

위상여유와 이득여유를 고려한 IMC-PID 제어기 설계

*임동균, **신현균, ***서병설

*한양사이버대학교 컴퓨터공학과, **한양대학교 전기공학과 석사, ***한양대학교 전기제어생체공학부 교수 (교신책임자)

The New IMC-PID Controller Design Method with Phase Margin and Gain Margin

*Dong-Kyun Lim, **Hyeon-Kyun Shin, ***Byung-Suhl Suh

*Dep. of Computer, Hanyang Cyber Univ., **Dep. of Electrical Eng., Graduate School, Hanyang Univ.,

***Div. of Electrical, Control and Biomedical Eng., Hanyang Univ.

Abstract - 본 논문에서는 주파수 응답특성의 해석을 통하여 제어기를 설계하는 방법을 제안하였다. 모델의 오차가 없다는 가정 하에 완벽 제어가 가능한 IMC-PID 구조를 사용함으로써 하나의 변수인 제어 조절 인자만으로 제어기를 설계하였다. 이 변수를 선정하는 방법으로는 위상여유와 이득여유를 고려한 방법을 수학적으로 유도하였다. 이는 설계자가 이미 알고 있는 일반적인 유도 식을 이용함으로써 설계를 보다 쉽게 할 수 있다. 이를 통하여 원하는 설계사양을 만족 시키도록 하는 IMC-PID 제어기의 설계 변수 값을 수학적으로 제시하고, 그 유용성을 사례 연구와 분석을 통해 검토하였다.

1. 서 론

제어기를 설계하는 방법에는 시스템을 바라보는 관점에 따라 여러 가지가 있다. 제어시스템을 시간영역에서 설계하는 방법, 주파수 영역에서 설계하는 방법, 이 둘을 혼합하여 설계하는 방법이 있다. 주파수 영역에서 제어 시스템을 설계할 경우, 개루프 시스템의 주파수 응답 특성인 이득여유와 위상여유를 알아봄으로써, 공진 최고값은 작게 하고 대역폭을 크게 하여 시간 영역에서의 overshoot 는 줄이고 정착시간을 줄임으로 응답을 빠르게 하는 제어시스템을 찾는 것이 바람직하다.[1][2][3] 이러한 관점에서 쉽게 제어기를 설계하기 위한 기법으로 IMC(Internal Model Controller) 제어기를 들 수 있다. IMC 기법의 개념은 1974년 독일의 엔지니어 Frank에 의해서 태동되어 Morari 와 Zafriou[4]에 의해 이론적 토대가 체계화 되었다. 주파수 영역에서의 필터함수의 설계는 설계자가 원하는 설계 규격을 주파수 영역에서 나타내고 페루프 전달함수가 이러한 특성을 갖도록 필터함수를 선정하는 방법이다.

이에 대한 연구로서 M. Morari 와 E. Zafriou 는 모델링 오차가 없다면 완전제어가 가능하다는 가정하에 IMC제어기를 플랜트의 최소 위상부분의 역으로 구성하고, 필터함수의 설계에는 강인-안정성(robust-stability), 강인성-성능(robust-performance)을 보장할 수 있도록 선정하였다. 그러나 실제 공정에서는 실제 플랜트를 완전히 추종할 수 없다. 그러므로 실제 플랜트와 최소한의 오차에 대한 강인성 사이의 성능-강인성을 갖게 하는 제어기의 설계 변수 값 선정이 IMC-PID 제어기의 중요한 설계 절차라 하겠다. 따라서 본 논문에서는 시스템 식별은 Suh-Lim[7]이 제안한 방법을 사용하여 모델링 오차를 줄였고, IMC-PID 제어기의 동조에 있어서는 주파수 영역에서의 해석적 방법을 적용하였다. 특히 IMC-PID 제어기의 장점으로 하나의 설계변수 T_F 를 선정하는데 있어, 설계 조건으로 주어지는 위상여유와 이득여유의 범위를 제한함으로써 시간영역에서의 성능도 고려한 제어기를 설계하였다.

