

## 수소이온교환막 연료전지의 선형행렬부등식 기반 TS 퍼지 모델링

김문환, 박한웅  
해군사관학교 공학처

## Linear Matrix Inequality based Fuzzy Modeling for PEM Fuel Cells

Moon Hwan Kim, Han Woong Park  
Department of Engineering, ROK naval academy

**Abstract** - 본 논문에서는 수소이온교환막 연료전지의 퍼지 모델링 기법을 제안하였다. 수소이온교환막 연료전지는 가정용으로 공급이 적합한 연료전지로서 최근들어 많은 연구가 진행되고 있다. 연료전지 특성 모델은 이러한 연구에 중요한 역할을 하고 있으면 이 때문에 다양한 연료 전지 모델링 기법들이 제안되고 있다. 본 논문에서는 선형 행렬부등식 최적화기법을 기반 새로운 형태의 퍼지 모델링 기법이 제안되었다. 최종적으로 시뮬레이션을 통해 제안된 기법의 우수성을 확인하였다.

## 1. 서 론

전지는 재생에너지로서 가장 각광받고 있는 전지 에너지원 중 하나이다. 연료전지는 기존의 전지보다 고효율이며 환경 친화적이고 소음이 적은 이상적인 에너지원이다.

수소이온교환막 연료전지는 연료 공급 장치, 연료 터스팅, 전압 변환 장치 세 부분을 구성된다. 수소이온교환막 연료전자는 동작 온도가 낮고 ( $80\text{--}100^{\circ}\text{C}$ ) 구동이 빠르며 자연가스를 이용할 수 있다는 점에서 주거 환경 전류 공급 용 연료 전지로 적합하나 출력이 직류이기 때문에 주거용으로 공급을 될 때는 단상 혹은 삼상 직류/교류 변압기를 통해 변화가 필요하다. 하지만 일반 가정환경 하에서 유/무효 저항의 변화가 많기 때문에 이러한 변화에 적절히 일정한 전력을 공급하기 위한 직류/교류 변압기 제어가 필요하다. 이러한 주변기기 개발을 위해 가장 기초적인 연료전지 모델링에 관한 많은 연구가 진행되었다[1-6].

기본적인 연료전지 모델로는 유체역학, 전자화학 반응 그리고 열전달 특성을 이용한 모델이 있다. 하지만 이러한 모델들은 대부분 실제의 연료전지의 성능과는 차이를 보이며 연료전지의 모양 및 크기에 따라 모델 분석을 다시 해야하는 어려움이 있다. 이 때문에 최근 데이터를 기반으로 하는 데이터 기반 모델링 기법들이 사용되고 있다. 현재 가장 많이 사용되고 있는 인공신경망의 경우 그 성능이 우수하지만 모델이 완전히 블랙박스화 되어 모델에 대한 대략적인 분석이 어렵고 데이터를 학습시키기 위한 많은 데이터가 필요하며 구조 결정에 어려움이 있는 단점을 가진다. 이를 극복하기 위해 본 논문에서는 퍼지 모델을 이용한 모델링 기법을 제안하였다.

퍼지 이론과 퍼지 집합은 1965년 Zadeh [7]에 의해 처음 소개된 이후 다양한 분야에 적용되고 있다. 퍼지 모델링은 이러한 많은 응용 분야들 중에 하나이다 [8]. 퍼지 모델은 시스템의 입출력 관계를 멤버쉽함수를 통해

서 나타내게 되며 애매모호한 관계적 데이터 또한 쉽게 표현할 수 있는 장점을 가진다.

본 논문에서는 이러한 퍼지 모델링을 설계하는 문제를 다루기 위해 선형행렬부등식을 이용한 볼록 최적화 기법을 사용한다. 모델의 최적 성능을 위해 Takagi-Sugeno(TS) 퍼지 모델이 사용되었다 [12-13]. TS 퍼지 모델의 전반부는 퍼지 클러스터링 기법을 이용하여 동정하였으며 결론부는 선형행렬부등식 최적화 기법을 사용하여 동정을 수행하였다.

