

Chebyshev 직교다항식을 이용한 피로수명예측을 위한 반응표면근사화

진기철*, 백석흠**, 조석수***, 장득열****, 주원식*****

*강원대학교 대학원 자동차공학과, **동아대학교 대학원 기계공학과,

강원대학교 자동차공학과, *강원대학교 기계공학과, *****동아대학교 기계공학과

e-mail: j2696@hanmail.net

Response Surface Approximation for Fatigue Life Prediction Using Chebyshev Orthogonal Polynomials

Ki-Chul Jin*, Seok-Heum Baek**, Seok-Swoo Cho***, Deuk-Yul Jang**** and Won-Sik Joo*****

*Department of Vehicle Engineering, Kangwon National University

요 약

철도차량의 피로수명예측은 안전성과 신뢰성을 확보하고 높은 품질을 위한 중요한 관점이다. 이것은 최적설계 과정에서 추가의 제한조건으로 최소 피로수명값을 사용해서 접근할 수 있다. 하지만 피로수명은 회수의 함수이기 때문에 최적설계 적용에 제약이 따른다. 본 연구는 피로수명예측을 위한 최적설계에 대해 2단계 반응표면모델의 응용을 제안한다. 적용 예제로 컨테이너 화차의 제동 브라켓 엔드빔의 피로파손 문제에 대해 제안한 방법의 유효성을 설명한다.

1. 서론

철도차량의 피로수명예측은 안전성과 신뢰성을 확보하고 높은 품질을 위한 중요한 관점이다. 일반적으로 화차(freight train)는 복잡한 하중조건(동하중)을 받고 있고, 25년 이상 사용할 수 있는 수명이 요구되기 때문에 최적설계 과정에서 피로수명을 고려하는 내구성 만족이 중요하다.

이것은 최적설계 과정에서 추가의 제한조건으로 최소 피로수명값을 사용해서 접근할 수 있다.⁽¹⁾

하지만 피로수명은 회수(cycle)의 함수이기 때문에 미분 가능성이 불확실하고 최대 응력값보다 응력범위에 더 의존적인 경우가 많아 최적설계 적용에 제약이 따른다. 유한요소해석 기반의 피로해석은 재료 물성치, 하중처리, CAD기반 유한요소모델링의 3가지 입력항목과 관련된다. 이때 피로수명 문제를 고려한 설계는 다음 두 가지의 수치적 잡음(numerical noise)이 응답값인 수명에 포함될 수 있다.

(1) 레인플로사이클집계(rainflow cycle counting) 과정^(2,3)

(2) 설계변수의 변화에 따른 유한요소모델의 임계요소(critical element) 변화

레인플로사이클집계 과정은 변동하중이력을 일정 진폭 데이터와 비교할 수 있는 단순화된 하중이력으로 줄이는 것이다. 정수로 분류되는 단순화된 하중이력은 사이클집계 과정에서 낮은 대역범위를 제외한다. 따라서 피로관점에서 볼 때 피로손상이 최대 응력 값보다 응력범위에 의존적인 경우 피로수명 계산의 오차가 발생할 수 있다.

또한 피로해석의 결과는 유한요소모델의 임계요소 형상 변화에 민감하다. 임계요소 형상 변화는 도함수 기반의 최적설계 문제에서 불연속점이 생성되어 큰 오차의 원인이 된다.

반응표면모델(response surface model)의 유연한 성질(smoothness)은 피로해석 과정에서 수치적인 잡음을 효과적으로 제거할 수 있다.^(4,5) 일반적인 반응표면모델은 n 개($n>1$)의 설계변수에서 예측된 응답 y 의 관계를 근사한 것으로 낮은 차수의 다항식 형태인 유연한 함수이다. 이러한 유연한 함수의 성질은

수치해석과정의 수치적 잡음을 매끄럽게 하는 바람직한 특성을 가진다. 이것은 설계자에게 응답의 전체적인 관점(global view)에 대한 정보를 제공한다. 이 유연성은 간단한 도함수 기반의 최적화 계산을 가능하게 한다. 또한, 응력 및 피로해석 등의 서로 다른 영역을 담당하는 해석분야를 연결하고 상호 데이터 교환을 효율적으로 다룰 수 있다.

