시간 지연 선형 파라메타 변형 시스템의 안정화 조건에 관한 연구

정창기, 강병훈, 고정완, 박부견
포항공과대학교 전자전기공학과 (TEL: 054-279-5588, E-mail: {remote, anbabo, hrp26, ppg}@postech.ac.kr)

Stability conditions for Time-delayed LPV systems

Changki Jeong, Byunghoon Kang, Jeong Wan Ko, PooGyeon Park
Department of Electronic and Electrical Engineering, Pohang University of Science and Technology
(TEL: 054-279-5588, E-mail: {remote, anbabo, hrp26, ppg}@postech.ac.kr)

Abstract - In this paper, a delay-dependent stability criterion for time-delayed linear parameter varying (LPV) systems is considered. Stability criterion has been developed on the basis of including $x(t)$, $x(t-h)$ and $\dot{x}(t)$ and introducing free variables to eliminate model dynamics. Since the resultant criterion is formed parameterized linear matrix inequalities (PLMIs), we propose a relaxation technique that allows to find an LMI formulation. Examples demonstrate the efficiency of the criterion over the existing results.

1. 서 론

시간 지연 현상은 수동 제어, 신경망, 분산 네트워크 등의 다양한 산업 시스템에서 발생한다. 이러한 시간 지연 현상은 불안정을 야기하거나 시스템의 성능을 떨어뜨린다. 때문에 과거부터 시간 지연 시스템의 안정화 분석이나 제어기 설계와 관련한 문제들이 대두되어 왔다 [1]-[3]. 시간 지연 크기의 의존도에 따라서 시간 지연에 독립적은 안정화 기준과 시간 지연에 의존적인 안정화 기준으로 나눌 수 있다. 시간 지연에 의존적인 안정화 기준은 시간 지연의 크기가 작을 경우, 그 결과가 시간 지연에 독립적인 안정화 기준보다 훨씬 더 넓은 범위를 가진다 [4]-[7].

최근에는 선형 파라메타 변형 시스템에 대한 관심과 많은 중요한 결과들이 발표되었다 [6]-[7]. 하지만 대부분의 결과들은 시간 지연에 독립적인 분석 및 제어에 관한 것들이고, 시간 지연에 의존적인 결과들은 거의 없다.

본 논문에서는 Lyapunov-Krasovskii 함수를 이용하여 시간 지연 선형 파라메타 변형 시스템의 시간 지연에 의존적인 안정화 문제를 고려할 것이다. 또한 완화 기술을 이용하여 무한개의 선형 행렬 부등식을 가지는 파라메타 선형 행렬 부등식을 풀이 가능한 유한개의 선형 행렬 부등식으로 전개시킬 것이다.

2. 본 론

2.1 문제 설정

시간 지연 선형 파라메타 변형 시스템은 다음과 같다.

$$\dot{x}(t) = A(\rho(t))x(t) + A_h(\rho(t))x(t-h) \quad (1)$$
$$x(t) = \phi(t), \quad t \in [-h, 0]$$

여기서

$$A(\rho(t)) = \sum_{i=1}^{s} \rho_i(t)A_i, \; A_h(\rho(t)) = \sum_{i=1}^{s} \rho_i(t)A_{hi}$$

이고, $x(t) \in \mathbb{R}^n$는 상태 벡터, h는 시간 지연 상수, $\phi(t)$는 $[-h, 0]$ 구간에서 연속적인 벡터값 초기 함수, $\rho_i(t) = [\rho_1(t) \; \rho_2(t) \; \cdots \; \rho_s(t)]^T \in \mathbb{R}^s$는 파라메타 벡터를 나타낸다. 시간-변환 파라메타 벡터인 $\rho(t)$는 다음의 조건을 가진다.

$$0 \le \alpha_i \le \rho_i(t) \le \beta_i \le 1, \; \sum_{i=1}^{s} \rho_i(t) = 1, \text{ 모든 } i = 1, 2, \dots, s \quad (2)$$

본 논문의 목적은 시간 지연 선형 파라메타 변형 시스템의 안정화 조건을 찾는 것이다. 또한 [8]의 보조 정리를 이용한 완화 기술을 통해 안정화 조건을 발전시킬 것이다.

2.2 안정화 결과

시간 지연에 의존적인 안정화 결과는 다음과 같다.