본 논문은 다음과 같이 구성이 된다. 2장에서는 일반적인 TS 퍼지 모델의 구성 및 추론 과정이 서술된다. 3장에서는 선형행렬 부등식을 이용한 퍼지 모델의 설계 방법이 제안된다. 4장에서는 제안된 TS 퍼지 분류기를 모의실험을 통한 수소이온막 연료전지의 모델링이 수행되었다. 마지막으로 5장에서는 본 논문의 결론을 맺는다.

## 2. TS 퍼지 모델

퍼지 모델은 시스템의 입출력 관계를 퍼지 집합과 퍼지 if-then 규칙을 사용하여 표현한다. 그 중 TS 퍼지 모델을 이용한 퍼지 분류기는 가장 많이 사용되는 퍼지 모델의 하나이다. TS 퍼지 모델은 다음과 같은 규칙을 가진다 [11].

$$R_i: \text{IF } x_i \text{ is } M_{i1} \text{ AND... AND } x_m \text{ is } M_{im} \text{ THEN } y_i = z_i \quad (1)$$

여기서,  $y_i$ 는 규칙  $R_i$ 에 해당되는 판단함수이며  $M_{ij}$ 는 전반부 퍼지 집합이다. 변수  $n$ 은 클래스의 수를 나타내며  $m$ 은 입력 특징의 수를 나타낸다. 후반부 파라메터  $z_i$ 는 전반부 출력에 따른 규칙  $R_i$ 에 대한 지지도를 나타낸다. 후반부 파라메터  $z_i$ 는 입력 변수로 이루어진 선형 다항식으로 표현 할 수도 있다. 퍼지 모델의 최종 출력  $\vec{Y}(\vec{x})$ 은 각 규칙의 출력을 반영함으로써 다음과 같이 계산된다.

$$\vec{Y}(\vec{x}) = \frac{\sum_{i=1}^l h_i(\vec{x})y_i}{\sum_{i=1}^l h_i(\vec{x})} \quad (2)$$

여기서,  $\vec{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_m]^T$ 는 입력벡터를 의미하고  $h_i(\vec{x})$ 는 다음과 같이 계산되는 규칙  $R_i$ 의 전반부 출력을 나타낸다.

$$h_i(\vec{x}) = \prod_{j=1}^m \mu_{M_j}(x_j) \quad (3)$$

여기서,  $\mu_{M_j} \in [0,1]$ 는  $j$  번째 멤버쉽 함수값을 나타낸다.

### 3. 선형 행렬부등식을 이용한 퍼지 모델링

본 논문에서 제안된 TS 모델은  $n$ 개의 클러스터에 따라  $n$ 개의 규칙으로 구성된다. 각각의 규칙은 하나의 클러스터를 대변한다. 규칙 전반부는  $m$ 개의 가우시안 멤버쉽 함수로 구성이 되었고, 후반부는 입력 변수와의 선형 합으로 이루어진 다항식이 사용되었다. 본 논문에서 사용된 TS 퍼지 모델의 규칙은 다음과 같다.

$$\begin{array}{l} R_i: \text{IF } x_1(k) \text{ is } M_1 \text{ AND } \dots \text{ AND } x_m(k) \text{ is } M_m, \\ \text{THEN } y_i(\vec{x}_k) = a_{i1}x_1(k) + \dots + a_{im}x_m(k) + b_i \end{array} \quad (4)$$

여기서,  $\vec{x}_k = [x_1(k) \dots x_m(k)]$ 는  $k$  번째 입력 데이터이고  $x_j(k)$ 는  $k$  번째 데이터의  $j$  번째 특징 입력이다. 퍼지 모델의 최종 출력은 다음과 같이 계산된다.

$$Y(\vec{x}_k) = \frac{\sum_{j=1}^l h_j(\vec{x}_k) (\sum_{i=1}^m a_{ji}x_i(k) + b_j)}{\sum_{j=1}^l h_j(\vec{x}_k)} \quad (5)$$

데이터의 최종 클래스 값은 최종 출력과의 최소 에러를 갖는 클래스 값으로 선택된다. 최종 출력 (5)는 계산의 편의를 위해 다음과 같은 행렬 등식으로 나타낼 수 있다.

