

다중입출력 선형 시스템에서의 외란 관측기 설계

주영준^a, 백주훈^b, 심형보¹⁾, 서진현¹⁾
^a서울대학교 공과대학 전기컴퓨터공학부
^b고려대학교 공과대학 기계공학과

Disturbance Observer of Multi-Input Multi-Output Linear Systems

YoungJun Joo^a, Juhoon Back^b, Hyungbo Shim^a, Jin-Heon Seo^a

^aASRI, School of Electrical Engineering and Computer Science, Seoul National University
^bDepartment of Mechanical Engineering, Korea University

Abstract - 이 논문에서는 다중입출력 선형 시스템에 대한 외란 관측기 설계 방법을 제안하고자 한다. 제안된 방법을 특이 섭동(Singular Perturbation) 이론을 사용하여 해석하며, 그 결과 Q 필터의 상수가 매우 작다면 외란 제거와 시스템 불확실성에 대한 보상을 통하여 실제 시스템을 공칭 시스템으로 근사화 시켜주는 것을 볼 수 있다.

1. 서론

외란 관측기는 간단한 구조를 가지고 있음에도 외란 제거와 시스템 불확실성에 대한 보상에 강한 성능을 지니고 있기에 여러 분야에서 사용되고 있다[4]-[5]. 그러나 오랫동안 주파수 영역에서만 다루어져 왔을 뿐, 상태 공간에서의 해석과 설계는 최근에서야 이루어지기 시작했고, 비선형 시스템에 대한 외란 관측기 설계도 제안되었다[6]-[7].

다음의 다중입출력 선형 시스템을 고려하자.

$$\dot{v} = Fv + \sum_{i=1}^m E_i u_i, \quad (1)$$

$$y = [H_1, \dots, H_m]^T v, m \leq n$$

여기서 v 는 n 차의 상태변수 벡터이고, u_i 는 제어입력, y 는 m 차의 알고 있는 출력 벡터, F 는 $n \times n$ 차의 행렬, E_i 와 H_i 는 $n \times 1$ 차의 벡터들이다.

가정 1. (1)의 시스템은 조건 1)과 2)를 만족한다. 이 조건들로부터 시스템 (1)이 $\{r_1, \dots, r_m\}$ 차의 벡터 상대 차수(vector relative degree)를 갖는다고 할 수 있다([9-10]).

1) 모든 $1 \leq i, j \leq m$ 와 $r_1 + \dots + r_m \leq n$ 인 r_i 들에 대하여

$$H_j E_i = \dots = H_j F^{r_i-2} E_i = 0 \quad (2)$$

2) $m \times m$ 차의 행렬 K 는 정칙(nonsingular) 행렬이다.

$$K = \begin{bmatrix} H_1 F^{r_1-1} E_1 & \dots & H_m F^{r_m-1} E_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_1 F^{r_m-1} E_m & \dots & H_m F^{r_m-1} E_m \end{bmatrix} \quad (3)$$

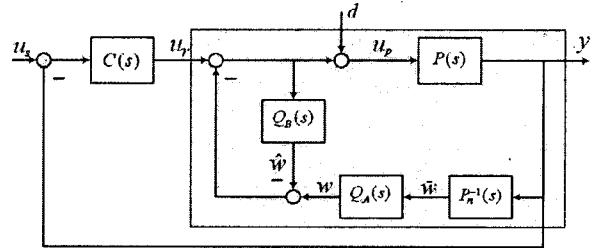
가정 2. 시스템 (1)의 시스템 파라미터(parameter)들은 불확실성을 가지고 있지만 그 변화의 폭은 제한되어 있다. 이 때 변화의 폭이 작을 필요는 없지만 시스템의 벡터 상대 차수를 변화시키지는 않아야 한다.