정리 1: 만약 행렬 P, Q, S, $Y_{11}(\rho(t))$, $Y_{12}(\rho(t))$, Y_{22} 그리고 $\Theta(\rho(t))$가 존재하고, 다음의 조건을 만족한다면 시간 지연 시스템 (1)은 점근적으로 안정하다.

$$\begin{aligned} 0 > {} & \Theta(\rho(t))(A(\rho(t))e_1^T + A_h(\rho(t))e_2^T - e_3^T) + (A(\rho(t))e_1^T + A_h(\rho(t))e_2^T \\ & - e_3^T)^T\Theta^T(\rho(t)) + e_3Pe_1^T + e_1Pe_3^T + e_1Qe_1^T - e_2Qe_2^T + he_3Se_3^T \\ & + hY_{11}(\rho(t)) + Y_{12}(\rho(t))(e_1 - e_2)^T + (e_1 - e_2)Y_{12}^T(\rho(t)) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} Y_{11}(\rho(t)) & Y_{12}(\rho(t)) \\ Y_{12}^T(\rho(t)) & Y_{22} \end{bmatrix} > 0, P > 0, Q > 0, S - Y_{22} \ge 0$$

증명: $\chi(t)$을 $\chi(t) \triangleq [x^T(t) \; x^T(t-h) \; \dot{x}^T(t)]^T$, 그에 대응되는 엔트리 행렬 $e_i, i \in \{1, 2, 3\}$을 정의하면 시스템 (1)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$0 = (A(\rho(t))e_1^T + A_h(\rho(t))e_2^T - e_3^T)\chi(t) \quad (4)$$

이제 우리는 다음의 Lyapunov-Krasovskii 함수들을 선택할 것이다.

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) + V_3(t)$$
$$V_1(t) = x^T(t)Px(t), P > 0$$
$$V_2(t) = \int_{t-h}^{t} x^T(\alpha)Qx(\alpha)d\alpha, \; Q > 0$$
$$V_3(t) = \int_{-h}^{0}\int_{t+\alpha}^{t} \dot{x}^T(\beta)S\dot{x}(\beta)d\beta d\alpha, \; S > 0$$

이 함수들을 시간 t에 대해서 미분하면 다음과 같다.

$$\dot{V}_1(t) = 2x^T(t)P\dot{x}(t) = 2\chi^T(t)e_3Pe_1^T\chi(t)$$
$$\dot{V}_2(t) = x^T(t)Qx(t) - x^T(t-h)Qx(t-h) = \chi^T(t)\{e_1Qe_1^T - e_2Qe_2^T\}\chi(t)$$
$$\begin{aligned} \dot{V}_3(t) &= h\dot{x}^T(t)S\dot{x}(t) - \int_{t-h}^{t} \dot{x}^T(\alpha)S\dot{x}(\alpha)d\alpha \\ &= h\chi^T(t)e_3Se_3^T\chi(t) - \int_{t-h}^{t} \dot{x}^T(\alpha)S\dot{x}(\alpha)d\alpha \end{aligned}$$

[9]-[10]의 보조 정리를 이용하여 다음의 조건을 만족하는 행렬이 있을 때,

$$\begin{bmatrix} Y_{11}(\rho(t)) & Y_{12}(\rho(t)) \\ Y_{12}^T(\rho(t)) & Y_{22} \end{bmatrix} > 0$$

여기서

$$Y_{11}(\rho(t)) = \sum_{i=1}^{s} \rho_i(t)Y_{11i}, \; Y_{12}(\rho(t)) = \sum_{i=1}^{s} \rho_i(t)Y_{12i}$$

우리는 다음과 같은 부등식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} 0 \le {} & \int_{t-h}^{t} \begin{bmatrix} \chi(t) \\ \dot{x}(\alpha) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Y_{11}(\rho(t)) & Y_{12}(\rho(t)) \\ Y_{12}^T(\rho(t)) & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi(t) \\ \dot{x}(\alpha) \end{bmatrix} d\alpha \\ = {} & \chi^T(t)\{hY_{11}(\rho(t)) + Y_{12}(\rho(t))(e_1 - e_2)^T + (e_1 - e_2)Y_{12}^T(\rho(t))\}\chi(t) \\ & + \int_{t-h}^{t} \dot{x}^T(\alpha)Y_{22}\dot{x}(\alpha)d\alpha \end{aligned}$$