$$Y(\vec{x}_k) = H_k^T(A\vec{x}_k + B) \quad (6)$$

여기서,

$$H_k = \begin{bmatrix} h_1(\vec{x}_k) \\ \vdots \\ h_l(\vec{x}_k) \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_{11} \dots a_{1m} \\ \vdots \\ a_{l1} \dots a_{lm} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_l \end{bmatrix}.$$

제안된 TS 퍼지 모델의 전반부의 멤버쉽 함수는 퍼지 클러스터링 (FCM) 기법에 의해서 결정된다. 가우시안 멤버쉽 함수는 FCM 센터 값으로 결정되며 분산은 클러스터의 분산값으로 결정된다.

제안된 TS 퍼지 모델 구현은 후반부 변수 동정 문제로 요약된다. 후반부 변수 동정은 전반부의 출력이 주어졌을 때, 모델의 분류 에러를 최소화시키는 후반부 변수를 찾아내는 문제이다. 퍼지 모델의 모델에러는 TS 퍼지 모델의 목표 값인 해당 데이터 값과 TS 퍼지 모델의 최종 출력의 차로 계산이 된다. 본 논문은 모델 에러를 최소로 하는 후반부 변수 동정 문제를 모델에러를 최소로 하는 불록 최적화 문제로 근사화 하였다. 근사화된 불록 최적화 문제는 TS 퍼지 모델의 후반부 변수와 퍼지 모델의 목표 값으로 이루어진 선형 행렬 부등식으로 표현이 된다. 표현된 선형 행렬 부등식은 일반 고유값 최소 문제(GEVP)로 변환될 수 있다. 최종적으로 근사화된 일반 고유값 문제를 해결함으로써 최소의 모델에러를 가지게 하는 최적의 후반부 변수가 동정된다.

데이터  $\vec{x}(k)$  가 주어졌을 때, TS 퍼지 모델의 목표값을

$Y_d^*$ 라 하면 최적의 TS 퍼지 모델은 다음 등식을 만족하여야 한다.

$$Y_d^* = H_k^T(A\vec{x}_k + B), k = 1, \dots, p \quad (7)$$

여기서,  $p$  는 데이터의 수를 나타낸다.

하지만 일반적으로 목표값과 실 최종 출력 사이에 에러가 존재하기 때문에 에러를 최소화시키려는 노력이 필요하다.

**Remark 1.** 최종 모델을 설계를 할 때  $p$  개의 등식을 고려해야 하므로 행렬등식 (7)의 해결 가능성은  $p$ 의 크기에 따라 달라진다. 만일  $p$  가 미지수의 개수  $l(m+1)$  와 같다면 해석적인 방법에 의해서 후반부 변수가 구해질 수 있다. 하지만  $p$  가  $l(m+1)$  보다 큰 경우는 일반적인 해석적 방법이 아닌 최소 제곱(least square) 방법 혹은 순환적인 최소 제곱(recursive least square) 방법을 통해 후반부 변수를 동정해야 한다 [10-11]. 따라서, 해석적인 방법은 최적의 해를 제공하지만, 일반적인  $p$  를 갖는 TS 퍼지 분류기의 후반부 변수를 해석적인 방법을 통한 찾는다는 것은 힘든 일이다. 한편 유전 알고리즘을 사용하여 후반부 변수를 찾는 방법이 이러한 문제를 해결하기 위해 제안되었다 [9]. 그러나, 유전 알고리즘을 사용하여 찾은 후반부 변수는 분류기 에러에 대한 최적화 논의가 이루어 질 수 없기 때문에 유전알고리즘을 이용하여 최적의 후반부 변수를 찾기는 힘들다.

이러한 어려움을 해결하기 위해 분류에러를 최소로 하는 다음과 같이 불록 최적화 문제가 정의된다.

#### 문제 1 (gamma 최적 TS 퍼지 분류기 설계 문제)

$k$  번째 데이터의 전반부 출력  $H_k^T$ 이 주어졌을 때, 다음 조건을 만족시키는 최적화된 TS 퍼지 분류기의 후반부 변수 행렬  $A$ 와  $B$ 를 결정하여라.

