선형시스템에서 complex NMP zero와 undershoot의 관계

김태규, 심형보, 서진헌, 백주훈
서울대학교 공과대학 전기컴퓨터공학부

On Undershoot at Linear System containing Complex Nonminimun Phase Zeros

Taekyoo Kim, Hyung Shim, Jin-Heon Seo, Juhoon Back
ASRI, School of Electrical Engineering and Computer Science, Seoul National Univ.

Abstract - 본 논문에서는 선형 비최소위상(NMP, Nonminimum Phase) 시스템에서 특정 조건을 만족하는 복소수 NMP 영점을 가진 시스템에서 언더슈트가 발생함을 보이고자 한다. 먼저 중복 실수 NMP 영점을 갖는 시스템에서의 언더슈트의 크기를 추정한다. 이를 바탕으로 복소수 NMP 영점을 가진 시스템을 중복 실수 NMP 영점을 갖는 시스템과 나머지 시스템의 합으로 보고 언더슈트가 발생하는 복소수 NMP 영점의 범위를 구한다. 최종적으로 복소수 NMP 영점의 복소수 항이 특정 제시되는 값보다 작을 때 언더슈트가 발생함을 보인다.

1. 서 론

본 논문은 복소수 비최소위상(NMP, Nonminimum phase) 영점을 갖는 안정한 선형 연속 시스템에서 언더슈트를 보장하는 복소수 NMP영점의 범위에 대한 내용을 다루고 있다. NMP영점은 실수 항이 양수인 영점을 의미하며 NMP시스템이란 NMP영점을 갖고 있는 시스템을 지칭한다. NMP시스템은 Minimum phase 시스템에 비해 특별한 성질을 갖고 있을 수 있는데, [1-2]에 잘 소개되어 있다. 특히 [3]에서 알 수 있듯이 초기값이 원점일 때 실수 NMP 영점이 시스템의 언더슈트를 유발한다는 사실은 NMP 시스템의 대표적인 특성이다. 또한 [4]에서는 시스템이 서로 다른 두 개의 NMP영점을 가질 때는 언더슈트의 크기가 1개 일 때 보다 커진다는 특성을 밝혀냈고, 안정시간이 짧아지면 오버슈트 또한 일어난다는 사실 역시 이미 [5]에서 밝혀진 바 있다. 그러나 앞서 언급한 연구결과들은 모두 실수 NMP영점에 대해 한정되어 있다.

본 논문의 목적은 NMP영점을 복소수 영역으로 확장시켜서 특정 조건을 만족하는 복소수 NMP 영점을 가진 시스템에서도 언더슈트가 발생함을 보이는 것이다. 그 과정으로 시스템이 중복 실수 NMP 영점을 가지면 NMP영점이 1개 일 때 보다 오버슈트의 크기가 더 커진다는 사실을 보인다. 이를 바탕으로 복소수 NMP영점을 가질 때도 복소수 NMP영점이 특정 범위에 있을 때 시스템이 언더슈트를 가진다는 사실에 대해 논의한다.

본 논문에서 다루게 될 용어들의 구체적인 정의는 다음과 같다.

0언더슈트y_{us} : $y(t)\geq -y_{us}$를 만족하는 가장 큰 양수로서 y_{us}가 양수이면 시스템이 언더슈트를 갖는다고 표현한다.

0정상상태출력$y_\infty>0$: $\lim_{t\to\infty} y(t)=y_\infty$, if $exists$.

0안정시간t_s : t_s이후의 모든 시간에 대해 $|y(t)-y_\infty|\leq 0.02y_\infty$를 만족하는 가장 작은 시간

2. 본 론

2.1 문제정의

이 논문에서는 strictly proper 전달함수를 갖는 안정한 선형 연속 단일입출력 시스템이 초기값으로 원점을 가질 때 단위계단입력에 대한 출력의 특성을 논의한다. 구체적인 시스템은 다음과 같다.

전달함수

$$TF(s)=((z-s)^2+w^2)G(s) - \qquad -(1)$$

단, $z>0, w>o$.

단위 계단 입력

$$u(t)=\begin{cases}1 & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

2.2 복소수 NMP 영점과 언더슈트

보조정리 1 - 만약 시스템의 전달함수가 $s=z(z\in R, z>0)$에서 중복된 영점을 갖는다면, 시스템은 언더슈트를 갖게 되고, 언더슈트의 크기는 $s=z$에서 1개의 영점을 갖는 시스템의 언더슈트의 크기와 같거나 더 크다.

증명 : $Y(s)=G(s)(1-\frac{s}{z})$라 두자. 가정에 의해 $G(s)$역시 $s=z$에서 NMP 영점을 갖는다. $G(s)$의 역 라플라스(Laplace) 변환을 $g(t)$라 두면, [3]에 의해서 $g(t)$은 언더슈트를 가진다.

