

# 유연매체의 거동해석: I. 정 · 동적 거동해석

## Analysis of Flexible Media: I. Static and Dynamic Analysis

지 중근† · 장 용훈\* · 박 노철\*\* · 박 영필\*\*\*  
**Jung-Geun Jee, Yong-Hoon Jang, No-Cheol Park and Young-Pil Park**

**Key Words** : Geometric Nonlinear(기하비선형), Total Lagrangian, Updated Lagrangian, Co-rotational, Green Strain, Almansi Strain.

### ABSTRACT

The media transport systems, such as printers, copy machines, facsimiles, ATMs, cameras, etc. have been widely used and being developed rapidly. In the development of those sheet-handling machineries, it is important to predict the static and dynamic behavior of the sheet with a high degree of reliability because the sheets are fed and stacked at such a high speed. Flexible media are very thin, light and flexible, so they behave in geometric nonlinearity with large displacement and large rotation but small strain. In the flexible media analysis, aerodynamic effect from the surrounding air must be included because any small force can make large deformation. In this paper, only the flexible media analysis is performed as early stage of analysis including aerodynamic effect. Through formulations and simulations for total Lagrangian(TL), updated Lagrangian (UL) and co-rotational(CR) method which are widely used for geometric nonlinear analysis, usefulness and reliability of each methods are investigated.

### 1. 서론

복사기, 프린터, 팩시밀리, ATM 등 유연매체를 취급하는 장치들이 널리 보급되어 있으며, 소형화 · 고속화 추세를 보이고 있다. 이러한 기기에서 피딩(Feeding) 시스템은 중요한 역할을 담당하고 있으며, 반송 시에 발생할 수 있는 체류와 잼의 예측은 피딩 기구를 설계하는데 있어서 중요한 인자라 할 수 있다. 유연매체는 매우 얇고, 가볍고, 잘 휘는 특성을 가지고 있으며, 대변형 · 소변형률의 기하비선형 거동을 보인다. 이러한 기하비선형에 대한 해석으로 Bisshopp 등은 외팔보의 대변형에 대한 엄밀해를 구하였다[1]. 70년대 들어서면서 FEM 이 발전함에 따라 FEM 을 이용한 비선형 문제 해석이 시도되기 시작하였으며, Bathe 등은 Total Lagrangian(TL) 방법과 Updated Lagrangian (UL) 방법을 제안하였다[2].

Wood 등은 여러 가지 구조요소에 대한 기하비선형 수식화와 해석 예를 보였고[3], Yang 등은 예측자(Predictor)와 수정자(Corrector) 개념을 도입하여 Updated Lagrangian 방법을 이용한 수식화와 해석 예를 보였고[4]. Co-rotational(CR)

방법은 Crisfield 를 [5] 선두로 해서 많은 사람들이 연구를 수행하였으며, TL 이나 UL 방법에 비해서 수식화가 간편하고 해석시간이 단축되는 장점이 있다[6-8]. Yang 등과 Wang 등은 비선형 문제에 대한 동적 해석을 수행하였다[9,10]. 유연매체는 매우 작은 힘에도 큰 변형이 일어날 수 있으며 공기 중에서 움직이는 유연매체의 거동을 예측하기 위해서는 공기의 영향을 고려해야만 함은 자명한 사실이다. 본 논문에서는 공기의 영향을 고려하기에 앞서 유연매체 만의 정적 및 동적 거동해석을 위한 FEM 수식화와 시뮬레이션을 수행한다.

### 2. 2-D에서의 응력과 변형률

본 절에서는 응력과 변형률의 관계를 살펴본다.