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize}_{A,B} & \gamma \text{ subject to} \end{array} \quad (8)$$

$$\| Y_d^* - H_k^T(A\vec{x}_k + B) \|_2^2 < \gamma, k = 1, \dots, p$$

#### 정리 1 ( $\gamma$ 최적화 TS 퍼지 분류기 설계)

데이터  $\vec{x}(k)$ 의 목표 값  $Y_d^*$ 가 주어지고 전반부 출력  $H_k^T$ 이 주어졌을 때, 제안된 TS 퍼지 분류기의 분류 에러를 최소화시키는 최적의 후반부 변수 행렬  $A$ ,  $B$ 는 다음과 같은 일반 고유값 문제를 해결함으로써 결정된다.

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize}_{A,B} & \gamma \text{ subject to} \end{array} \quad (9)$$

$$L_k = \left[ \begin{array}{c} Y_d^* - H_k^T(A\vec{x}_k + B) \\ I \end{array} \right]^\star > 0, k = 1, \dots, p$$

**증명:** 문제 1을 해결하기 위해, TS 퍼지 분류기는 문제 1을 만족 시키는 후반부 변수 행렬  $A$ 와  $B$ 를 구해야 한다. 문제 1의 불록 최적화 문제는 다음과 같은 TS 퍼지 분류기의 최종 출력값과 목표값의 차에 상한 값을 설정하는 것으로 해석이 된다.

$$(Y_d^* - H_k^T(A\vec{x}_k + B))^T (Y_d^* - H_k^T(A\vec{x}_k + B)) < \gamma, k = 1, \dots, p \quad (10)$$

행렬 부등식 (10) 은 다음과 같이 쓸수 있다.

$$\gamma - (Y_d^k - H_k^T(\vec{A}\vec{x}_k + b))^T(Y_d^k - H_k^T(\vec{A}\vec{x}_k + b)) > 0, k = 1, \dots, p \quad (11)$$

Schur's complement 법칙에 의해 행렬 부등식 (11)은 다음과 같은 선형행렬부등식으로 나타낼 수 있다.

$$\left[ Y_d^k - H_k^T(\vec{A}\vec{x}_k + B) \begin{matrix} \gamma \\ I \end{matrix} \right] > 0, k = 1, \dots, p \quad (12)$$

따라서, 볼록 최적화 문제 1은 식 (12)의  $\gamma$ 값을 최소화 함으로써 해결된다. 선형행렬 부등식 (12)의  $\gamma$ 값을 최소화 하는 문제는 선행행렬 부등식 문제 중 정리 1 과 같은 일반 고유값 문제로 정의 될 수 있다.

**Remark 2.** 정리 1 의 일반 고유값 문제는  $p$ 개의 선형 행렬 부등식을 가지는 문제이다. 따라서 문제 1을 풀기 위해  $p$ 개의 데이터에 대한 목표 값인  $Y_d^k$ 와 전반부 출력값  $H_k$ 가 정의 되어 있어야 한다. 목표 값  $Y_d^k$ 는  $k$  번째 데이터 값으로 할당되며, 전반부 출력값은 FCM을 이용해서 얻어진 멤버쉽 함수를 기반으로 개산된다.

최종적으로 정리 1을 통해 얻어진 선형행렬 부등식 문제인 일반 고유값 문제를 수치해석적인 방법을 통해 해결함으로써 최적의 후반부 변수 행렬  $A$ 와  $B$ 를 얻는다.

#### 4. 수소이온교환막 연료전지의 퍼지 모델링

제안된 퍼지 모델링 기법을 이용하여 수소이온교환막 연료 전지의 모델링을 수행하였다. 연료 전지 모델링에 사용된 데이터는 Connecticut Global Fuel Cell Center (CGFC)에서 측정된 데이터를 이용하였다. Argyro poulos 등 [6]에 의해 측정된 데이터는 메탄을 연료를 바탕으로 측정된 데이터이다. 메탄을 농도는 0.25M에서 0.75M까지 바뀌며 연료전지 동작온도는 303K에서 363K 까지이다. 총 20개의 데이터가 사용되었으며 모델링에 사용된 데이터 집합은 표 1과 같다.