가정에 의해 시스템 (1)은 아래와 같은 표준형으로 변환될 수 있다[2].

$$\begin{aligned} \dot{x}_1^i &= x_2^i \\ &\vdots \\ \dot{x}_{r_i-1}^i &= x_{r_i}^i \\ \dot{x}_{r_i}^i &= \psi_i x + \phi_i^T z + \sum_{j=1}^m g_j^i u_j^i \\ z &= Sz + G_z x \\ y_i &= x_1^i, 1 \leq i \leq m, \hat{r} = \sum_{i=1}^m r_i \\ u_p^i &= u_i^i + d^i + p_i^i - q_i^i \\ x &= [x_1^1 \dots x_{r_1}^1 \dots x_1^m \dots x_{r_m}^m]^T \end{aligned} \quad (4)$$

z 는 실제 시스템 제로 다이나믹스(zero dynamics)의 $n - \hat{r}$ 차 상태 변수이고, 행렬 ψ_i, ϕ_i, S, G_z 는 약간의 불확실성을 가지고 있다고 있다. 하지만 시스템 (1)에서의 선형 변환에 의한 행렬들이므로 모든 불확실 행렬들은 제한된 파라미터 값을 갖는다.

이 논문의 목적은 (4)의 시스템에 대하여 외란 관측기를 설계하고 특이 섭동 이론을 이용하여 외란 관측기에 의한 전체 시스템의 영향을 분석하는 것이다.



<그림 1> 외란 관측기를 기반으로 한 제어기

2. 외란 관측기의 설계 및 해석

2.1 외란 관측기의 설계

이 절에서는 다중입출력 선형 시스템에서 외란 관측기를 설계하는 방법에 대해서 제안한다. 시스템 (4)의 역동역학식은 식(5)와 같다.

$$\dot{z} = Sz + G_z x$$

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_p^1 \\ \vdots \\ \dot{u}_p^m \end{bmatrix} = G^{-1} \left(- \begin{bmatrix} \psi_1^T \\ \vdots \\ \psi_m^T \end{bmatrix} y - \begin{bmatrix} \phi_1^T \\ \vdots \\ \phi_m^T \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} y_{r_1}^1 \\ \vdots \\ y_{r_m}^m \end{bmatrix} \right)$$

$$G = \begin{bmatrix} g_1^1 & \dots & g_m^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1^m & \dots & g_m^m \end{bmatrix}$$

$$y = [y_1 \ y_1 \ \dots \ y_1^{(r_1-1)} \ \dots \ y_m \ y_m \ \dots \ y_m^{(r_m-1)}] \quad (5)$$

가정으로부터 행렬 K 는 두 개의 정사각행렬 $K_1 E$ 로 나눌 수 있다. 이 때 K 가 정칙 행렬이므로 E 도 정칙 행렬이고, G 는 E 의 선형 변환에 의해서 구해진 행렬이므로 G 의 역행렬이 존재한다[2]. 그러므로 실제 시스템에 대한 역동역학식을 구할 수 있다. 그런데 식 (5)는 실제 시스템 (4)의 정확한 역동역학식이다. 그러나 실제 시스템의 불확실성에 의해 식 (5)를 바로 외란 관측기의 설계에 이용할 수 없다. 따라서 설계에 있어서는 실제 시스템에 대한 공칭 시스템의 역동역학식을 사용하여야 한다. 또한 이 경우에 공칭 시스템 역동역학식의 입력은 실제 시스템의 출력이고, 동역학식의 특성에 의해서 출력의 미분 값으로 이루어진 벡터 Y 는 상태 변수 벡터 x 로 대체할 수 있다[6].

