물리탐사자료 복합역산을 위한 예비연구

김정호[1)]

[1)]한국지질자원연구원 지반안전연구부, jungho@kigam.re.kr

Preliminary Study on Joint Inversion of Geophysical Data

Jung-Ho Kim[1)]

[1)]Geotechnical Engineering Div., KIGAM

Abstract: Recently, multidimensional joint inversion of geophysical data based on fundamentally different physical properties has been actively studied. Joint inversion can provide a way to much more accurately image the subsurface structure. Through the joint inversion, furthermore, it is possible to directly estimate non-geophysical material properties from geophysical measurements. In this study, I derive the objective functions and normal equations of three different joint inversion approaches: one approach based on the structural similarity using cross-gradient, and the other two using the *a priori* information on the model parameters and the correlation between material properties. Since all the equations derived in this study are based on the same inversion method (smoothness constrained least-squares), it is possible to mix the joint inversion methods so as to produce a new joint inversion algorithm.
Keywords: joint inversion, geophysical data, a priori information

1. 서론

서로 다른 탐사방법을 이용하여 획득한 물리탐사 자료를 동시에 역산하는 복합역산은 동일한 물성인 전기전도도를 이용하는 전기 및 전자탐사의 복합역산에서부터 시작되었다고 볼 수 있다 (Jupp and Voziff, 1975; Sasaki, 1989). 최근에 들어 물성이 서로 다른 두 종류의 탐사자료 복합역산에 관한 연구가 활발하게 이루어지고 있다. 이는 한 종류의 탐사의 단점을 다른 종류의 탐사가 보완함으로써 더 정확한 물성 분포에 의거한 지하 영상의 획득이 가능할 뿐만 아니라, 포화도, 지반의 지지력 등과 같이 물리탐사 변수가 아닌 다른 물성 분포의 유도가 물리탐사로서 가능하기 때문이다 (Ghose, 2006). 복합역산은 크게 구조의 유사성을 이용하는 방법(Gallardo and Meju, 2004), 구조를 공유하는 방법(Gallardo-Delgado, *et al*., 2003; de Nardis *et al*., 2005), 물성 분포 혹은 상관관계 등의 선험적(*a priori*)으로 주어진 정보를 이용하는 방법 (Heincke *et al*., 2006)으로 나눌 수 있다. 이 연구에서는 한 종류의 지하구조의 유사성을 이용한 방법, 두 종류의 선험적 정보를 이용하는 방법에 대해 평활화 제한 최소자승 역산에 기반을 두어 목적함수와 정규 방정식을 체계적으로 유도하여 앞으로의 연구에 도움을 주고자 한다.

2. 독립 역산

서로 다른 물성을 대상으로 하는 두 종류의 물리탐사 A, B 의 최소자승역산의 대상함수 (objective function)는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$S_A = \mathbf{e}_A{}^T \mathbf{W}_A \mathbf{e}_A + \lambda_A \{(\partial^n \Delta \mathbf{p}_A)^T (\partial^n \Delta \mathbf{p}_A)\} \quad (1a)$$

$$S_B = \mathbf{e}_B{}^T \mathbf{W}_B \mathbf{e}_B + \lambda_B \{(\partial^n \Delta \mathbf{p}_B)^T (\partial^n \Delta \mathbf{p}_B)\} \tag{1b}$$

여기서 $\mathbf{p}$ 는 물성 분포 벡터, $\mathbf{e}$ 는 이론자료와 실측자료 사이의 오차, $\mathbf{W}$ 는 자료에 대한 가중인자 대각행렬, λ 는 라그랑지 곱수, 아래첨자 A, B 는 물리탐사 A, 물리탐사 B 를 의미한다. 복합 역산을 위한 최소자승역산의 대상함수를 다음과 같이 정의한다.

$$\Phi = \gamma_A [\mathbf{e}_A{}^T \mathbf{W}_A \mathbf{e}_A + \lambda_A \{(\partial^n \Delta \mathbf{p}_A)^T (\partial^n \Delta \mathbf{p}_A)\}] + \gamma_B [\mathbf{e}_B{}^T \mathbf{W}_B \mathbf{e}_B + \lambda_B \{(\partial^n \Delta \mathbf{p}_B)^T (\partial^n \Delta \mathbf{p}_B)\}] \tag{2}$$