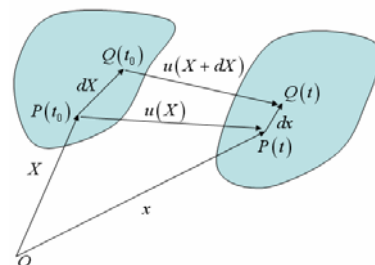


Fig. 1 Deformation

그림 1 에서 변위는 좌표계와 다음의 관계가 주어진다.

$$x = X + u \quad (2.1)$$

공간좌표계에서의 미소변위는 다음과 같이 나타낼

† 교신저자; 연세대학교 기계공학과 대학원  
 E-mail : jgjee@yonsei.ac.kr  
 Tel : (02) 2123-4677, Fax : (02) 365-8460

\* 연세대학교 기계공학부 부교수

\*\* 연세대학교 정보저장기기협동과정 부교수

\*\*\* 연세대학교 기계공학부 정교수

수 있다.

$$dx = \frac{\partial x}{\partial X} dX = F dX = \frac{\partial(X+u)}{\partial X} dX = [I + D_G] dX \quad (2.2)$$

Green strain 은 다음과 같이 정의되며

$$dr_n^2 - dr_0^2 = dx^2 - dX^2 = 2dX^T \varepsilon_G dX \quad (2.3)$$

다음의 값을 갖게 된다.

$$\varepsilon_G = \frac{1}{2} [D_G + D_G^T] + \frac{1}{2} D_G^T D_G = e + \eta \quad (2.4)$$

식(2.1)로부터 다음의 식이 또한 얻어질 수 있다.

$$dX = \frac{\partial X}{\partial x} dx = F^{-1} dx = \frac{\partial(x-u)}{\partial x} dx = [I - D_A] dx \quad (2.5)$$

Almansi strain 은 다음과 같이 정의되며

$$dr_n^2 - dr_0^2 = dx^2 - dX^2 = 2dx^T \varepsilon_A dx \quad (2.6)$$

다음의 값을 갖는다.

$$\varepsilon_A = \frac{1}{2} [D_A + D_A^T] - \frac{1}{2} D_A^T D_A = e - \eta \quad (2.7)$$

앞의 두 변형률에서 변형이 작다고 가정하여 고차항을 무시하면 다음과 같은 공칭변형률 (Engineering strain)이 얻어진다.

$$\varepsilon_E \approx \frac{1}{2} [D_G + D_G^T] \quad (2.8)$$

위에서 열거한 Green strain, Almansi strain 그리고 공칭변형률은 각각 2<sup>nd</sup> Piola-Kirchhoff 응력, Cauchy 응력, 공칭응력과 대응된다.

### 3. 기하비선형의 수식화

#### 3.1 Total Lagrangian 방법

Total Lagrangian 방법은 그림 2 에서 보이는 것과 같이 응력과 변위가 모두 C<sub>0</sub>를 기준으로 계산된다.

다음의 지배방정식에 대해서

$$\sigma_{ij,j} + b_i = \rho \ddot{u}_i \quad (3.1)$$

가상일의 원리를 적용하면 식(3.2)를 얻을 수 있다.

$$\int_V \delta u_i^T \rho \ddot{u}_i dV + \int_V \delta \varepsilon_{ij}^T \sigma_{ij} dV \quad (3.2)$$

$$= \int_V \delta u_i^T b_i dV + \int_{\Gamma_f} \delta u_i^T t^* d\Gamma_f$$

식(3.2)는 다음과 같이 간단히 나타낼 수 있다.

$$\delta U + \delta W^{\text{int}} = \delta W^{\text{ext}} \quad (3.3)$$

여기서,

$$\delta U = \int_V \delta u^T \rho \ddot{u} dV = \delta d^T M \ddot{d} \quad (3.4)$$

이 되며 위 식으로부터 질량행렬을 식(3.5)와 같이 정의할 수 있다.

$$M = \int_V N^T \rho N dV \quad (3.5)$$

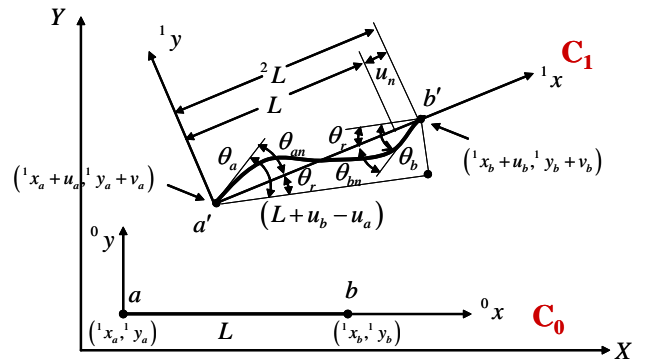


Fig.2 Element Displacement at TL

$\delta W^{\text{int}} = \int_V \delta \varepsilon^T \sigma dV$  은 증분형식 (Incremental Form)에서 다음과 같은 형태로 나타내어진다.