동작온도(K)	전류밀도(mA/C m <sup>2</sup> )	실험 데이터(V)
303	2.928	0.4103
318	5.295	0.4127
318	7.662	0.3468
303	4.599	0.3468
333	7.649	0.4151
303	3.599	0.3858
348	5.38	0.486
333	1.549	0.5348
348	0.1952	0.6422
348	0.9394	0.5812
303	4.648	0.3419
318	7.71	0.3443
333	10.88	0.3492
348	14.82	0.3028
318	3.172	0.4689
348	11.32	0.3761
348	3.489	0.5201

318	0.3172	0.5861
303	1.525	0.4713
318	7.552	0.3516
318	0.3782	0.5788

표 1 모델링에 사용된 연료전지 데이터

전반부 멤버쉽 함수 동정에 사용된 클러스터는 7개이며 FCM 기법을 이용한 그림 1-2 와 같이 멤버쉽 함수를 동정하였다.

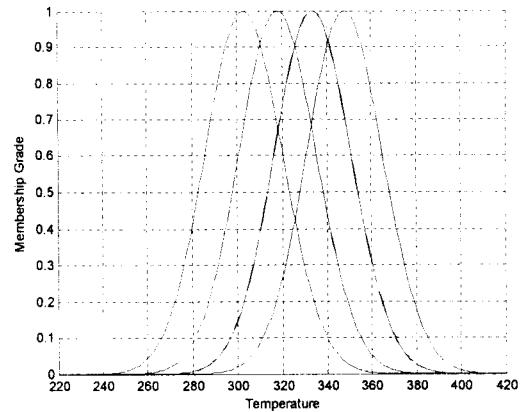


그림 1 동작온도입력에 대한 멤버쉽 함수

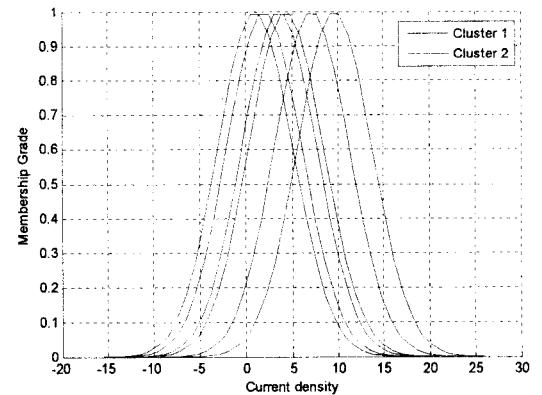


그림 2 전류밀도 입력에 대한 멤버쉽 함수

동정된 전반부 멤버쉽 함수를 바탕으로 후반부 파라메터 값을 결정하기 위한 고유값 문제는 정리 1에 의해 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} &\text{Minimize}_{A, B} \quad \gamma \quad \text{subject to} \\ &\text{block-diag}[L_1, \dots, L_{150}] > 0 \end{aligned} \quad (13)$$

MATLAB을 이용하여 얻은 최종적인 후반부 파라메터 변수는 다음과 같다.

$$A = \begin{bmatrix} -19.6395 & -29.6283 \\ 3.5052 & 21.7073 \\ 0.0640 & -14.7691 \\ 2.0989 & 2.0648 \\ 6.5388 & 19.3826 \\ -14.6933 & -11.6580 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 6931.5 \\ -1076.3 \\ 193.6 \\ -791.0 \\ -2247.3 \\ 4254.4 \end{bmatrix} \quad (14)$$

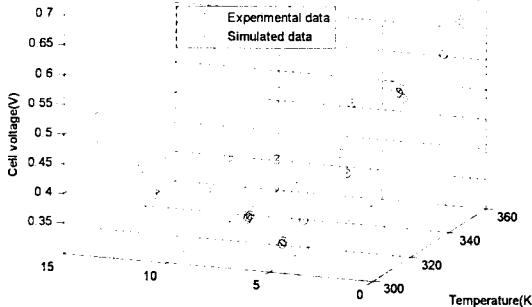


그림 3 실험데이터와 시뮬레이션 데이터의 비교

최종적으로 얻어진 TS 퍼지 모델을 이용한 실험 데이터와 시뮬레이션 데이터의 결과 비교는 그림 3과 같다. 그림에서 보이는 바와 같이 대부분의 데이터를 정확히 모델링하고 있음을 확인 할 수 있다. 표 2는 기존의 인공신경망회로를 이용한 모델링 기법과의 성능 비교 결과를 나타낸다. MSE를 측정결과 성능이 더 우수함을 확인 할 수 있다.

