

포화구동기를 갖는 선형시스템의 추종제어

이연규, 김진훈
충북대학교
제어계측공학과

Tracking control for linear systems with actuator saturation

Yeorn-Gui Yi, Jin-Hoon Kim
Chungbuk National University
Dept of Control and Instrumentation Eng

Abstract - 이 논문에서는 구동기 용량제한을 갖는 선형시스템에 대한 저이득 추종 제어기 설계 문제를 다룬다. 주어진 시스템에 대한 추종 기준 입력의 크기와 변화율에 제한을 갖는 시간에 따라 변화하는 일반적인 입력을 고려하며 제어기 설계 과정은 추종성능을 향상시키기 위한 2단계의 시스템 등가변환으로 구성된다. 먼저 제1단계에서는 잘 알려진 SVD(Singular Value Decomposition)의 원리를 활용하여 추종출력과 관련된 상태를 효율적으로 분리한 후 추종에러를 상태방정식 내에 포함하는 제2단계의 시스템 변환을 통하여 추종성능의 향상을 꾀한다. 제안된 추종 제어기의 설계 조건은 모두 LMI 형태로 표현 가능하며 잘 알려진 수치예제를 통하여 제안된 설계 기법의 효용성을 예시한다.

$$sat(u_i) = \begin{cases} u_i^0, & \text{if } u_i > u_i^0 \\ u_i, & \text{if } |u_i| \leq u_i^0 \\ -u_i^0, & \text{if } u_i < -u_i^0 \end{cases} \quad (2)$$

여기서 u_i^0 는 입력 u_i 가 선형성을 나타낼 수 있는 최대 허용치 즉, 구동기 용량을 나타낸다. 다음으로 구동기 용량제한 시스템 (1)에 대하여 부가되는 기준입력을 $y_r(t)$ 로서 표현한다. 이 때 시스템의 (1)의 추종특성은 $y_r(t)$ 의 크기뿐만 아니라 $y_r(t)$ 의 시간적 변화율 $\dot{y}_r(t)$ 에도 상당한 영향을 받기 때문에 $y_r(t), \dot{y}_r(t)$ 를 모두 고려한 기준 입력의 제한조건을 아래와 같이 정의 하도록 한다.

$$y_r^T(t)y_r(t) + \dot{y}_r^T(t)\dot{y}_r(t) \leq u_{max}^2, \quad y_r(0) = 0 \quad (3)$$

다음으로 (3)에 의하여 다음과 같이 새로운 변수 $w(t)$ 를 시스템의 왜란으로서 정의한다.

$$w(t) = \begin{bmatrix} y_r(t) \\ \dot{y}_r(t) \end{bmatrix}, \quad w^T(t)w(t) \leq u_{max}^2 \quad (4)$$

마지막으로 시스템(1)의 추종오차는 아래와 같이 정의한다.

$$e(t) = y(t) - y_r(t) \quad (5)$$

이제 (1)-(5)를 바탕으로 하여 구동기 용량제한을 갖는 선형시스템에 대한 저이득 추종 제어기 설계 문제를 아래와 같이 정의 한다.

저이득 H_∞ 추종 제어기 설계 : (1)의 구동기 용량제한을 갖는 선형시스템에 대하여 (3)의 제한조건을 만족하는 (4)로 정의된 $w(t)$ 로부터 (5)로 정의된 추종오차 $e(t)$ 까지의 L_2 게인인 γ 를 초과하지 않는 제어규칙 $u(t)$ 를 구한다.

2.2 시스템 등가변환

(1)에 정의된 $p \times n$ 차원을 갖는 측정출력 행렬 C 에 대하여 SVD를 적용하면 $U \in R^{p \times p}, V \in R^{n \times n}$ 에 대하여 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$C = USV^T, \quad S = [S_p \quad 0] \quad (6)$$

여기서 $UU^T = VV^T = I$ 를 만족하고 $S_p = diag\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p\}$ 로서 σ_i 는 행렬 C 의 특이치를 나타내며 (6)의 결과에 의해 (1)에서 정의된 시스템의 측정출력 $y(t)$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$y(t) = USV^T x(t) \quad (7)$$