이상과 같은 관점에서 본 연구에서는 피로수명예측을 위한 최적설계에 대해 2단계 반응표면모델의 응용을 제안한다. 응력 및 피로수명예측을 위한 반응표면모델은 Chebyshev 직교다항식(Chebyshev orthogonal polynomial)⁽⁶⁻⁸⁾을 이용하였다. 피로수명계산은 응력-수명 곡선에 공칭 동적응력을 고려하기 위해 피로노치계수(fatigue notch factor)^(9,10)를 적용하였다. 피로노치계수는 유한요소모델에 균열을 도입하지 않고 계산된다. 적용 예제로 컨테이너 화차의 제동 브라켓 엔드빔(end beam)의 피로파손 문제에 대해 제안한 방법의 유효성을 설명한다. 이 작업은 피로수명 증가를 고려한 최소중량과 응력으로 구성되는 다중목적함수(multi-objective function)로 생각할 수 있다. 다중목적함수에 대한 피로수명의 효과적인 경계는 목표프로그래밍(goal programming)을 도입하여 결정하였다.

2. 피로수명예측모델

2.1 Chebyshev 직교다항식

설계변수가 직교한다는 것은 어떤 변수의 효과가 다른 변수의 효과에 영향을 미치지 않는다는 것이다. 따라서 응답의 변동크기를 해석하는 경우(예를 들면 불확실성, 피로) 설계변수를 직교시킨 실험계획이 효율적이다. 또한 직교다항식은 각항이 서로 독립적이기 때문에 계수의 추정을 저차항에서 고차항으로 축차적으로 구한다. 이것은 고차항의 계수를 모르거나 계수차이가 크게 되더라도 기저(base)를 정규화(normalize)할 수 있어 효율적인 회귀식의 표현이 가능하다.⁽⁶⁾

본 논문의 응력 및 피로수명에 대한 반응표면모델은 설계변수 x 의 차수가 n 인 Chebyshev 직교다항식 $p_n(x)$ 를 사용하여 2차 다항회귀모델 형태의 식 (1)을 이용한다.

$$y = b_0 + b_1(x - \bar{x})^2 + b_2 \left[(x - \bar{x})^2 - \frac{a^2 - 1}{12} h^2 \right] + b_3 \left[(x - \bar{x})^3 - \frac{3a^2 - 7}{20} (x - \bar{x}) h^2 \right]$$

$$+ b_n p_n(x) + \dots \tag{1}$$

$$p_0(x) = 1, (n = 0)$$

$$p_1(x) = x - \bar{x}, (n = 1)$$

$$p_2(x) = (x - \bar{x})^2 - \frac{(a^2 - 1)}{12} h^2, (n = 2)$$

$$p_n(x) = p_{n-1}(x)p_1(x) - (n-1)^2 \{ a^2 - (n-1)^2 \} h^2 p_{n-2}(x) / [4 \{ 4(n-1)^2 - 1 \}],$$

$$(n = 3, 4, 5 \dots)$$

여기서 \bar{x} : 설계변수의 평균, a : 수준수, h : 수준간격 계수이다. 차수 n 은 수준수 a 보다 작아야 하며 각 설계변수의 최대차수는 $a-1$ 이 된다. b_0, b_i 는 회귀계수로 식 (2)로 나타낸다.

$$b_0 = T/lm = \bar{y} \tag{2}$$

$$b_i = \frac{\sum_{k=1}^a p_i(x_k) y_k}{\sum_{k=1}^a p_i^2(x_k)}, (k = 1, 2, \dots, a)$$

여기서 $p_i(x_k)$ 의 x_k 는 x 의 각 수준수, y_k 는 각 수준에 대한 해석의 평균을 나타낸다. 직교다항식을 이용하는 장점은 분산분석(analysis of variance)에 있다. 직교다항식은 응답의 총변동을 1차, 2차, $n-1$ 차의 성분으로 분해하는 것이 용이하다. 따라서 각 차수의 민감도 평가에 의해 어떤 차수까지 고려한 식으로 표현하는 것이 적절한가의 판단을 할 수 있다.