$-g_{us}=\inf_{t>0} g(t)$ 라 할 때 $g(t^*)=-g_{us}$라 두자. $g_\infty>0$에 의해서 다음이 성립한다.

$$\frac{dg}{dt}(t^*)=0 \quad \frac{d^2g}{dt^2}(t^*)\geq 0$$

라플라스 변환의 정리를 이용하면 다음이 성립한다.

$$y(t^*)=g(t^*)-\frac{1}{z}\frac{dg}{dt}(t^*)=-g_{us}$$

$$\frac{dy}{dt}(t^*)=\frac{dg}{dt}(t^*)-\frac{1}{z}\frac{d^2g}{dt^2}(t^*)\leq 0$$

따라서 다음 조건을 만족시키는 t^{**}가 존재한다.

$y(t^{**})<y(t^*)=-g_{us}$ ∎

보조정리 2 - 만약 시스템의 전달함수가 $s=z(z\in R, z>0)$에서 중복된 영점을 갖는다면, 시스템은 언더슈트를 갖게 되고, 그 크기는 아래와 같은 조건을 만족한다.

$$\frac{y_{us}}{y_\infty}\geq\frac{e^{-zt_s}+zt_se^{-zt_s}}{1-e^{-zt_s}-zt_se^{-zt_s}}\cdot 0.98 \qquad -(2)$$

증명 : [3]의 결과에 따라 언더슈트가 발생한다.

출력을 y라 두자.

$Y(s)=(z-s)^2G(s)$

이 때 양 변을 s에 대해 미분해보자.

$\frac{dY}{ds}=(z-s)H(s)$

이 때 $G(s)$의 극점이 음수이므로 $H(s)$의 극점도 음수가 되고, z는 양수이므로 s=z에서 $\frac{dY}{ds}$이 수렴하고, $\frac{dY}{ds}(z)=0$ 이 된다. 라플라스 변환의 특성에 의해서 다음이 성립한다.

$$0=-\frac{dY}{ds}(z)=\int_0^\infty y(t)te^{-zt}dt$$

안정시간을 t_s라 두면,

$$\int_{t_s}^\infty y(t)te^{-zt}dt=-\int_0^{t_s}y(t)te^{-zt}dt\leq y_{us}\int_0^{t_s}te^{-zt}dt$$

$$=y_{us}\frac{1-e^{-zt_s}-zt_se^{-zt_s}}{z^2}$$

$$\int_{t_s}^{\infty} y(t)te^{-zt}dt \ge \int_{t_s}^{\infty} 0.98y_\infty te^{-zt}dt$$
$$= \frac{e^{-zt_s}+zt_se^{-zt_s}}{z^2}0.98y_\infty \qquad \blacksquare$$

주 1. [4]에서는 서로 다른 두개의 실수 NMP영점을 이용해 중복된 실수 NMP영점을 가질 경우 언더슈트가 더 커질 것이라고 추정했다. 본 논문에서는 이를 증명하고 있다.

정리 1 - 전달 함수가 $s=z\pm iw(z>0)$(i는 허수단위)에서 영점을 갖는 초기값이 원점인 NMP 시스템 $H(s)=K(s)((s-z)^2+w^2)$을 생각하자. 이 때 단위계단입력에 대한 $K(s)$의 출력을 ξ라 하고, $K(s)(s-z)^2$의 출력을 ζ라 하자. 만약 w가 다음 부등식을 만족한다면 시스템은 언더슈트를 갖는다.

$$w \le \sqrt{\frac{e^{-zt_{s\zeta}}+zt_se^{-zt_{s\zeta}}}{1-e^{-zt_{s\zeta}}-zt_se^{-zt_{s\zeta}}}\cdot\frac{0.98z^2K(0)}{M}}$$

$t_{s\zeta}$: *settling time of* ζ , $M:=\sup_{t\ge 0}\xi$.

증명 : 단위계단입력에 대한 시스템 $H(s)=K(s)((s-z)^2+w^2)$의 출력을 $y(t)$ 라 하자. 그러면 각 출력의 관계는 다음과 같다.
$y(t)=\zeta(t)+w^2\cdot\xi(t)$
보조정리 1에 의해서 ζ에서 언더슈트가 발생하고, 그 시간을 t^*라 두면 다음 식이 성립한다.
$\zeta(t^*)=-\zeta_{us}$
이제 w가 위의 부등식을 만족할 때 $y(t^*)$는 다음과 같다.

$$w^2\xi(t^*)<w^2\sup\xi<0.98z^2K(0)\frac{e^{-zt_{s\zeta}}+zt_se^{-zt_{s\zeta}}}{1-e^{-zt_{s\zeta}}-zt_se^{-zt_{s\zeta}}}$$

$$0.98z^2k(0)\frac{e^{-zt_{s\zeta}}+zt_se^{-zt_{s\zeta}}}{1-e^{-zt_{s\zeta}}-zt_se^{-zt_{s\zeta}}}\le\zeta_{us}=-\zeta(t^*)$$

$$y(t^*)=\zeta(t^*)+w^2\xi(t^*)<0 \qquad \blacksquare$$

참고[6]
$\dot{x}=Ax+Bu$
$y=Cx$ 를 생각하자.A 의 가장 느린 고유값을 λ라 하고 λ의 multiplicity 는 1임을 가정하자. 시스템의 정상상태를 x_f라 두고 λ를 첫 번째 원소로 하는 A의 Jordan 행렬을 $J=blockdiag(\lambda,\cdots)$라 하면 $M^{-1}AM=J$를 만족하는 행렬 M이 존재한다. $c_1:=1st\ elment\ of M^{-1}C$, $z_0:=1st\ elemnt\ of M^{-1}x_f$ 로 정의하면 다음이 성립한다.