이제 (7)에서 $\bar{x}(t) = V^T x(t)$ 로 하면 (1)로 주어진 시스템은 다음과 같이 변환할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}_2 sat(u(t)) \\ y(t) &= \bar{C}\bar{x}(t) \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 $\bar{A} = V^T A V, \bar{B} = V^T B, \bar{C} = U S$ 를 나타낸다. 다음으로 (8)에서 정의된 시스템의 상태 $\bar{x}(t)$ 중에서 추종출력 $y(t)$ 에 직접적으로 관련된 항을 (6)의 결과를 활용하여 아래와 같이 $\bar{x}_1(t)$ 로 정의한다.

$$y(t) = U S_p \bar{x}(t) = U S_p \bar{x}_1(t) \quad (9)$$

1. 서 론

제어 시스템의 설계 시에 제어 입력 신호를 받아 실제 시스템을 구동하는 구동기의 존재는 필수적이다. 그러나 이러한 구동기는 여러 가지 물리적 혹은 경제적 제한조건으로 인하여 용량제한 특성을 지니게 되며 이러한 구동기가 갖는 용량제한 특성으로 인하여 대상 시스템은 허용된 입력 구간 값에 대하여는 선형시스템으로 동작하지만 허용 구간을 넘어서는 비선형으로 동작하는 특징을 보이게 된다. 더욱이 구동기에 내재된 이러한 용량제한 특성을 고려하지 않을 경우 시스템의 성능 저하뿐만 아니라 시스템의 안정성까지도 보장할 수 없기 때문에 구동기 용량제한을 고려한 제어 시스템의 설계는 매우 중요한 의미를 갖는다고 할 수 있다.

시스템의 출력이 따라야 할 추종 기준입력(reference)이 시간에 따라 변화하는 일반적인 추종제어(tracking control)의 문제는 기준 입력과 측정출력의 차이로 표현되는 추종오차를 시스템의 상태방정식에 포함시킬 수 있는 적절한 시스템 등가변환을 수행한 후 이러한 변환된 시스템에 대한 안정화 문제로서 전환하여 해결하는 일반적인 접근방식을 취하게 된다. 이러한 구동기 용량제한 시스템에 대한 제어기 설계의 대표적인 방법으로는 구동기 용량제한이 없는 이상적인 구동기를 가정하여 제어기를 설계한 후 시행착오(trial and error) 방식으로 제어성능을 조절하는 엔티-와이드업(anti-widup) 방식 혹은 제어 시스템의 동작 중에 절대로 구동기 포화가 발생함을 허용하지 않으므로써 제어기 설계 시 선형구간 만을 고려하는 저이득 제어기 설계, 구동기 포화를 나타내는 비선형 구간을 컨벡스헐(convex hull)등의 수학적 기법을 활용하여 시스템 등가변환을 수행한 후 제어기를 설계하는 고이득 제어기 설계 등으로 구분 지을 수 있다. 따라서 이 논문에서는 추종 성능을 향상시킬 수 있는 2단계의 시스템 등가변환으로 구성된 저이득 추종 제어기의 설계 기법을 제안하고자 한다. 우선 잘 알려진 SVD 기법을 활용하여 시스템의 상태 중 추종출력에 직접적으로 관계되는 상태만을 효율적으로 분리하는 제1단계의 등가변환을 수행한 후 추종에러를 시스템의 동적인 상태방정식에 포함되도록 하는 제2단계의 시스템 등가변환을 수행함으로써 추종 제어기를 설계하게 된다. 또한 추종제어의 경우 제어기의 추종성능은 시간에 따라 변화하는 기준입력의 크기뿐만 아니라 기준입력의 시간적 변화율에도 영향을 받기 때문에 기준입력의 크기와 더불어 기준입력의 시간변화율 역시 변환된 시스템의 동적 방정식에 대한 왜란의 형태로서 포함되게 된다. 이렇게 설계된 추종 제어기는 기준입력의 변화에 빠르게 반응할 수 있을 뿐만 아니라 H_∞ 혹은 추종에러의 최대크기 등의 다양한 성능요소 조건을 만족할 수 있는 장점을 지니게 된다.

2. 주요 결과

2.1 주요 정의 및 문제기술

다음과 같이 기술되는 구동기 용량제한을 갖는 선형시스템을 고려하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_2 sat(u(t)) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (1)$$

(1)에서 $x \in R^n$ 은 시스템의 상태, $u \in R^m$ 은 기준입력, $y \in R^p$ 는 측정출력을 나타내며 행렬 A, B, C 는 적절한 차원을 갖는 상수행렬을 나타낸다. 다음으로 $sat(u)$ 는 구동기 용량의 포화 특성을 나타내는 포화함수 벡터로서 $sat(u) = [sat(u_1), sat(u_2), \dots, sat(u_m)]$ 으로 주어지며 각 제어입력 u_i 에 대한 용량제한 특성은 다음과 같다.