그리고 Lyapunov-Krasovskii 함수의 시간 미분은 다음의 상계를 가진다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \le {} & \chi^T(t)h\{Y_{11}(\rho(t)) + Y_{12}(\rho(t))(e_1 - e_2)^T + (e_1 - e_2)Y_{12}^T(\rho(t)) \\ & + e_3Pe_1^T + e_1Pe_3^T + e_1Qe_1^T - e_2Qe_2^T + he_3Se_3^T\}\chi(t) \\ & - \int_{t-h}^{t} \dot{x}^T(\alpha)(S - Y_{22})\dot{x}(\alpha)d\alpha \end{aligned} \quad (5)$$

마지막으로, 자유 변수 $\Theta(\rho(t))$을 추가하여, (4)에서의 제약 조건을 제거할 것이다.

$$0 \equiv \chi^T(t)\Theta(\rho(t))(A(\rho(t))e_1^T + A_h(\rho(t))e_2^T - e_3^T)\chi(t) \quad (6)$$

(5), (6) 식을 통해 정리 1은 증명됨을 알 수 있다.

2.3 완화 기술

정리 1의 파라메타 선형 행렬 부등식을 푼다는 것은 무한개의 선형 행렬 부등식을 푼다는 것과 같은 의미이므로, 현실적으로 매우 어려운 문제다. 때문에 파라메타 선형 행렬 부등식을 유한개의 풀이 가능한 선형 행렬 부등식으로 전개시키는 것이 매우 중요하다. 이번 섹션에서는 완화 기술을 이용하여 무한개의 파라메타 선형 행렬 부등식을 유한개의 풀이 가능한 선형 행렬 부등식으로 전개시킬 것이다.

정리 2: 만약 행렬 P, Q, S, Y_{11i}, Y_{12i}, Y_{22}, Θ_i, Λ_i 그리고 Ξ가 존재하고, 다음의 조건을 만족한다면 시간 지연 시스템 (1)은 점근적으로 안정하다.

$$\begin{bmatrix} Y_{11i} & Y_{12i} \\ Y_{12i}^T & Y_{22} \end{bmatrix} > 0, P > 0, Q > 0, S - Y_{22} \ge 0$$
$$\Lambda_i + \Lambda_i^T \ge 0$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Omega} & (*) & (*) & \cdots & (*) \\ \tilde{\Psi}_1 & \tilde{D}_1 & (*) & \cdots & (*) \\ \tilde{\Psi}_2 & \tilde{\Delta}_{21} & \tilde{D}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & (*) \\ \tilde{\Psi}_s & \tilde{\Delta}_{s1} & \cdots & \widetilde{\Delta_{s(s-1)}} & \tilde{D}_s \end{bmatrix} < 0 \tag{7}$$

여기서

$$\tilde{\Omega} \triangleq \Omega - \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \beta_i (\Lambda_i + \Lambda_i^T) - (\Xi + \Xi^T)$$
$$\tilde{\Psi}_i \triangleq \Psi_i + (\alpha_i + \beta_i)\Lambda_i + (\Xi + \Xi^T)$$
$$\tilde{D}_i \triangleq D_i - (\Lambda_i + \Lambda_i^T) - (\Xi + \Xi^T)$$
$$\tilde{\Delta}_{ji} \triangleq \Delta_{ji} - (\Xi + \Xi^T)$$
$$\Omega \triangleq e_3 P e_1^T + e_1 P e_3^T + e_1 Q e_1^T - e_2 Q e_2^T + h e_3 S e_3^T$$
$$\Psi_i \triangleq -\Theta_i e_3^T + \frac{1}{2} h Y_{11i} + Y_{12i}(e_1 - e_2)^T$$
$$D_i \triangleq \Theta_i A_i e_1^T + \Theta_i A_{hi} e_2^T + e_1 A_i^T \Theta_i^T + e_2 A_{hi}^T \Theta_i^T$$
$$\Delta_{ji} \triangleq \Theta_j A_i e_1^T + \Theta_j A_{hi} e_2^T$$

이다.