여기서 γ 는 탐사 방법 각각에 대한 가중 인자이다. 위의 목적함수에는 비록 각 탐사 방법에 대한 가중인자 항목을 포함하고 있으나, 두 탐사를 연결하는 항목이 포함되어 있지 않으므로 사실상 두 종류의 탐사 자료를 독립적으로 역산함과 동일하다. 위의 두 종류의 대상함수를 최소로 하는 증분 벡터를 구하기 위한 정규 방정식은 다음의 형식으로 표시될 수 있으며, 물리탐사 A 를 예를 들면 다음과 같다.

$$\mathbf{K}_A \Delta \mathbf{p}_A = \mathbf{J}_A{}^T \mathbf{W}_A \mathbf{e}_A \tag{3}$$

여기서, $\mathbf{K}_A = [\mathbf{J}_A{}^T \mathbf{W}_A \mathbf{J}_A + \lambda_A \{(\partial^n)^T \partial^n\}]$, $\mathbf{J}_A$: A 탐사의 Jacobian.

두 탐사자료를 함께 역산하는 역산의 경우에도 동일한 형식으로 표현된다.

$$\mathbf{K} \Delta \mathbf{p} = \mathbf{J}^T \mathbf{W} \mathbf{e} \tag{4}$$

위 식들에서 첨자가 생략된 변수는 모두 동일한 항목에 대한 두 탐사방법의 변수를 통합한 변수 이다(예를 들면 $\mathbf{e} = \{\mathbf{e}_A, \mathbf{e}_B\}$, $\mathbf{p} = \{\mathbf{p}_A, \mathbf{p}_B\}$).

3. cross-gradient 를 이용한 복합역산: 지하구조의 동일성

Gallardo and Meju(2004)는 탄성파 굴절법 탐사와 전기비저항 탐사자료의 구조의 동일성을 이용한 복합역산에서 구조의 동일성을 정량화하는 방법으로 두 물성분포 사이의 cross-gradient 를 이용할 것을 제안하였다. 즉 다음 식으로 정의 되는 cross-gradient 함수 값이 제로가 될 경우, 두 종류의 물성으로 정의되는 지하구조가 동일하다는 것이다.

$$\mathbf{t}(x, y, z) = \nabla p_A(x, y, z) \times \nabla p_B(x, y, z)\,. \tag{5}$$

Gallardo and Meju(2004)의 접근을 대상함수 (2)에 적용하면 cross-gradient 제한을 이용한 복합역산은 다음과 같은 대상함수로 정의될 수 있다.

$$min\ \{\Phi\},\ subjected\ to\ \ \mathbf{t}(\mathbf{p}_1) = 0\,. \tag{6}$$

통합물성벡터의 첨자 1 은 구하고자 하는 물성벡터, 첨자 0 는 주어진 물성벡터를 의미한다. (6) 식의 해는 라그랑지 법 (Tarantola, 1987)으로 얻을 수 있다. 즉 라그랑지 곱수 벡터 $\boldsymbol{\beta}$ 를 도입하면

$$\frac{\partial}{\partial \Delta \mathbf{p}} \{\Phi + 2\mathbf{t}(\mathbf{p}_1)^T \boldsymbol{\beta}\} \cong \frac{\partial \Phi}{\partial \Delta \mathbf{p}} + 2\mathbf{B}^T \boldsymbol{\beta} = 0,\ \ \mathbf{t}(\mathbf{p}_1) \cong \mathbf{t}(\mathbf{p}_0) + \mathbf{B} \Delta \mathbf{p} = 0\,, \tag{7}$$

여기서 $\mathbf{B} = \left.\dfrac{\partial \mathbf{t}(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}}\right|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_0}$.