$$\dot{\bar{z}} = \bar{S} \bar{z} + \bar{G}_z x$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{w}}_1 \\ \vdots \\ \dot{\bar{w}}_m \end{bmatrix} = \bar{G}^{-1} \left(- \begin{bmatrix} \bar{\psi}_1^T \\ \vdots \\ \bar{\psi}_m^T \end{bmatrix} X - \begin{bmatrix} \bar{\phi}_1^T \\ \vdots \\ \bar{\phi}_m^T \end{bmatrix} \bar{z} + \begin{bmatrix} x_{r_1}^1 \\ \vdots \\ x_{r_m}^m \end{bmatrix} \right)$$

$$X = [x_1 \ x_1 \ \dots \ x_1^{(r_1-1)} \ \dots \ x_m \ x_m \ \dots \ x_m^{(r_m-1)}]^T = [x_1^1 \ \dots \ x_{r_1}^1 \ \dots \ x_1^m \ \dots \ x_{r_m}^m]^T \quad (6)$$

\bar{z} 는 $n - \hat{r}$ 차의 외란 관측기 제로 다이나믹스의 상태 변수 벡터이고, $\bar{\psi}_i, \bar{\phi}_i, \bar{S}, \bar{G}_z$ 는 공칭 시스템의 행렬들이다.

다음으로 Q_d 필터는 아래와 같이 구현할 수 있다

$$\dot{q}_j^i = q_{j+1}^i, 1 \leq j \leq r_i - 1$$

$$\dot{q}_{r_i}^i = -\frac{a_0}{r} q_1^i - \frac{a_1}{r-1} q_2^i - \dots - \frac{a_{r_i-1}}{r} q_{r_i}^i + \frac{a_0}{r} w_i$$

$$w_i = q_1^i, 1 \leq i \leq m \quad (7)$$

위의 식 (7)에서 r 은 상대 차수 벡터의 r_i 들 중에서 가장 큰 값을 사용

한다. 그리고 a_i 는 $s^r + a_{r-1}s^{r-1} + \dots + a_0$ 의 극점이 좌반면(Left Half Plane)에 위치하도록 잡는다. Q_B 필터도 비슷한 방법으로 구현한다.

$$\begin{aligned} \dot{p}_j^i &= p_{j+1}^i, 1 \leq j \leq r-1 \\ \dot{p}_r^i &= -\frac{a_0}{\tau} p_1^i - \frac{a_1}{\tau-1} p_2^i - \dots - \frac{a_{r-1}}{\tau} p_r^i + \frac{a_0}{\tau} u_i \\ \hat{w}_i &= p_1^i, \bar{u}_i = u_i + \hat{w}_i - \bar{w}_i = u_i + d_i - p_1^i, 1 \leq i \leq m \end{aligned} \quad (8)$$

<그림 1>에서, 외란 관측기를 실제 구현한다면, Q_A 필터가 역동역학 부분보다 앞부분에 들어가는 것이 좋겠지만, 해석상의 편의를 위해 역동역학 부분을 앞에 놓고 해석을 할 것이다. 이는 Q_A 필터의 구조가 $\alpha(s)I$ 의 형태를 가지고 있기에 가능하다.

마지막으로 외부 루프 제어기 $C(s)$ 는 공칭 시스템에 대하여 설계된 제어기이다. 전체 시스템을 안정화시킨다면 $C(s)$ 에는 어떤 제어기라도 관계 없이 사용할 수 있다.

2.2 외란 관측기의 안정성 및 강인성 해석

보조정리 1. 식(9)의 좌표 변환에 의해서

$$\begin{aligned} \xi_j^i &= \tau^{j-1} d_j^i \\ \eta_j^i &= \tau^{j-1} p_j^i, 1 \leq i, j \leq m \end{aligned} \quad (9)$$

(4)-(8)의 전체 페루프 시스템은 (10)-(13)과 같이 변환된다.