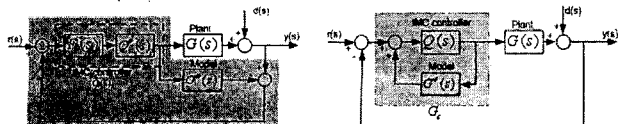
2. 본 론

2.1 주파수 영역에서 IMC-PID 제어기 특성

본 논문에서는 주파수 영역에서의 접근 방법으로 IMC 구조에서의 PID 제어기 설계 절차를 유도하였다. 일반적으로 주파수 응답에서의 위상 여유(phase margin)와 이득여유(gain margin)는 상대적 안정도(relative stability)를 질량적으로 표현해준다. 이 값을 토대로 유도된 식을 이용하여 IMC-PID 제어기 설계변수를 선정하는 방법을 제안하였다.

2.1.1 IMC-PID 설계

IMC 제어 구조에서 PID 제어기 설계 절차로 유도하기 위한 일반적인 IMC 구조는 그림1의 (a)와 같다. 여기서 제어시스템이 내부적으로 안정하다면 실제 플랜트 $G(s)$ 에 입력되는 입력과 출력은 그림1의 (b)와 같은 변형된 형태에 영향을 받지 않으므로 등가적으로 볼 수 있고 이것은 일반적인 페루프 제어시스템과 같은 형태이다.



<그림 1> (a) 일반적인 IMC 제어기 구조 (b) IMC 제어기 등가구조

여기서 공칭모델의 전달함수를 최소위상과 비최소 위상으로 분리될 수 있는데, 이렇게 분리된 플랜트의 모델은 식(1)과 같다.

$$G^o(s) = G_m^o \cdot G_{nm}^o = \frac{k_m}{\tau_m s + 1} \cdot e^{-d_m s} \quad (1)$$

일반적으로 제어기 Q 는 기준입력 r 로부터 출력 y 의 공칭페루프 전달함수를 설계자가 원하는 형태가 되고, 공칭모델의 최소위상부분을 보상할 수 있도록 식(2)와 같이 설정한다.

$$Q(s) = \frac{F(s)}{G_m^o(s)} = \frac{\tau_m s + 1}{k_m} \cdot \frac{1}{T_F s + 1} \quad (2)$$

이 때 IMC 제어 구조를 일반적인 제어기 형태인 G_c 로 나타내면 그림1의 (b)로부터 식(3)과 같이 나타낼 수 있다. 이 때 비최소 위상 항인 시간지연은 1차 패데 근사한다.

$$G_c(s) = \frac{Q(s)}{1 - G^o(s)Q(s)} = \frac{1}{k_m(d_m + T_F)s} \cdot \frac{(\tau_m s + 1)(0.5d_m s + 1)}{\frac{T_F d_m}{2(T_F + d_m)}s + 1} \quad (3)$$

이를 일반적인 PID 제어기의 전달함수 식(4)와 비교하여 나타내면,

$$G = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{1 + T_d s/N} \right) \quad (4)$$

각각의 PID 제어기 변수를 유도 할 수 있다.

$$K_p = \frac{T_i}{k_m(d_m + T_F)} \quad (5)$$

$$T_i = \tau_m + \frac{d_m}{2} - \frac{T_F d_m}{2(T_F + d_m)} \quad (6)$$

$$T_d = \frac{\tau_m d_m}{2T_i} - \frac{T_F d_m}{2(T_F + d_m)} \quad (7)$$

$$N = \frac{2T_i(T_F + d_m)}{T_F d_m} \quad (8)$$

위 식으로부터 IMC-PID 제어기를 결정짓는 설계변수는 T_F 임을 알 수 있고, 적당한 T_F 를 선정하면 IMC-PID 제어기가 설계되는 것이다.