$$\int_V \delta_0 e_{ij}^T {}_0 S_{ij} dV_0 + \int_V \delta_0 \eta_{ij}^T {}_0 S_{ij} dV_0 = {}_0^2 R - {}_0^1 R \quad (3.6)$$

위 식을 풀어 쓰면 다음과 같이 나타낼 수 있으며

$$\begin{aligned} & \int_V (E e_{xx} \delta e_{xx} + 2S_{xy}^l \delta e_{xy}) dV \\ & + \int_V (E \eta_{xx} \delta e_{xx} + 2S_{xy}^n \delta e_{xy}) dV \\ & + \int_V (E e_{xx} \delta \eta_{xx} + 2S_{xy}^l \delta \eta_{xy}) dV \\ & + \int_V (E \eta_{xx} \delta \eta_{xx} + 2S_{xy}^n \delta \eta_{xy}) dV \\ & + \int_V ({}^1 \tau_{xx} \delta \eta_{xx} + 2{}^1 \tau_{xy} \delta \eta_{xy}) dV = {}^2 R - {}^1 R \end{aligned} \quad (3.7)$$

여기서,

$$S_{xy} = S_{xy}^l + S_{xy}^n \quad (3.8)$$

이 된다. 식(3.7)의 첫 항을 정리하면  $[k_e]$ 를 구할 수 있게 된다.

$$EA \int_0^L u' \delta u' dx + EI \int_0^L v'' \delta v'' dx = \delta d^T k_e d \quad (3.9)$$

식(3.7)의 둘째 항을 정리하면  $[s_1]$ 을 구할 수 있다.

$$\frac{1}{2}EA\int_0^L(u'^2+v'^2)\delta u'dx+\frac{1}{2}EI\int_0^L v''^2\delta u'dx$$

$$+EI\int_0^L u'v''\delta v'dx = \delta d^T s_1 d \quad (3.10)$$

식(3.7)의 셋째 항을 정리하면 식(3.11)이 되고  
이로부터  $[s_2]$ 를 구할 수 있다.

$$\frac{1}{2}\int_0^L \left[ EAu'\delta(u'^2+v'^2) + (EAu')\frac{I}{A}\delta(v''^2) \right] dx$$

$$+ \int_0^L EIv''\delta(u'v'')dx + \int_0^L (-EIv''')\delta(-u'v')dx \quad (3.11)$$

$$= \delta d^T s_2 d$$

식(3.7)의 넷째 항으로부터  $[s_3]$ 가 구해진다.

$$\frac{1}{2}\int_0^L \left[ \frac{1}{2}EA(u'^2+v'^2)\delta(u'^2+v'^2) \right. \\ \left. + \left\{ \frac{1}{2}EA(u'^2+v'^2) \right\} \frac{I}{A}\delta(v''^2) \right] dx \quad (3.12)$$

$$+ \int_0^L EIv''u'\delta(u'v'')dx + \int_0^L (-EIv''')\delta(-u'v')dx$$

$$= \delta d^T s_3 d$$

또한 식(3.7)의 다섯째 항으로부터  $[k_g]$ 가 구해  
지게 된다.

$$\frac{1}{2}\int_0^L \left[ {}^1F_x\delta(u'^2+v'^2) + {}^1F_x\frac{I}{A}\delta(v''^2) \right] dx$$

$$+ \int_0^L {}^1M\delta(u'v'')dx + \int_0^L {}^1F_y\delta(-u'v')dx \quad (3.13)$$

$$= \delta d^T k_g d$$

위 식(3.9-13)을 정리하면 다음과 같이 나타낼  
수 있다.

$$([k_e]+[k_g]+[s_1]+[s_2]+[s_3])\{d\} = \{{}^2f\} - \{{}^1f\} \quad (3.14)$$

### 3.2 Updated Lagrangian 방법

UL 방법은 TL 방법과 같은 과정을 거쳐서 수식  
화가 되며, TL과 다른 점은 응력과 가상일이  
모두  $C_1$  상태를 기준으로 한다는 점으로 두 번째  
항의 응력이 2<sup>nd</sup> Piola-Kirchhoff 응력이 아닌  
Cauchy 응력이 된다.

$$\int_V \delta e_{ij}^T S_{ij} dV + \int_V \delta \eta_{ij}^T \tau_{ij} dV = {}^2R - {}^1R \quad (3.15)$$

위 식으로부터 TL 방법에서와 같은 방법으로  
접선강성 행렬을 구할 수 있다.