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Sz + G_z x \\ \dot{\bar{z}} &= \bar{S}\bar{z} + \bar{G}_z x \\ \dot{x} &= Ax + B\theta \\ \dot{c} &= Lc + M(u_s - Cx) \\ u_r &= Nc + O(r - Cx) \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (10)$$

$$\tau \dot{\xi} = A_a \xi + \alpha_0 B \bar{G}^{-1} [-\bar{\psi}x - \bar{\phi}z + \theta] \quad (11)$$

$$\dot{\eta} = A_a \eta + \alpha_0 B [u_r - C\xi + G\eta] \quad (12)$$

이 때,

$$\begin{aligned} A &= \text{block diag} [A^1, \dots, A^m], A^i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \\ B &= \text{block diag} [B^1, \dots, B^m], B^i = [0 \dots 0 \ 1] \\ C &= \text{block diag} [C^1, \dots, C^m], C^i = [0 \dots 0 \ 1] \\ A_a &= \text{block diag} [A_a^1, \dots, A_a^m], A_a^i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{r-1} \end{bmatrix} \\ \psi &= [\psi_1 \dots \psi_m], \phi = [\phi_1 \dots \phi_m] \\ \theta &= \psi x + \phi z + Gg(u_r + d + C\eta - C\xi) \end{aligned} \quad (13)$$

만약 전체 시스템이 안정하다면, 특이 섭동 이론에 의해서 (10)-(12)의 시스템은 빠른 동역학(fast dynamics)과 느린 동역학(slow dynamics)의 두 부분으로 나눌 수 있다. x, z, \bar{z}, u_r, d, c 는 빠른 상태 변수들이고, ξ, η 는 느린 상태 변수들이다. 그리고 식 (11)-(13)로부터 준정상상태(quasi-steady-state) (14)를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \eta_j^i &= \xi_j^i = 0, 1 \leq i \leq m, 2 \leq j \leq r, \xi_1^i = u_r^i \\ \eta_i^* &= G^{-1}(\bar{\psi}x + \bar{\phi}z - \psi x - \phi z - d + G^{-1} \bar{G} u_r) \\ \eta_i^* &= [\eta_1^i \dots \eta_m^i]^* \end{aligned} \quad (14)$$

식 (14)를 식 (10)-(12)에 대입한다면 축소 시스템(Reduced System)을 얻을 수 있다. 약간의 계산 이후 얻게 되는 축소 시스템은 식 (15)과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Sz + G_z x \\ \dot{\bar{z}} &= \bar{S}\bar{z} + \bar{G}_z x \\ \dot{x} &= Ax + B(\bar{\psi}x + \bar{\phi}z + \bar{G}u_r) \\ \dot{c} &= Lc + M(u_s - Cx) \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (15)$$

식 (15)에서 알 수 있듯이 축소 시스템에서는 실제 시스템 제어로 다이내믹스의 상태 변수들 대신에 외란 관측기 제어로 다이내믹스의 상태 변수들이 입력력 관계에 영향을 주고, 전체 페루프 시스템이 공칭 시스템으로 근사화된다.

정리 1. (1)-(2)의 가정 하에서, 다음과 같은 조건 1)-3)이 만족한다면 양

의 상수인 τ^* 가 존재하고 $0 < \tau < \tau^*$ 인 모든 상수 τ 에서 전체 시스템은 강인성을 보장하면서 안정(robustly stable)하다.

1) 축소 시스템 (15)이 지수적으로 안정(exponentially Stable)하다. 즉, 행렬 \bar{A} 가 허위츠(Hurwitz)하다.

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} L & -MC & 0 \\ B\bar{G}A + B(\bar{\psi} - \bar{G}OC) & B\bar{G} & \\ 0 & 0 & G_z^{-1} \end{bmatrix} \quad (16)$$

2) 행렬 S 가 허위츠하다.

3) 행렬 $A_a + \alpha_0 B(\bar{G}^{-1}G - I)C$ 가 허위츠하다.

증명: 빠른 동역학을 살펴보면,

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a - \alpha_0 B \bar{G}^{-1} GC & \alpha_0 B \bar{G}^{-1} GC \\ -\alpha_0 BC & A_a + \alpha_0 BC \end{bmatrix} + \beta \quad (17)$$

이고, β 는 느린 동역학의 상태 변수들이다.