Morari 와 Zafriou[4] 는 설계변수 T_F 를 선정하는 조직적인 방법을 제시하지 못하고 단지 $T_F = 0.25d_m$ 을 제시하였다. 반면에 Maffezzoni-Rocco[5]는 T_F 를 선정하기 위해 IMC 구조의 내부안정성이 보장되면서 H_∞ 제어기법을 이용하여 안정-강인성과 성능-강인성을 보장하고자 했다. 그러나 실제 모델링 오차를 개선할 수는 없었고 모델링 오차가 없다는 가정하에서 제안된 IMC 구조에서는 좋은 결과를 얻을 수 없었다. 또한 응답시간이 길어지는 것과 가중치 함수를 구해야 한다는 단점이 있었다. 이를 개선하기 위해 주파수 응답에서의 위상여유와 이득여유의 특성을 이용하여 IMC-PID 제어기의 설계변수 T_F 를 선정하는 방법을 제안한다.

2.1.2 위상여유와 이득여유를 고려한 방법

주파수 응답에서 위상여유(PM)와 이득여유(GM)의 가장 큰 특징으로는 시스템의 성능과 안정도 두 가지를 어느 정도 만족시키도록 하는 상충되는 값을 나타낸다. 일반적으로 PM 과 GM이 큰 값 일수록 페루프 응답의 성능은 느려지고 작은 값 일수록 응답이 빨라지고, 더 크게 진동한다. 이와 같은 특징을 갖고 PM과 GM의 값을 만족시키는 설계변수 T_F 를 선정하는 것이 주파수 응답특성을 이용한 제어기 파라미터 동조방법이다.

먼저 오차가 없다는 가정하에 모델의 시간지연을 패데근사한 전달함수를 이용하여 PM과 GM을 일반적인 수학적식으로 유도함으로써 수행성과 안정도-성능을 절충할 수 있는 T_F 값을 선정한다.

실제 플랜트를 시간지연을 가진 1차모델(FOPDT)로 식별하여 패데근사한 전달함수 $\tilde{G}(s)$ 와 IMC-PID 제어기 전달함수 $G_c(s)$ 를 직렬 연결했을 때 시스템의 개루프 전달함수를 나타내면 식(9)와 같다.

$$L(s) = G_c(s)\tilde{G}(s) = \frac{-0.5d_m s + 1}{0.5d_m T_F s^2 + (d_m + T_F)s} \quad (9)$$

식(9)를 이용하여 일반적인 GM과 PM을 구하는 식으로 유도하면 다음과 같이 정리할 수 있다.

[정리1] IMC-PID에서 위상교차주파수 ω_p 와 GM은 다음과 같다.

$$\omega_p = \frac{2\sqrt{d_m T_F + T_F^2}}{d_m T_F} \quad (10)$$

$$GM = \sqrt{\frac{(-d_m T_F \omega_p^2)^2 + (2(d_m + T_F)\omega_p)^2}{4 + d_m^2 \omega_p^2}} \quad (11)$$

[증명1] 개루프 전달함수에서 ω_p 는 위상각이 180°인 주파수이므로 식(12)

$$-\arctan\left(\frac{d_m \omega_p}{2}\right) - \arctan\left(\frac{d_m T_F \omega_p}{2(d_m + T_F)}\right) - 90^\circ = -180^\circ \quad (12)$$

에서 양변을 tan로 정리하면 식(13)이 된다. 이 식이 성립하기 위해 분모는

$$\left\{\left(\frac{d_m \omega_p}{2}\right) + \left(\frac{d_m T_F \omega_p}{2(d_m + T_F)}\right)\right\} / \left\{1 - \left(\frac{d_m \omega_p}{2}\right)\left(\frac{d_m T_F \omega_p}{2(d_m + T_F)}\right)\right\} = \infty \quad (13)$$

0이 되어야 하므로 이를 만족하는 ω_p 를 찾으면 식(14)로 나타낼 수 있다.

$$\omega_p = \frac{2\sqrt{d_m + T_F}}{d_m \sqrt{T_F}} = \frac{2\sqrt{d_m T_F + T_F^2}}{d_m T_F} \quad (14)$$

여기서 이득여유 GM은 $GM = |L(j\omega_p)|^{-1}$ 이므로 GM을 구하면 다음과 같다.