다음으로 시스템 (8)은 다음과 같은 형태로 확장하여 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1(t) \\ \dot{\bar{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \end{bmatrix} + \bar{B}_2 \text{sat}(u(t)) \quad (10)$$

여기서 (5)로 정의된 추종에러와 (9)로 새롭게 정의된 시스템 출력을 사용하여 추종에러를 포함하는 동적인 상태방정식을 구하기 위하여 아래와 같이 새로운 상태변수 $z(t) = [z_1(t) \ z_2(t)]^T$ 를 정의한다.

$$z_1(t) = US_p \bar{x}_1(t), \quad z_2(t) = \bar{x}_2(t) \quad (11)$$

이제 (9),(11)의 결과에 의해 (5)로 정의된 시스템의 추종에러는 다음과 같은 의미를 지니게 된다.

$$e(t) = y(t) - y_r(t) = US_p \bar{x}_1(t) - y_r(t) = z_1(t) - y_r(t) \quad (12)$$

마지막으로 (11),(12)를 바탕으로 하여 $z(t) = [e(t) \ z_2(t)]^T$ 로 하는 등가 변환을 (10)에 대하여 수행하면 추종에러를 포함하는 새로운 시스템 방정식을 아래와 같이 최종적으로 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \tilde{A}z(t) + \tilde{B}_1 w(t) + \tilde{B}_2 \text{sat}(u(t)) \\ e(t) &= \tilde{C}z(t) \end{aligned} \quad (13)$$

여기서 각 행렬 $\tilde{A}, \tilde{B}_1, \tilde{C}$ 의 내용은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \begin{bmatrix} (US_p)^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (US_p)^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_1 = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} - I \\ \bar{A}_{21} & 0 \end{bmatrix} \\ \tilde{B}_2 &= \begin{bmatrix} (US_p)^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} \tilde{B}_2, \quad \tilde{C} = [I_p \ 0] \end{aligned}$$

이제 (13)으로 표현된 시스템은 SVD에 의해 추종출력과 관련된 상태만을 $z_1(t)$ 으로 분리할 수 있을 뿐 만 아니라 추종에러를 상태 속에 포함하기 때문에 추종성능을 효율적으로 향상시킬 수 있는 장점을 지니게 된다.

2.3 추종 제어기 설계

아래의 정리는 (13)으로 정의된 구동기 용량제한을 갖는 선형시스템의 H_∞ 추종 제어기 설계에 대한 결과이다.

정리 1 : (13)으로 주어진 변환된 시스템에 대하여 아래의 LMI들을 만족하는 양확정행렬 $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 와 임의의 행렬 $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 그리고 양의 상수 $\alpha, \sigma_0, \sigma_1 > 0$ 이 존재하면

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 Q & 0 & Y_i^T \\ \star & 1 - \sigma_0 \sigma_1 & H_i^T \\ \star & \star & \begin{pmatrix} u_i^0 \\ w_{max} \end{pmatrix}^2 \end{bmatrix} > 0 \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}Q + Q\tilde{A}^T + \tilde{B}_2 Y + Y^T \tilde{B}_2^T + \alpha Q & \tilde{B}_1 + \tilde{B}_2 H \\ \star & -\alpha \sigma_0 \end{bmatrix} < 0 \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}Q + Q\tilde{A}^T + \tilde{B}_2 Y + Y^T \tilde{B}_2^T & Q\tilde{C}^T & \tilde{B}_1 + \tilde{B}_2 H \\ \star & -I & 0 \\ \star & \star & -\gamma^2 \end{bmatrix} < 0 \quad (16)$$

다음의 제어 규칙

$$u(t) = K\tilde{x}(t) + Hw(t), \quad K = YQ^{-1} \quad (17)$$

을 적용한 시스템 (13)의 각 제어입력은 선형구간에 머물며 시스템의 상태 $\tilde{x}(t)$ 는 $\tilde{x}^T(t)Q^{-1}\tilde{x}(t) \leq \sigma_0 w_{max}^2$ 를 만족하고 $w(t)$ 로부터 추종오차 $e(t)$ 까지의 L_2 게인은 γ 를 넘지 않는다.

증명 : 증명 과정은 지면 관계상 생략한다.