증명: 조건 (2)을 다시 써 보면, 다음과 같다.

$$M + \sum_{i=1}^{s} \rho_i(t) M_i + \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} \rho_i(t)\rho_j(t) M_{ij} < 0$$

여기서

$$M \triangleq e_3 P e_1^T + e_1 P e_3^T + e_1 Q e_1^T - e_2 Q e_2^T + h e_3 S e_3^T$$
$$M_i \triangleq -\Theta_i e_3^T - e_3 \Theta_i^T + h Y_{11i} + Y_{12i}(e_1 - e_2)^T + (e_1 - e_2) Y_{12i}^T$$
$$M_{ij} \triangleq \Theta_j A_i e_1^T + \Theta_j A_{hi} e_2^T + e_1 A_i^T \Theta_j^T + e_2 A_{hi}^T \Theta_j^T.$$

[11]-[12]의 제약 조건 제거 방법을 기반으로 하여, 우리는 (2)의 제약 조건을 다음과 같이 고려해 볼 수 있다.

$$-\sum_{i=1}^{s} \{\rho_i^2(t) - (\alpha_i + \beta_i)\rho_i(t) + \alpha_i\beta_i\}(\Lambda_i + \Lambda_i^T) \geq 0$$
$$-\left\{\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} \rho_i(t)\rho_j(t) - 2\sum_{i=1}^{s}\rho_i(t) + 1\right\}(\Xi + \Xi^T) = 0 \tag{8}$$

여기서 Λ_i는 모든 $i = 1, 2, \ldots, s$에서 $(\Lambda_i + \Lambda_i^T) \geq 0$을 만족하는 실수 행렬이다. 그리고 (8)는 다음의 등식에 의해서 만들어 진다.

$$\left\{\sum_{i=1}^{s}\rho_i(t) - 1\right\}\left\{1 - \sum_{j=1}^{s}\rho_j(t)\right\} = 0$$

두 개의 제약 조건들을 더하면 다음의 조건으로 다시 쓸 수 있다.

$$N + \sum_{i=1}^{s} \rho_i(t) N_i + \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} \rho_i(t)\rho_j(t) N_{ij} \geq 0$$

여기서

$$N \triangleq -\sum_{i=1}^{s} \alpha_i\beta_i(\Lambda_i + \Lambda_i^T) - (\Xi + \Xi^T)$$
$$N_i \triangleq (\alpha_i + \beta_i)(\Lambda_i + \Lambda_i^T) + 2(\Xi + \Xi^T)$$
$$N_{ij} \triangleq \begin{cases} -(\Lambda_i + \Lambda_i^T) - (\Xi + \Xi^T), & i = j \\ -(\Xi + \Xi^T), & i \neq j \end{cases}$$

이다.

이제 모든 조건들을 합해 보면 다음의 부등식을 얻을 수 있고,

$$M + N + \sum_{i=1}^{s} \rho_i(t)\{M_i + N_i\} + \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} \rho_i(t)\rho_j(t)\{M_{ij} + N_{ij}\} < 0 \tag{9}$$

(9)는 $[I \;\; \rho_1(t)I \;\; \cdots \;\; \rho_s(t)I]^T$ 벡터를 가지는 2차 형태의 조건 (7)으로 표현할 수 있게 된다.

2.4 예제

예제 1: 다음과 같은 비선형 시스템을 고려해 보자.

$$\dot{x}_2(t) = -6x_2(t)\sin^2(\theta(t)) - 8x_1(t) + x_1(t-h) - 2x_2(t-h)$$

여기서 $x(t) = [x_1(t) \;\; x_2(t)]^T$라고 하면, 이 식은 다음과 같이 다시 적을 수 있다.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -6\sin^2(\theta(t)) \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x(t-h)$$

이 식은 다음의 선형 파라메타 변형 모델로 표현될 수 있다.

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{2} \rho_i(t)(A_i x(t) + A_{hi} x(t-h))$$

여기서

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -6 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 0 \end{bmatrix}$$
$$A_{h1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_{h2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$
$$\rho_1(t) = \sin^2(\theta(t)), \rho_2(t) = \cos^2(\theta(t))$$

이다. MATLAB 7.0에서 제공하는 LMI Toolbox를 이용하여 정리 1과 정리 2를 시뮬레이션 해 보았다. 정리 2의 경우, $\alpha_i = 0, \beta_i = 1$로 가정하였다. 표 1은 허용 가능한 최대 시간 지연 상계값을 보여 준다.