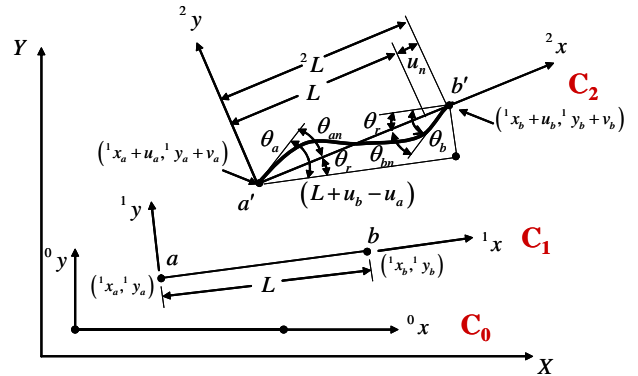


Fig.3 Element Displacement at UL

### 3.3 Co-rotational 방법

TL 법과 UL 법에서는 기준좌표계가 고정되어  
있지만 CR 법에서는 요소를 따라서 회전하는 좌  
표계를 도입한다. 그림 4는 CR 법을 적용한 빔  
요소를 나타낸 것이다.

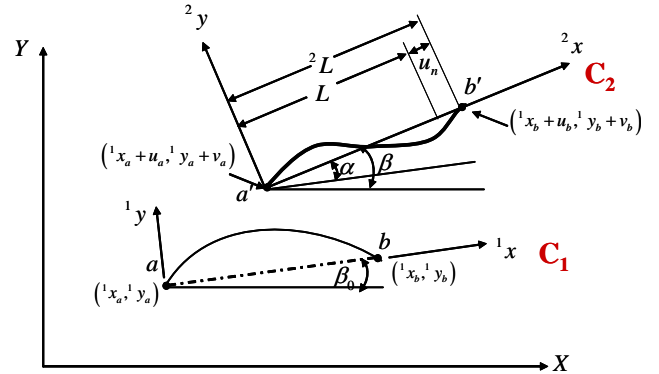


Fig.4 Element Displacement at CR

전체좌표계에서의 변위벡터는 다음과 같이 정  
의된다.

$$d = [u_1 \quad v_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \theta_2]^T \quad (3.16)$$

국부좌표계에서의 변위벡터는 다음과 같다.

$$d_l = [\bar{u} \quad \bar{\theta}_1 \quad \bar{\theta}_2]^T \quad (3.17)$$

$d_l$ 의 요소는 식(3.18)과 같이 계산된다.

$$\bar{u} = l_n - l_0$$

$$\bar{\theta}_1 = \theta_1 - \alpha$$

$$\bar{\theta}_2 = \theta_2 - \alpha \quad (3.18)$$

CR 법에서의 접선강성행렬  $K_t$ 는 다음과 같이  
구해진다.

$$K_t = B^T K_l B + \frac{zz^T}{l_n} N$$

$$+ \frac{1}{l_n^2} (rz^T + zr^T) (M_1 + M_2) \quad (3.19)$$

위 식에서  $r, z, \mathbf{B}, \mathbf{K}_l$ 은 각각 다음과 같이 정의 된다.

$$r = [-c \quad s \quad 0 \quad c \quad s \quad 0]^T \quad (3.20)$$

$$z = [s \quad -c \quad 0 \quad -s \quad c \quad 0]^T$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -c & s & 0 & c & s & 0 \\ -s/l_n & c/l_n & 1 & s/l_n & -c/l_n & 0 \\ -s/l_n & c/l_n & 0 & s/l_n & -c/l_n & 1 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$\mathbf{K}_l = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & 4EI & 2EI \\ 0 & 2EI & 4EI \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

#### 4. 수치적분 알고리즘

공학분야에서 수치적분 알고리즘으로 시간스텝의 크기와 관계없이 항상 안정한 뉴마크베타(Newmark- $\beta$ ) 방법이 널리 쓰이고 있다.