$$GM = \left| \frac{-0.5d_m T_F \omega_p^2 + j(d_m + T_F)\omega_p}{-j0.5d_m \omega_p + 1} \right| \quad (15)$$

이 때 설계사양으로 주어지는 GM을 만족하는 T_F 를 찾기 위해 식(15)에 식(14)를 대입하여 T_F 에 관해 정리하면 T_F 에 관한 4차 방정식으로 정리된다.

$$8T_F^4 + 20d_m T_F^3 + (16 - 2GM^2)d_m^2 T_F^2 + (4 - GM^2)d_m^3 T_F = 0 \quad (16)$$

Q.E.D

식(16)을 이용하여 설계사양으로 주어진 GM에 해당하는 T_F 를 선정한다. (단, $T_F \geq 0$, $T_F \in \mathbb{R}$)

[정리2] IMC-PID에서 이득교차주파수 ω_c 와 PM은 다음과 같다.

$$\omega_c = \sqrt{\frac{-4(d_m + T_F)^2 - d_m^2 + \sqrt{4(d_m + T_F)^2 - d_m^2 + 16d_m^2 T_F^2}}{2d_m^2 T_F^2}} \quad (17)$$

$$PM = 180^\circ + \left[\arctan\left(\frac{-d_m \omega_c}{2}\right) - \arctan\left(\frac{2(d_m + T_F)}{-d_m T_F \omega_c}\right) \right] \times \frac{180^\circ}{\pi} \quad (18)$$

[증명2] 식(9)에서 $G_c(j\omega_c)\tilde{G}(j\omega_c) = 1$ 인 ω_c 는 식(17)을 만족하고, 이를 ω_c 에 대해 정리할 수 있다.

$$|L(j\omega_c)| = \left| \frac{-0.5jd_m \omega_c + 1}{-0.5d_m T_F \omega_c^2 + j(d_m + T_F)\omega_c} \right| = 1 \quad (19)$$

$$d_m^2 T_F^2 \omega_c^4 + 4(d_m + T_F)^2 - d_m^2 \omega_c^2 - 4 = 0 \quad (20)$$

Q.E.D

식(20)을 ω_c 에 대해 정리하면 식(17)과 같이 되고, $PM = 180^\circ + \angle L(j\omega_c)$ 이므로 이를 정리하면 식(18)과 같이 된다.

2.2 새로운 방법에 대한 실험

비교적 큰 지연시간을 갖는 시스템을 실험함으로써 실제 공정에서 발생할 수 있는 조건들을 고려한 제어를 설계하였다. 특히 새로운 방법에 대한 우수성을 입증하기 위하여 비교대상이 되어 온 대표적인 시스템을 선정하였다.

$$G_p(s) = \frac{e^{-3s}}{(s+1)^2(2s+1)} \quad (21)$$

본 논문에서는 Suh-Lim[7] 방법으로 시스템 추정모델을 구하였다. ($k_m = 1.0$, $\tau_m = 1.54$, $d_m = 4.93$)

이미 이전에 주파수영역에서 설계되었던 논문들의 결과들을 토대로 시스템 성능을 향상시킬 수 있는 PM과 GM의 범위를 가정하였다. ($3.5 \leq GM \leq 4.0$, $67^\circ \leq PM \leq 69^\circ$)

정확한 T_F 값을 찾기 위해 GM의 값을 3.8로 하였을 때 $T_F = 4.437$ 이 선정되었다. 이렇게 선정된 T_F 값을 앞에서 유도된 IMC-PID 제어기 변수 식에 대입하여 전체 시스템의 응답성을 알아보았다. 본 논문에서 제안된 방법의 우수성을 입증하기 위해 Morari-Zafriou[4], Maffezzoni-Rocco[5], Ziegler-Nichols[6]가 각각 제안한 방법의 성능을 시간영역과 주파수영역에서 비교하였다.