<표 1> 허용 가능한 최대 시간 지연 상계값

방법	최대 시간 지연 상계값
C. Lin *et al.* [13]	0.3222
정리 1	0.3078
정리 2	10 이상

예제 2: 다음과 같은 시스템을 고려해 보자.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -8 & -4 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$
$$A_{h1} = A_{h2} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}$$

표 2 역시 허용 가능한 최대 시간 지연 상계값을 보여 준다.

<표 2> 허용 가능한 최대 시간 지연 상계값

방법	최대 시간 지연 상계값
C. Lin *et al.* [13]	1.5
정리 1	테스트 실패
정리 2	10 이상

정리 1은 [13]에 비해서 좋은 결과를 보이지 못했지만 정리 2는 더 나은 성능을 보임을 알 수 있었다.

3. 결 론

본 논문에서는 시간 지연 선형 파라메타 변형 시스템의 시간 지연에 의존적인 안정화 기준에 관하여 연구를 수행하였다. 안정화 기준은 $x(t)$, $x(t-h)$ 그리고 $\dot{x}(t)$ 베이시스를 통해 전개됐고, 자유 변수를 통해서 모델의 제약 조건을 제거하였다. 하지만 결과가 파라메타화 선형 행렬 부등식의 형태로 나왔기 때문에 완화 기술을 사용하여 선형 행렬 부등식의 형태로 식을 유도하였다. 예제들은 구해진 기준이 기존의 결과보다 좋은 성능을 보임을 말해주었다.

감사의 글

본 연구는 정보통신부 및 정보통신연구진흥원의 대학 IT연구센터 지원사업의 연구결과로 수행되었음" (IITA-2007-C1090-0701-0004)

본 연구는 정보통신연구진흥원 및 정보통신부의 대학 IT연구센터 육성·지원사업의 지원을 받고 있는 포항공과대학교의 OFDM 기반 광대역 이동 인터넷 연구센터 (BrOMA)에 의해 지원받았음(IITA-2007-C1090-0701-0037)

[참 고 문 헌]

[1] J. P. Richard, "Time-delay systems: An overview of some recent advances andopen problems", Automatica, 39(10), pp.1667--1694, 2003.

[2] S. I. Niculescu, "Delay Effects on Stability: A Robust Approach", New York: Springer-Verlag, 269, 2002.

[3] J. Hale and S. M. V. Lunel, "Introduction to Functional Differential Equations", New York: Springer-Verlag, 1993.

[4] Apkarian P. and Gahinet P. A. "Convex characterization of gain-scheduled H∞ controllers", IEEE Trans. Automatic Control, 40(5), pp.853--864, 1995.

[5] Apkarian P. and Adams R. I., "Advanced gain-scheduling techniques for uncertain systems", IEEE Trans. Control System Technology, 6(1), pp.21--32, 1998.

[6] Wu F. and Grigoriadis K. M., "LPV systems with parameter-varying time delays: analysis and control", Automatica, 37(2), pp.221--229, 2001.

[7] Zhang X. P., Tsiotras P. and Knospe C.,, "Stability analysis of LPV time-delayed systems", International Journal on control, 75(7), pp.538--558, 2002.

[8] Doo Jin Choi and PooGyeon Park, "H∞ state-feedback controller design for discrete-time fuzzy systems using weighting-dependent Lyapunov functions", IEEE Tr. on Fuzzy Systems, 11(2), pp.271--278, 2003.

[9] Y. S. Moon, P. Park, W. H. Kwon and Y. S. Lee, "Delay-dependent robust stabilization of uncertain state-delayed systems", Int. J. Control, 74(14), pp.1447--1455, 2001.

[10] P. Park, "A Delay-dependent Stability Criterion for Systems with Uncertain Time-invariant Delays", IEEE Trans. Automat. Contr., 44(4), pp.876--877, 1999.

[11] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, "Linear Matrix Inequalities in System and Control Thoery", SIAM, 1994.

[12] P. Park and D. J. Choi, "LPV controller design for the nonlinear RTAC system", Int. J. Robust Nonlinear Control, 11(14), pp.1343-1363, 2001.

[13] C. Lin, Q. -G. Wang, T.H. Lee and Y. He, "Stability conditions for time-delay fuzzy systems using fuzzy weighting-dependent approach", IET Control Theory Appl., 1(1), pp.127--132, 2007.