측기 설계를 통해 시스템을 제어하도록 한다. 관측기와 시스템을 이용하여 다음과 같은 시스템 모델을 세울 수 있다.

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_{k+1}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_k & 0 \\ B_k^c & C_k A_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ x_k^c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_k \\ 0 \end{bmatrix} u_k$$

$$y_k = \begin{bmatrix} C_k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ x_k^c \end{bmatrix}$$

입력을 다음과 같이 정의하면 전체 시스템은 다음과 같이 표현된다.

$$u_k = C_k^c x_k^c + D_k^c x_k$$

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_{k+1}^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_k + B_k D_k^c C_k & B_k C_k^c \\ B_k^c C_k & A_k^c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ x_k^c \end{bmatrix} = \bar{A}_k \begin{bmatrix} x_k \\ x_k^c \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_k = \bar{A}_k + \bar{B}_k \Sigma_k \bar{C}_k$$

초기 값을 $Q_P = \begin{bmatrix} C^T \\ 0 \end{bmatrix} [C \ 0]$ 로 두고 Σ_{n-1} 를 구하기 위한 선형 행렬 부등식 방법으로 나타내면 다음과 같다.

$$\min tr(Q_{n-1}) \text{ s.t.}$$

$$\begin{bmatrix} Q_n & (*) & (*) \\ \frac{1}{2} Q_{n+1}^T (\bar{A}_n + \bar{B}_n \Sigma_n \bar{C}_n) & I & 0 \\ \bar{C}_n & 0 & I \end{bmatrix} \geq 0$$

3.3 입력 제한 시스템

실제 시스템에서 입력에 제한이 있는 경우가 많다. 예를 들어 최대 전류량이나 로봇 팔이 움직일 수 있는 영역이 제한되는 등의 경우가 있다. 시스템이 안정화되어 있다고 가정하고 입력이 제한되어 있다고 했을 때 이 문제를 선형 행렬 부등식 방법으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \gamma - \pi^2 + \pi x_c^T P x_c & (Y_r - M)^T & (Y_r - M)^T N \\ (Y_r - M) & I & -\pi x_c^T P \\ N^T (Y_r - M) - \tau P x_c & 0 & 0 \\ & & -N^T N + \tau P \end{bmatrix} \geq 0,$$

$$\tau > 0, |u_k| < \delta, k \in [0 \ F]$$

4. 실험 결과

4.1 제한조건이 없는 입력 제어

실험 조건은 다음과 같다.

- 출력 귀환 제어를 사용한다.
- $P = I$
- $A = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.1 \\ 0.2 & -0.5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0]$

$$y_r(n) = \frac{1}{2} e^{\frac{n}{50}} \sin \frac{6n}{50}, \epsilon = 0.2$$

그림1에서 보는 바와 같이 초기 조건이 불확실함에도 불구하고 추종성능이 거의 완벽함을 볼 수 있다. 또한 $\gamma_{\min} = 0.04$ 임을 알 수 있다. 즉 시스템의 성능한계를 보장 할 수 있다.

4.2 제한조건이 있는 입력 제어

실험 조건은 다음과 같다.

- 출력 귀환 제어를 사용한다.
- $P = I$
- $A = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 \\ 0.2 & -0.5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0]$

$$y_r(n) = \frac{1}{2} e^{\frac{n}{50}} \sin \frac{6n}{50}, \epsilon = 0.2, |u| < 0.4$$

그림2의 83 시간 인덱스에서 입력의 한계 때문에 시스템 출력이 참조경로

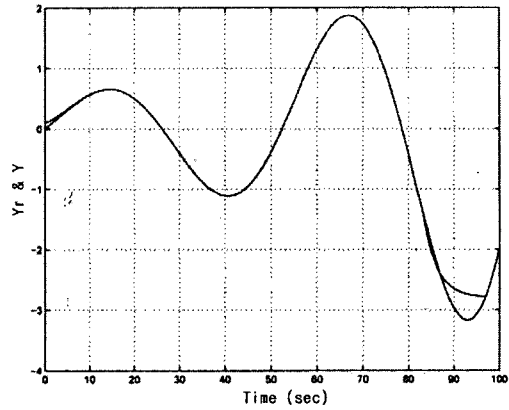


그림 2 참조 경로와 추종곡선 (입력 제한이 있는 경우)