식 (17)로부터 행렬식을 구해보면,

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} sI - A_a + \alpha_0 B \bar{G}^{-1} GC & -\alpha_0 B \bar{G}^{-1} GC \\ -\alpha_0 BC & sI - A_a - \alpha_0 BC \end{bmatrix} \\ = \det \begin{bmatrix} sI - A_a + \alpha_0 B \bar{G}^{-1} GC & sI - A_a \\ \alpha_0 BC & sI - A_a \end{bmatrix} \\ = \det \begin{bmatrix} sI - A_a + \alpha_0 B(\bar{G}^{-1}G - I)C & 0 \\ \alpha_0 BC & sI - A_a \end{bmatrix} \\ = \det [sI - A_a] \det [sI - A_a + \alpha_0 B(\bar{G}^{-1}G - I)C] \end{aligned} \quad (18)$$

행렬식에서 A_a 는 허위츠하고, 조건 3)에 의해 두 번째 부분도 허위츠하므로, 빠른 동역학은 평형 상태로 수렴한다. 그러므로 특이 섭동 이론에 의해 전체 페루프 시스템을 축소 시스템으로 간략화 할 수 있다.

축소 시스템 (15)을 행렬의 형태로 나타내면

$$\dot{A}_s = \begin{bmatrix} A & 0 \\ \star & S \end{bmatrix} \quad (19)$$

이고, 조건 1)-2)에 의해 \bar{A} 와 S 는 허위츠하므로 전체 시스템의 행렬이 허위츠한 것을 알 수 있다[6]. 그러므로 전체 시스템은 강인성을 보장하면서 안정하다.

3. 결 론

이 논문에서는 다중입출력 선형 시스템에서의 외란 관측기의 설계 방법을 제안하였고, 그에 대한 해석을 하였다. 설계된 외란 관측기는 정리 1이 만족한다면, 특이 섭동 이론에 의해 <그림 1>의 진하게 칠해진 부분 전체를 외란의 영향이 없는 얇은 축소시스템으로 근사화할 수 있다. 따라서 실제 시스템의 제어 다이내믹스가 입력력 관계에서 사라지므로, 공칭 시스템에 기반해서 원하는 제어기를 사용하여 쉽게 제어가 가능함을 보였다.

[참 고 문 헌]

- [1] H. K. Khalil, Nonlinear Systems, 3rd edition. Prentice-Hall, 2002.
- [2] A. Isidori, Nonlinear Control Systems, 3rd edition. Springer-Verlag, 1995.
- [3] C. T. Chen, Linear System Theory and Design, 3rd edition, Oxford University Press, 1999.
- [4] T. Umeno and Y. Hori, "Robust speed control of DC servomotors using modern two degrees-of-freedom controller design," IEEE Trans. Ind. Electron, vol. 38, pp. 353-368, 1991.
- [5] T. Umeno and Y. Hori, "Robust servosystem design with two degrees of freedom and its application to novel motion control of robot manipulators," IEEE Trans. Ind. Electron, vol. 40, no. 5, pp. 473-485, 1993.
- [6] H. Shim and Y. Joo, "State Space analysis of disturbance observer and a robust stability condition", To be presented at Conf. on Decision and Control, 2007.
- [7] J. Back and H. Shim, "Analysis and synthesis of disturbance observer as a tool for nonlinear robust control," Proc. IFAC Symp. on Nonlinear Control Systems (NOLCOS), 2007.
- [8] H. K. Khalil, F. Esfandiari, "Semiglobal Stabilization of a Class of Nonlinear Systems Using Output Feedback," IEEE. Trans. Automat. Contr. vol. 38, pp 1412-1415, 1993.
- [9] F. Esfandiari, H. K. Khalil, "Output feedback stabilization of fully linearizable systems," Int. J. Control, vol. 56, no. 5, pp. 1007-1037, 1992.
- [10] J. Back, H. Shim and Y. Joo, "An Inner-Loop Controller Guaranteeing Robust Transient Performance for Uncertain MIMO Linear Systems", To be presented at IFAC WC, 2008.