2.2 응력보정단계

일반적인 동적하중을 받는 부품의 피로파손은 구멍, 홈, 모서리와 같은 기하학적 형상에 대한 응력집중 최소화가 결정적이다. SS400강으로 만든 용접된 엔드빔은 응력집중계수(stress concentration factor)와 동적하중에 대해 피로노치계수(fatigue notch factor)의 영향을 응력에 반영해야 한다. 본 논문은 노치 근방에 작용하는 평균응력이 피로한도와 같거나 클 때 파손이 일어난다고 가정한 Peterson의 평균응력모델(average stress model)⁽⁹⁻¹¹⁾을 사용한다. 이 과정은 다음과 같다.

[단계1] 노치민감도계수(notch sensitivity factor) q 를 구한다. q 는 0과 1사이에서 변한다.

$$q = \left(\frac{1}{1 + \frac{a}{r}} \right) \tag{3}$$

여기서 $a = (600/BHN)^{1.8} \times 10^{-3}$ 이고, 브리넬 경도수(brinell hardness number, BHN)는 $BHN \approx 2 \times S_u$ 이다. S_u 는 인장강도 r 은 필렛반경이다.

[단계2] 응력집중계수 K_t 를 구한다.

$$K_t = \sigma_{\max} / S \tag{4}$$

여기서 S 는 공칭응력이고, σ_{\max} 는 유한요소해석로

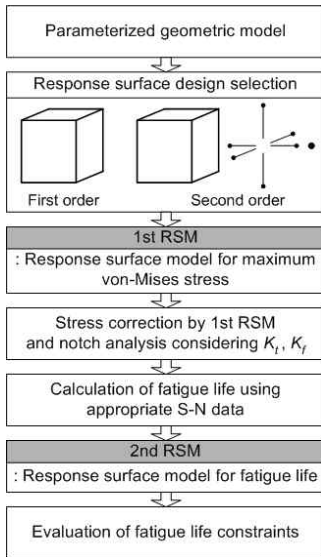


Fig. 1 Flow chart for fatigue life prediction

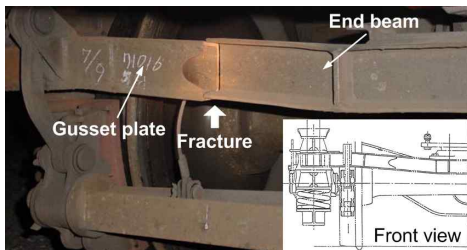


Fig. 2 View of the fractured end beam

구한 최대응력이다.

[단계3] $q = (K_f - 1/K_t - 1)$ 의 관계에서 피로노치계수 K_f 를 구한다. 본 논문은 보수적인 접근을 위해 K_f 를 HCF 영역에 걸쳐 일정하게 적용한다.

[단계4] 피로(동적)응력에 대해 피로노치계수를 고려한 엔드빔의 최종 응력식은 다음과 같다.

$$S_f = S_r \times K_f \quad (5)$$

여기서 S_r 은 응력에 대한 반응표면모델이다.

[단계5] 식 (5)에서 얻은 엔드빔의 보정응력 S_f 는 P-S-N 곡선(probabilistic stress-life curve)⁽¹²⁾을 이용해서 피로수명을 계산한다. 식 (6)은 P-S-N 곡선 형태를 나타낸 것이다.

$$\log(N) = \hat{\alpha} + \hat{\beta} \log(S_f) \pm 1.64\hat{\sigma}(\log N) \quad (6)$$

여기서 $\hat{\sigma}(\log N)$ 는 파단부의 대수 표준편차이다. 이 단계에 필요한 SS400강(0.16%C, 0.58% Mn)의 재료 물성치는 참고문헌^(12,13)에서 사용하였다.