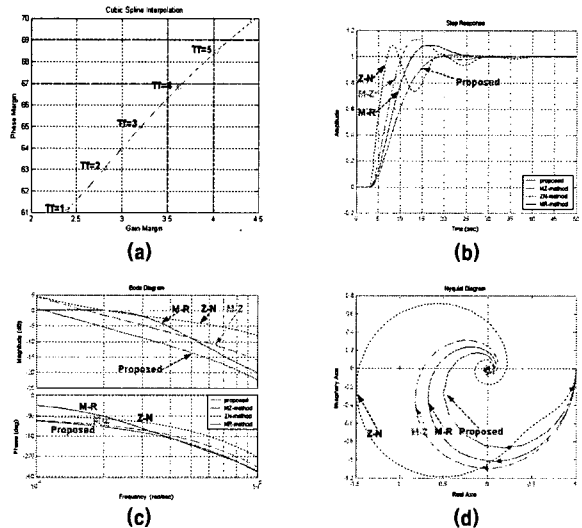
〈표 1〉 시간영역의 성능 비교

성능지수	Overhoot(%)	Rising Time(s)	Settling Time(s)
Proposed	1.14	9.33	17.5

M-Z	13.00	4.91	25.3
M-R	8.65	6.43	23.2
Z-N	9.41	2.76	27.1

〈표 2〉 주파수영역의 성능 비교

동조방법	성능지수	Gain Margin (dimensionless)	Phase Margin(°)
Proposed		3.351	64.240
M-Z		2.354	56.002
M-R		2.705	58.162
Z-N		1.682	77.089



〈그림 2〉 (a) 이득여유에 따른 위상여유 (b) 시간영역에서의 응답비교 (c) 주파수영역에서의 응답비교 (d) 각 방법에 따른 Nyquist

3. 결 론

제어기를 설계하는데 있어 주파수응답 특성인 위상여유와 이득여유의 값을 이용하였다. 이는 이미 알고 있듯이 강인성과 안정성 모두를 고려할 수 있다. 또한 일반적으로 식이 유도되어 있어 설계자가 원하는 제어기를 빠르고 쉽게 찾을 수 있다는 장점 때문에 제어기 설계방법으로 많이 이용되었다.

이러한 장점을 이용하여 본 논문에서는 내부 안정성(internal stability)이 보장되며 설계변수가 한 개라는 편리성을 가진 IMC 구조의 PID 제어기 설계 방법을 제안하였다. 설계변수를 선정하는데 있어 위상여유와 이득여유를 이용하여 시스템의 성능과 강인성 모두를 만족하는 설계변수를 찾는 방법을 제시하였다는 데 그 의의가 있다. 이렇게 함으로써 IMC-PID 제어기 변수들의 자동조절이 가능하고, 주파수 영역에서의 특성을 향상시킬 수 있다는 장점이 있다.

〈참 고 문 헌〉

- Q.G.Wang, H.W.Fung, and Y.Zhang, "PID tuning with exact gain and phase margins", ISA Transactions, Vol.38, No.3, pp.243-249, 1999.
- W.K.Ho, T.H.Lee, H.P.Han, and Y.Hong, "Self-Tuning IMC-PID Control with Interval Gain and Phase Margins Assignment", IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol.9, No.3, May 2001.
- D.E.Seborg, T.F.Edgar, and D.A.Mellichamp, "Process Dynamics and Control", John Wiley & Sons, 2004.
- M.Morari and E.Zafriou, "Robust Process Control", PrenticeHall, Englewood Cliffs, NJ: 1989.
- C.Maffezzoni and P.Rocco, "Robust Tuning of PID Regulators Based on Step-Response Identification", European Journal of Control, Vol.4, No.2, pp.125-136, Mar 1997.
- J.G.Ziegler and N.B.Nichols, "Optimum Settings for Automatic Controllers", Trans. ASME, Vol.64, pp.759-768, 1942.
- B.S.Suh and D.K.Lim, "New PID identification algorithm based on frequency scaling", Proceedings of the 40th Midwest Symposium on Circuits and Systems, Vol. No.1, pp.654-658, 1998.