연립 방정식 (7)을 풀면 다음과 같은 방정식을 얻는다.

$$\boldsymbol{\beta} = [\mathbf{B}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{B}^T]^{-1} \{\mathbf{t}(\mathbf{p}_0) + \mathbf{B}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{J}^T \mathbf{W}\mathbf{e}\} \tag{8a}$$

$$\mathbf{K} \Delta \mathbf{p} = \mathbf{J}^T \mathbf{W} \mathbf{e} - \mathbf{B}^T \boldsymbol{\beta} \tag{8b}$$

(8a)식을 이용하여 주어진 물성벡터 및 오차로부터 라그랑지 곱수 벡터 $\boldsymbol{\beta}$ 를 구하고, 이를 (8b)에 대입하여 최종으로 구하고자 하는 물성 증분 벡터 $\Delta\mathbf{p}$ 를 계산한다. 복합역산 정규방정식(8b)와 독립역산 정규방정식 (4)의 차이는 (8b) 식의 우변의 두 번째 항에 있다.

4. 지하 물성 분포의 선험적 정보를 이용한 복합역산

콘 관입 시험, 물리 검층 등을 통해 얻어진 물성 값을 역산에 사용할 수 있으며 역산을 위한 제한 항으로 설정함이 가능하다. 선험적 물성 분포 벡터 $\mathbf{p}^0$ 를 정의하면, 복합역산은 $\mathbf{p}^0$ 에 가까운 해를 구하는 것으로 정의할 수 있다. 선험적 물성 분포 벡터와 구하고자 하는 변수 벡터의 차이를 다음의 함수로 정의한다.

$$\mathrm{H} = \sum\{w_i^0(p_i - p_i^0)\}^2 = [\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}^0]^T \mathbf{W}^0[\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}^0] \tag{9}$$

$\mathbf{W}^0$ 는 대각행렬로써 선험적 물성 분포의 신뢰도를 정의하는 역할을 한다. 정보가 없는 역산 변수에 대해서는 W_i^0 를 제로로 설정한다. 복합역산은 (2)와 (9) 식으로 정의되는 함수를 최소화하는 과정으로 귀착되며, 목적함수는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\Psi = \Phi + \eta\mathrm{H} \tag{10}$$

η 는 선험적 물성 분포 정보의 이용 정도를 조절하는 라그랑지 곱수로써, 0 인 경우 독립역산이 되며, 무한대인 경우에는 선험적 물성 분포 정보가 계산될 것이다. (10) 식의 대상함수를 최소로 하는 증분 벡터를 구하기 위한 정규 방정식은 다음과 같다.

$$[\mathbf{K} + \eta\mathbf{W}^0]\Delta\mathbf{p} = [\mathbf{J}^T\mathbf{We} - \eta\mathbf{W}^0(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}^0)] \tag{11}$$

Cross-gradient 를 이용한 복합 역산의 경우에는 유사도에 관계하는 항이 정규방정식의 우변항에만 존재함에 반해(식 8b), 이 경우에는 좌, 우변 모두에 존재함을 알 수 있다.

5. 물성간의 상관 관계를 이용한 복합역산

물성 간의 경험적 혹은 이론적 관계식을 이용하여 복합역산을 정의할 수 있다.

$$\mathbf{p}_A = \mathbf{f}(\mathbf{p}_B) \tag{12}$$

이 경우의 복합역산은 주어진 물성간의 관계식을 만족하는 해를 구하는 문제로 귀착된다. 상관 관계식 (12)를 이용하여 다음과 같이 새로운 함수를 정의한다.

$$\Gamma = \sum[w_{fi}\{p_{Ai} - f(p_{Bi})\}^2] \tag{13}$$

물론 A 탐사물성을 B 탐사 물성으로 변환시키는 상관관계식으로 제한 함수를 정의할 수도 있다. 가중계수 w_f 는 관계식의 통계적인 신뢰도를 역산에 포함시키기 위한 것으로, 물성 상관관계의 편차의 역수 등으로 정의할 수 있다. 위와 동일한 방법으로 라그랑지 곱수 α 를 이용하여 역산의 목적함수를 다음과 같이 정의한다.

$$\Psi = \Phi + \alpha\Gamma \tag{14}$$

(14) 식의 대상함수를 최소로 하는 증분 벡터를 구하기 위한 정규 방정식은 다음과 같다.