3. 수치 예제

다음으로 주어지는 포화 구동기를 갖는 선형시스템을 고려하자.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} \text{sat}(u(t)) \quad (18)$$

$$y(t) = [1 \ 0]x(t)$$

여기서 시스템에 대한 구동기 용량제한 값은 $u^0 = 15$ 이고 추종 기준입력은 $y_r(t) = 0.3[\sin(t) + \sin(2t)]$ 로서 $w^T(t)w(t) \leq w_{max}^2 = 1$ 의 조건을 만족한다. 다음 표 1은 시스템 (19)에 대하여 설계된 각 제어기의 제어게인 행렬 K, H 와 L_2 이득을 구한 결과이다.

표 1. 설계된 제어기 제어기의 이득 및 L_2 이득

제어기 구조	제어 이득	L_2 이득
$u(t) = Kx(t)$	$K = -[34.3584 \ 1.6080]$	0.1488
$u(t) = Kx(t) + Hw(t)$	$K = -[104.7900 \ 1.9599]$ $H = [-3.9193 \ 1.9597]$	0.0021

다음으로 그림 1은 각 제어기 구조에 따른 출력과 그에 따른 추종오차를 비교하여 나타낸 결과이다.

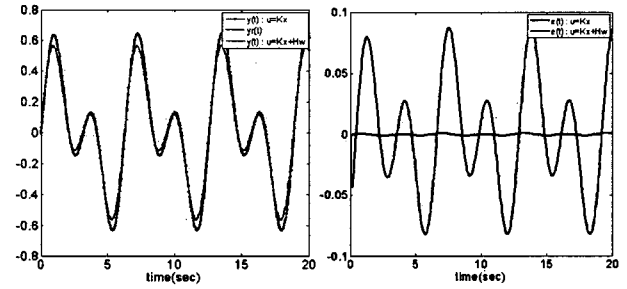


그림 1. 기준입력과 각 제어기 구조에 따른 출력, 그리고 추종오차

표 1과 그림 1을 참고하면 제안된 제어기의 γ 값이 매우 작기 때문에 좋은 H_∞ 성능을 나타내며 기준입력의 정보를 제어입력으로 활용하고 있는 $u = Kx + Hw$ 구조가 $u = Kx$ 보다 더 좋은 추종성능을 나타냄을 확인할 수 있다.

4. 결 론

이 논문에서는 제한된 구동기 용량을 갖는 선형시스템에 대한 제어기 추종 제어기 설계 기법을 제안하였다. 제안된 새로운 추종 제어기는 잘 알려진 SVD 기법을 적용한 1단계의 상태분리와 추종에러를 상태방정식에 포함하는 2단계의 시스템 등가변환으로서 구성되었다. 이러한 2단계 방식의 등가적인 시스템 상태 변환을 통하여 왜단으로서 정의된 기준입력의 크기와 변화율 및 추종에러를 변환된 시스템의 상태와 함으로서 결과적인 추종에러의 감소와 성능향상을 가져오는 것이 가능하였으며 잘 알려진 수치예제를 통한 모의실험 결과에 의하면 제안된 추종 제어기가 향상된 H_∞ 성능을 보여줌을 확인할 수 있었다.

[참고 문헌]

- [1] P.O. Gutman and P. Hagander, "A new design of constrained controllers for linear systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 30, pp.22-33, 1985.
- [2] J.-H. Kim and Z. Bien, "Robust stability of uncertain linear systems with saturating actuators", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol.39, pp.202-207, 1994.
- [3] D.S. Bernstein and A.N. Michel(Eds.), "Special issue: saturating actuators", *Int. J. of Robust and Nonlinear Control*, vol.5, pp.375-540, 1995.
- [4] Z. Lin and A. Saberi, "A semi-global low-and-high gain design technique for linear systems with input saturation-stabilization and disturbance rejection", *Int. J. of Robust and Nonlinear Control*, vol. 5, pp.381-398, 1995.
- [6] C.T. Chen, *Linear system theory and design*, Oxford university press, 1984.
- [7] B.O.D. Anderson and J.B. Moore, *Optimal control: Linear quadratic methods*, Prentice-Hall, 1989.
- [8] S. Boyd, El Ghaoui, L.E. Feron and V. Balakrishnan, *Linear matrix inequalities in system and control theory*, SIAM, 1994.
- [9] T. Hu and Z. Lin, *Control systems with actuator saturation*, Birkhauser, 2001.