식(4.1)은 선형 시스템의 지배방정식을 나타낸다.

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = F \quad (4.1)$$

위 식은 시간  $t + \Delta t$ 에서도 평형조건이 만족하므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$M {}^t\ddot{U} + C {}^t\dot{U} + K {}^tU = {}^tF \quad (4.2)$$

식(4.2)에서  $t' = t + \Delta t$ 를 나타낸다. 식(4.2)에 뉴마크 관계식(4.3)을 대입하여 정리하면 식

$${}^t\dot{U} = {}^t\dot{U} + \Delta t \left[ (1-\gamma) {}^t\ddot{U} + \gamma {}^t\ddot{U}' \right] \quad (4.3)$$

$${}^tU = U + \Delta t {}^t\dot{U} + \Delta t^2 \left[ \left( \frac{1}{2} - \beta \right) {}^t\ddot{U} + \beta {}^t\ddot{U}' \right] \quad (4.4)$$

(4.4)를 얻게 된다.

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{\Delta t^2 \beta} M + \frac{\gamma}{\Delta t \beta} C + {}^tK \right) {}^tU = {}^tF \\ & + M \left[ \frac{1}{\beta \Delta t^2} {}^tU + \frac{1}{\beta \Delta t} {}^t\dot{U} + \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) {}^t\ddot{U} \right] \\ & + C \left[ \frac{\gamma}{\beta \Delta t} {}^tU + \left( \frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) {}^t\dot{U} + \Delta t \left( \frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) {}^t\ddot{U} \right] \end{aligned} \quad (4.4)$$

식(4.4)에서 구한 변위를 이용하여 속도와 가속도는 식(4.5)로부터 구해진다.

$${}^t\ddot{U} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} ({}^tU - {}^tU) - \frac{1}{\beta \Delta t} {}^t\dot{U} + \left( 1 - \frac{1}{2\beta} \right) {}^t\ddot{U} \quad (4.5)$$

$${}^t\dot{U} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} ({}^tU - {}^tU) + \left( 1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) {}^t\dot{U} + \Delta t \left( 1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) {}^t\ddot{U}$$

비선형의 경우에는 좀더 복잡한 과정이 필요하게 된다. 이산화된 가상일의 식으로부터 식(4.2)

가 비선형에서는 식(4.6)로 나타내어진다.

$$M {}^t\ddot{U}^{(i)} + C {}^t\dot{U}^{(i)} + {}^tR^{(i)} = {}^tF^{(i)} \quad (4.6)$$

내력벡터  ${}^tR$ 은 식(4.7)과 같이 선형화 된다.

$${}^tR^{(i)} = {}^tR^{(i-1)} + {}^tK^{(i-1)} \Delta U^{(i)} \quad (4.7)$$

식(4.7)을 식(4.6)에 대입하여 정리하면 식(4.8)이 얻어진다.

$$M {}^t\ddot{U}^{(i)} + C {}^t\dot{U}^{(i)} + {}^tK^{(i-1)} \Delta U^{(i)} = {}^tF - {}^tR^{(i-1)} \quad (4.8)$$

여기서, 다음의 관계가 성립한다.

$$\begin{aligned} {}^tU^{(i)} &= {}^tU^{(i-1)} + \Delta U^{(i)} \\ {}^t\dot{U}^{(i)} &= {}^t\dot{U}^{(i-1)} + \Delta \dot{U}^{(i)} \\ {}^t\ddot{U}^{(i)} &= {}^t\ddot{U}^{(i-1)} + \Delta \ddot{U}^{(i)} \end{aligned} \quad (4.9)$$

식(4.9)에서  $i=0$ 이면 시간  $t$ 에서의 값이 된다.

$$\begin{aligned} {}^tU^{(0)} &= {}^tU \\ {}^t\dot{U}^{(0)} &= {}^t\dot{U} \\ {}^t\ddot{U}^{(0)} &= {}^t\ddot{U} \\ {}^tK^{(0)} &= {}^tK \\ {}^tR^{(0)} &= {}^tR \end{aligned} \quad (4.10)$$