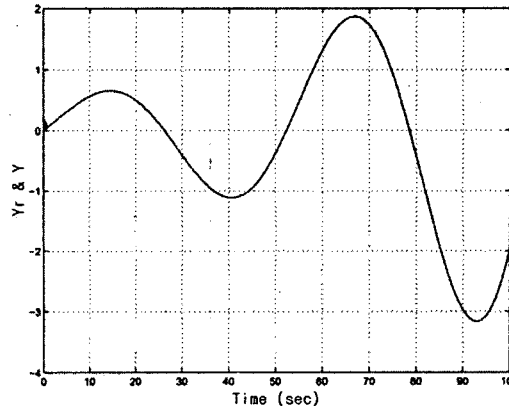


그림 1 참조 경로와 추종곡선 (입력 제한이 없는 경우)

는 못 따라가는 것을 볼 수 있다. 이때 $\gamma_{\min} = 1.08$ 임을 알 수 있다. 하지만 입력이 제한된 경우에도 시스템성능한계를 보장할 수 있다.

5. 결 론

본 논문에서, 초기치가 불확실하지만 경계를 가지는 유한 시간 시스템에 대해 추종 오류를 어디까지 보장 할 수 있는지에 대해 분석해 보았다. 그 결과 보통의 Linear Quadratic 추종 제어 기법에서는 어려운 출력 귀환 제어기를 여기서는 다루기 쉬움을 확인할 수 있었다. 또한 출력 귀환 성능 보장 문제에 있어서 선형행렬 부등식 방법이 유용하고 강력하다는 것도 알 수 있었다. 우리는 또한 입력이 제한된 경우에도 성능 한계가 보장됨을 볼 수 있었다. 하지만 입력이 제한된 경우 추종 성능에 한계가 있음을 볼 수 있었다. 앞으로 모델 불확실성에 대한 보안을 하면 반복 학습 제어 방식보다 더 강력한 기술이 될 수 있을 것이다.

감사의 글

본 연구는 정보통신연구진흥원 및 정보통신부의 대학 IT연구센터 육성·지원사업의 지원을 받고 있는 포항공과대학교의 OFDM 기반 광대역 이동 인터넷 연구센터 (BrOMA)에 의해 지원받았음(IITA-2007-C1090-0701-0037) 본 연구는 정보통신부 및 정보통신연구진흥원의 대학 IT연구센터 지원사업의 연구결과로 수행되었음(IITA-2007-C1090-0701-0004)

[참 고 문 헌]

- [1] Robert P. Roesser, "A Discrete State-Space Model for Linear Image Processing", *IEEE Trans. on Autom. Cont.*, Vol AC-20, No 1, 1975.
- [2] Jerzy E. Kurek, Marek B. Zaremba, "Iterative Learning Control Synthesis Based on 2-D System Theory", *IEEE Trans. on Autom. Cont.*, Vol 38, No 1, 1993.
- [3] Tae-Jeong Chang, Chong-Ho Choi, Hyun-Sik Ahn "Iterative Learning Control in Feedback Systems", *Automatica*, Vol 31, No 2, 1995
- [4] Yong Fang, Tommy W. S. Chow, "Iterative Learning Control of Linear Discrete-Time Multivariable Systems", *Automatica*, Vol 34, No 11, 1998
- [5] Tommy W. S. Chow, Yong Fang, "An Iterative Learning Control Method for Continuous-Time Systems Based on 2-D System Theory", *IEEE Trans. on Autom. Cont.* Vol 45, No 4, 1998
- [6] Samer S. Saab, "A Discrete-Time Learning Control Algorithm for a Class of Linear Time-Invariant Systems", *IEEE Trans. on Autom. Cont.*, Vol 40, No 6, 2002