3. 적용 예제

Fig. 1은 피로수명예측을 위한 순서를 나타낸 것으로 반응표면모델은 2단계로 구성된다. 1단계 RSM:

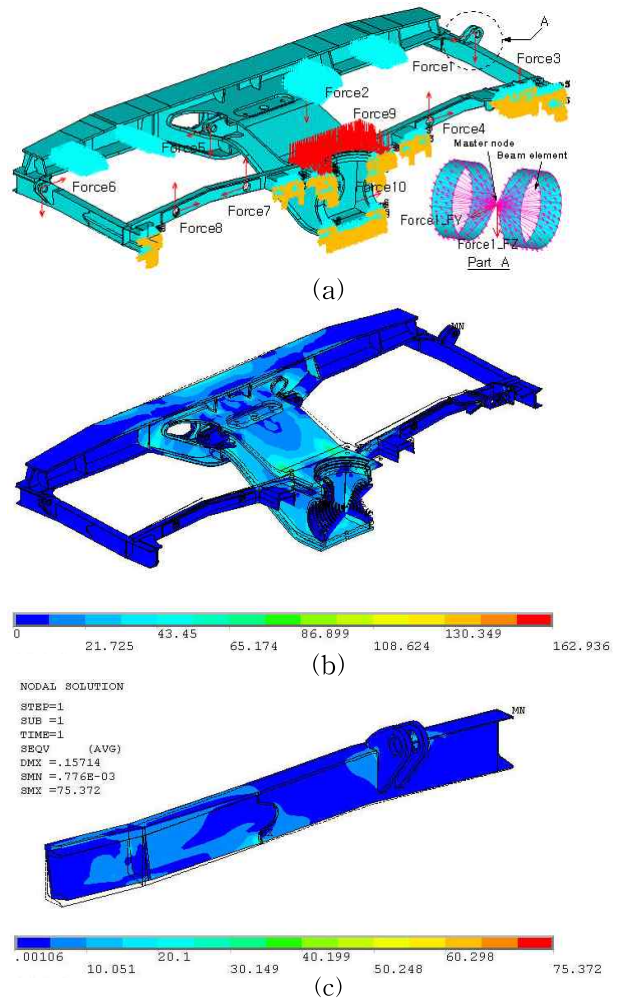


Fig. 3 Example of finite element analysis result for container freight car. (a) Load component and boundary conditions, and (b), (c) Von-Mises stress distribution of braking load

최대 응력에 대한 반응표면모델은 응력보정 단계에 적용한다. 2단계 RSM: 이 결과로부터 응력은 P-S-N 곡선을 이용해서 피로수명을 계산하고 이의 근사모델이 작성한다. 각 단계는 근사모델 기반의 반복적으로 진행된다. 이하의 절의 예제에서 각 단계를 상세히 설명한다.

3.1 Chebyshev 직교다항식

피로에 의한 엔드빔의 파손형태는 보강판 끝단보강판(gusset plate) 끝단에서 시작해서 두께방향으로 진전되어 파괴된다(Fig. 2). 엔드빔의 파손은 최악의 경우 화차 탈선의 원인이 된다.

Fig. 3의 유한요소해석결과는 CATIA에서 CAD 파일을 가져와 ANSYS에서 수행하였다. 사용한 요소는 SOLID88과 BEAM4이다. BEAM4요소는 엔드빔

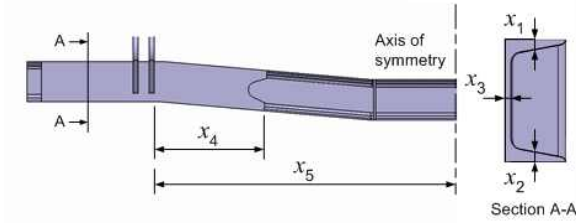


Fig. 4 Design variables of end beam

Table 1 Design variables and their levels

Variable	Level 1 (-1)	Level 2 (0)	Level 3 (1)
x_1	7 mm	9 mm	11 mm
x_2	7 mm	9 mm	11 mm
x_3	5 mm	7.5 mm	10 mm
x_4	100 mm	250 mm	400 mm
x_5	680 mm	710 mm	740 mm