$$(\mathbf{K} + \alpha[\mathbf{W}_f\mathbf{CG}]^T[\mathbf{W}_f\mathbf{CG}])\Delta\mathbf{p} = \mathbf{J}^T\mathbf{We} - \alpha[\mathbf{W}_f\mathbf{CG}]^T[\mathbf{W}_f\mathbf{Cg}(\mathbf{p}_0)] \tag{15}$$

$\mathbf{g}(\mathbf{p}) = \{f(p_{A1}), f(p_{A2}), \ldots, f(p_{An}), p_{Aa}, p_{A2}, \ldots, p_{An}\}$, $\mathbf{G} = \partial\mathbf{g}(\mathbf{p})/\partial\mathbf{p}\big|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_0}$, $\mathbf{C}$ = 차이 연산자 행렬.

정규 방정식 (15)는 지하물성 분포 제한을 이용한 복합역산과 마찬가지로 복합역산을 위한 제한, 즉 선험적 정보를 담고 있는 항이 정규 방정식의 좌, 우변 항에 모두 포함되어

있다. Cross-gradient 를 기반으로 하는 복합역산에서는 라그랑지 곱수법을 이용하여 주어진 제한을 완전히 만족하는 해를 구하는 반면에, 선험적 정보를 이용하는 두 방법은 단지 목적함수에 제한 항으로만 삽입하여 선험적 정보를 만족하는 정도를 조절할 수 있도록 하였기 때문이다. 이는 물성에 관한 선험적 정보를 만족하는 정도가 동일한 측선의 경우에도 공간좌표에 따라 달라지며, 이 때문에 선험적 정보를 완벽하게 만족하는 경우는 거의 불가능하다는 사실을 고려한 것이다.

6. 결론

이 연구에서는 서로 다른 물성을 이용하는 두 종류의 물리탐사 자료의 복합역산을 위한 목적함수 및 정규방정식을 유도하였다. 이 연구에서 고찰한 복합역산법은 구조의 동일성을 가정한 cross-gradient 를 이용한 복합역산, 선험적으로 주어진 물성에 관한 정보를 이용하는 두 종류의 역산이다. 이 연구에서 3 종류의 복합역산에 대하여 구분하여 서술하였으나, 모두 평활화 제한 최소자승 역산을 기반으로 하여 유도하였기 때문에 cross-gradient 와 물성관계식을 동시에 이용하는 복합역산과 같이 각 복합역산법을 혼합하여 사용함도 가능하다.

감사의 글

이 연구는 한국지질자원연구원 전문연구사업인 ‘지하 정밀 영상화 융합기술 개발’ 과제의 일환으로 수행되었다.

참고문헌

de Nardis, R., Cardarelli, E. and Dobroka, M., 2005, Quasi-2D hybrid joint inversion of seismic and geoelectric data, *Geophysical Prospecting*, **53**, 705-716.

Gallardo, L.A. and Meju, M.A., 2004, Joint two-dimensional DC resistivity and seismic travel time inversion with cross-gradient constraints, *Journal of Geophysical Research*, **109**, B03311, doi:10.1029/2003JB002716

Gallardo-Delgado, L.A., Perez-Flores, M.A., and Gomez-Trevino, E., 2003, A versatile algorithm for joint 3D inversion of gravity and magnetic data, *Geophysics*, **68**, 949-959.

Ghose, R., 2006, Quantitative multi-tool data fusion in near-surface geophysics: new direction, *Proceedings of the 8’th SEGJ International Symposium – Imaging and Interpretation*, 464-469, 26-28 November, Kyoto, Japan.

Heincke, B., Jegen, M. and Hobbs, R., 2006, Joint inversion of MT, gravity and seismic data applied to sub-basalt imaging, *Proceedings of SEG 2006 Annual Meeting*, New Orleans

Jupp, D.L.B. and Vozoff, K., 1975, Resolving anisotropy in layered media by joint inversion, *Geophysical Prospecting*, **25**, 460-47.

Sasaki, Y., 1989, Two-dimensional joint inversion of magnetotelluric and dipole-dipole resistivity data, *Geophysics*, **54**, 254-262.

Tarantola, A., 1987, *Inverse Problem Theory*, Esevier Sci., New York.