모델링 방법	MSE( $10^{-3}$ )
ANN [14]	0.074
제안된 모델링	0.015

표 2 제안된 TS 퍼지 모델링 기법의 성능 비교

## 5. 결 론

본 논문에서는 수소이온교환막 연료전지의 TS 퍼지 모델링 기법이 되었다. 수소이온교환막 연료전지의 TS 퍼지 모델을 동정하기 위해 선형행렬부등식 최적화 기법과 퍼지 클러스터링 기법이 제안되었다. 퍼지 모델의 전반부는 퍼지 클러스터링 기법을 기반으로 최적화 되었으며 이를 기반으로 후반부 변수 최적화 문제는 선형행렬부등식 최적화 문제로 변환하여 최적의 후반부 변수값을 구하는 방법을 제안하였다. 또한 실 실험 데이터를 기반으로 시뮬레이션을 수행하여 제안된 기법의 정확성을 검증하였다. 추후 보다 많은 데이터와 특성을 가지는 데이터를 이용한 모델링 연구를 수행 예정이다.

## [참 고 문 헌]

- [1] M.A. Laughton, Fuel cells, Power Eng. J. 16 (1) (2002) 37-47.
- [2] S. Um, C.Y. Wang, K.S. Chen, "Computational fluid dynamics modeling of proton exchange membrane fuel cell," J. Power Electrochem. Soc. Vol. 147, pp. 4485-4493, 2003.
- [3] D. Singh, D.M. Lu, N. Djilali, "A two dimension analysis of mass transport in proton exchange membrane fuel

- [4] S. Dutta, S. Shimpalee, J.W. Van Zee, "Numerical prediction of mass-exchange between cathode and anode channels in PEM fuel cell," Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 44, pp. 2029-2042, 2001.
- [5] J.C. Amphlett, R.F. Mann, B.A. Peppley, P.R. Roberge, A. Rodrigues, "A model predicting transient response of proton exchange membrane fuel cells," J. Power Sources, Vol. 61, pp. 183-188, 1996.
- [6] J. Padules, G.W. Ault, J.R. McDonald, "An integrated SOFC plant dynamic model for power systems simulation," J. Power Sources, Vol. 86, pp. 495-500, 2000.
- [7] L. A. Zadeh, "Fuzzy sets, information and control", Vol. 8, Page(s): 338-353, 1965.
- [8] P. K. Simpson, "Fuzzy min-max neural networks. I. Classification", IEEE Trans. on Neural Networks, Vol. 3, pp. 776-786, 1992.
- [9] M. Setnes and H. Roubos, "GA-fuzzy modeling and classification: complexity and performance", IEEE Trans. on Fuzzy Systems, Vol. 8, pp. 509-522, 2000.
- [10] M. Setnes and H. Roubos, "GA-fuzzy modeling and classification: complexity and performance", IEEE Trans. on Fuzzy Systems, Vol. 8, pp. 509-522, 2000.
- [11] J. Yen, L. Wang, and C. W. Gillespie, "Improving the inter ability of TSK fuzzy models by combining learning and local learning", IEEE Trans. on Fuzzy Systems, Vol. 6, pp. 530-537, 1998.
- [12] M. Sugeno and G.T. Kang, "Structure identification of fuzzy model", Fuzzy Sets and Systems, Vol. 28, pp. 15-33, 1988.
- [13] T. Takagi and M. Sugeno, "Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control", IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, Vol. 15, pp. 116-132, 1985.
- [14] S. Ou, L.E.K. Achenie, "A hybrid neural network model for PEM fuel cells," Journal of Power Source, Vol. 140, pp. 319-330, 2005.