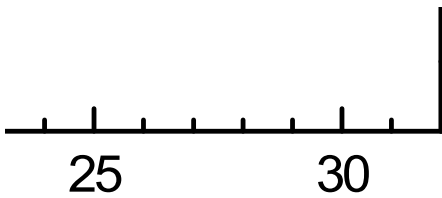


Fig. 5 Comparison between estimation and Chebyshev orthogonal polynomial

의 홀더한저(holder hanger)에서 전달되는 제동하중을 벡터성분으로 적용하기 위해 커플링구속(coupling constraint)에 이용하였다.

Fig. 4는 엔드빔 형상에 대한 5개의 설계변수를 나타낸 것이다. ㄷ형 형강의 단면 두께(x_1 , x_2 , x_3), 보강판 길이(x_4), 브라켓 위치(x_5)로 선정하였으며 Table 1은 설계변수와 그 수준값이다.

D-optimal 실험계획을 수행한 후 P-S-N 곡선에 의해 피로수명을 계산한다. 그 결과인 피로수명에 대한 분산분석에 의해 근사모델은 아래의 식 (7)에 나타낸다.

$$Y_{2ndRSM} = |f_{fatigue}| = -1384963 + 797718x_1 - 1022452x_2 + 461933x_3 - 15263x_3^2 - 845x_4 + 7.098x_4^2 + 765x_5 + 612345x_1x_3 - 153.77x_1x_4 - 1116.9x_1x_5 + 7201x_2x_3 - 145.96x_2x_4 + 1504.3x_2x_5 + 76.14x_3x_4 - 506.1x_3x_5 \quad (7)$$

Fig. 5는 식 (6)에서 얻어진 피로수명값과 근사모델

Table 2 Optimal design variable

Variable	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Optimum level	0.928	0.979	0.959	-0.516	-0.772
Optimum size	10.86	10.96	9.90	172.57	686.84

Table 3 Reanalysis solution

Step	Weight (kgf)	Fatigue life (cycle)
Initial	279	132628
Optimum	247.63	242014
Reanalysis	287.59	290975

에 의해 얻어진 값을 비교한 것이다. 근사값이 오차는 존재하지만 추정값의 위치와 함수값이 효과적으로 근사화되고 있음을 알 수 있다.

3.2 최적설계

피로를 고려한 최적설계 과정은 중량, 응력 등에 대해 다중목적함수(multi-objective function)를 가지므로 어떤 목적함수를 개선하기 위해서는 다른 목적함수의 희생이 필요하다. 엔드빔 설계 시 가장 중요하게 고려되어야 할 사항은 설계변수의 변화에 따른 피로수명과 중량이다. 피로수명을 최대화하는 최적설계 문제를 나타내면 다음의 식으로 표현할 수 있다.

$$\text{Maximize } Y_{\log N}$$

$$\text{Subject to } 25 \leq \text{weight} \leq 32$$

$$-1 \leq X_i \leq 1, \quad (i = 1, \dots, 5)$$

여기서 $Y_{\log N}$ 은 엔드빔의 피로수명에 대한 근사모델이다. 최적화 계산으로는 단일 목적의 최적화를 반복적으로 실행하는 SQP(sequential quadratic programming)를 사용하였다. Table 2와 Table 3은 최적해 결과를 정리한 것이다.

4. 결론

본 논문은 피로수명예측을 위한 2단계 반응표면모델의 응용과 그 최적설계 과정을 설명한다. 피로수명예측을 위한 반복진행 결과는 최적설계 루프에 통합된다. 이것은 능률적인 최적설계 과정을 가능하게 한다. 설명되는 예제와 같이 피로수명은 제안된 방법에 의해 증가되었다.

참고문헌

[1] El-Sayed, M. E. M., and Lund, E. H., "Structural Optimization with Fatigue Life Constraints," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 37, No. 6, pp. 1149-1156, 1990.