$Ts=\frac{1}{\sigma}\log(\frac{d}{|c_1||z_0|})$ $\sigma:=Re(\lambda)$라 두면,

임의의 양수 ε에 대해 d_0보다 작은 모든 d에 대해 $t\ge Ts$이면 $|y(t)|\le d(1+\varepsilon)$를 만족하는 양수 d_0가 존재한다.

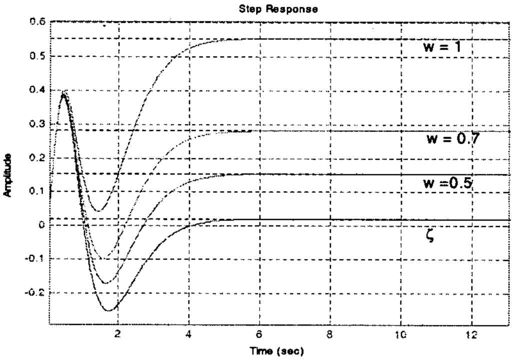
주 2. 참고를 이용하면 보조정리 2의 언더슈트의 범위를 계산할 수 있다. 나아가 M에 대한 정보가 있다면 w의 범위도 계산가능하다.

2.3 시뮬레이션

본문의 정리에서 제안된 내용에 대한 예를 보이기 위하여 다음 시스템을 고려하자.

$$H(s)=\frac{(s+20)((s-0.2)^2+w^2)}{(s+2)(s+2.5)^2(s+3)}$$

d=0.01 로 정하고 참고에서 제시된 방법을 이용하면 $t_{s\zeta}=4.8$ 을 얻을 수 있다. 또 $\xi(t)$를 고려하면 $M=0.533$ 이 됨을 알 수 있다. 이 두 값을 이용해서 보조정리 2에 제시된 방법으로 언더슈트의 크기를 구하면 $\zeta_{us}=0.061$과 같이 결과가 나온다. [5]에서 제시된 방법으로 계산을 했을 때의 값인 0.013과 비교했을 때 더 정확한 값임을 알 수 있다. 위의 값들을 이용해서 정리 1에 제시된 w의 범위를 구하면 $w\le 0.115$ 일 때 언더슈트가 생긴다는 사실을 알 수 있는데 이는 아래의 그림 1에서 확인할 수 있다.



<그림 1> w에 따른 단위계단입력에 대한 출력

그림 1에서는 $w\le 0.115$ 일 때 언더슈트가 생긴다는 것을 보여주며 나아가 $w=0.7$ 까지도 언더슈트가 발생한다는 사실을 보여준다. 뿐만 아니라 $w=1$이 될 때는 더 이상 언더슈트가 발생하지 않는다는 사실도 그림 1에서 알 수 있다. 따라서 일반적으로 w의 특정 범위 안에서 언더슈트가 발생함을 알 수 있다.

3. 결 론

본 논문에서는 복소수 비최소위상(NMP, Nonminimum phase) 영점을 갖는 안정한 선형 연속 시스템에서의 언더슈트에 대해 다루었다. 중복된 실수 NMP영점을 갖는 시스템에서 언더슈트가 발생하며 그 크기를 추정해 보았다. 이를 복소수 NMP영점을 갖는 시스템에 적용해서 복소수 NMP영점을 $s=z\pm iw(z>0)$라 둘 때 w가 특정 범위 안에 있다면 시스템은 언더슈트를 갖게 됨을 보였다.

[참 고 문 헌]

[1]M. M. Seron, J. H. Braslavsky, and G. C. Goodwin, *Fundamental Limitations in Filtering and Control.* London, U.K.: Springer-Verlag,1997.

[2]J. B. Hoagg, and D. S. Bernstein, "Nonminimum-phase zeros - much to do about nothing - classical control - revisited part II", *IEEE Control System Magazine.* 27(3), pp. 45-57, 2007.

[3]R. M. Middleton, "Trade-offs in linear control system design", *Automatica,* 27(2), pp. 281-292, 1991.

[4]K. Lau, R. H. Middleton, and J. H. Braslavsky. "Undershoot and sttling time tradeoffs for nonminimum phase systems", *IEEE Transactions of Automatic Control,* 48(8) pp. 1389-1393, 2003.

[5]James Stewart and Daniel E. Davison, "On Overshoot and Nonminimum Phase Zeros", *IEEE Transactions of Automatic Control,* 15(8), pp. 1378-1382, 2006.

[6]S. Tokel Glad, "Computing The Settling Time for Nonlinear Step Responses", In Preprints, *7th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems, NOLCOS 2007,* pp. 427-730, Pretoria, South Africa, Aug 2007.