식(4.8)에 식(4.9)를 대입하여 미지항을 좌변으로 기지항을 우변으로 이항하면 식(4.11)이 얻어진다.

$$\begin{aligned} M \Delta \ddot{U}^{(i)} + C \Delta \dot{U}^{(i)} + {}^tK^{(i-1)} \Delta U^{(i)} \\ = {}^tF - {}^tR^{(i-1)} - M {}^t\ddot{U}^{(i-1)} - C {}^t\dot{U}^{(i-1)} \end{aligned} \quad (4.11)$$

식(4.11)에서  $i=1$ 을 대입하면 식(4.12)가 된다.

$$\begin{aligned} M \Delta \ddot{U}^{(1)} + C \Delta \dot{U}^{(1)} + {}^tK \Delta U^{(1)} \\ = {}^tF - {}^tR - M {}^t\ddot{U} - C {}^t\dot{U} \end{aligned} \quad (4.12)$$

1 회의 반복에서는 식(4.3)을 직접 변형하여  $\Delta \dot{U}^{(1)}$ ,  $\Delta U^{(1)}$ 를  $\Delta \ddot{U}^{(1)}$ 으로 나타낸다.

$$\Delta \dot{U}^{(1)} = \gamma \cdot \Delta t \cdot \Delta \ddot{U}^{(1)} + \Delta t {}^t\ddot{U} \quad (4.13)$$

$$\Delta U^{(1)} = \beta \cdot \Delta t^2 \cdot \Delta \ddot{U}^{(1)} + \Delta t {}^t\dot{U} + \frac{1}{2} \Delta t^2 {}^t\ddot{U}$$

2 회 이후의 반복에서는  ${}^t\dot{U}^{(i)}$ 와  ${}^tU^{(i-1)}$ 에 대하여 식(4.3)을 이용하여 그 차인  $\Delta \dot{U}^{(i)}$ 를  $\Delta \ddot{U}^{(i)}$ 로 나타낸다.  $\Delta U^{(i)}$ 도 같은 방법으로 구해진다.

$$\Delta\dot{U}^{(i)} = \gamma \cdot \Delta t \cdot \Delta\ddot{U}^{(i)} \quad (4.14)$$

$$\Delta U^{(i)} = \beta \cdot \Delta t^2 \cdot \Delta\dot{U}^{(i)}$$

1 회의 반복에서 식(4.12)에 식(4.13)을 대입하여 정리하면 식(4.15)가 얻어진다.

$$\begin{aligned} & (M + \gamma \cdot \Delta t \cdot C + \beta \cdot \Delta t^2 \cdot {}^tK) \Delta\dot{U}^{(i)} \\ &= {}^tF - {}^tR - M {}^t\ddot{U} - C {}^t\dot{U} - \Delta t \cdot C \cdot {}^t\ddot{U} \\ & \quad - \Delta t \cdot {}^tK \cdot {}^t\dot{U} - \frac{1}{2} \Delta t^2 \cdot {}^tK \cdot {}^t\ddot{U} \end{aligned} \quad (4.15)$$

2 회 이상의 반복에서는 식(4.8)에 식(4.14)을 대입하여 정리하면 식(4.16)이 얻어진다.

$$\begin{aligned} & (M + \gamma \cdot \Delta t \cdot C + \beta \cdot \Delta t^2 \cdot {}^tK^{(i-1)}) \Delta\dot{U}^{(i)} \\ &= {}^tF - {}^tR^{(i-1)} - M {}^t\ddot{U}^{(i-1)} - C {}^t\dot{U}^{(i-1)} \end{aligned} \quad (4.16)$$

## 5. 시뮬레이션 결과

본 절에서는 앞 절에서의 세가지 방법에 대한 수식을 이용하여 시뮬레이션을 수행한다. TL 방법과 UL 방법은 기준이 되는 위치만 다를 뿐 동일한 결과를 갖으며 UL 방법이 TL 방법에 비해서 효율적이다[2]. TL 과 UL 에서는  $[K_t]$  행렬의  $[k_e]$ 와  $[k_g]$ 만을 사용하여 해석하였고, 요소의 수는 4 개로 제안하였다. 유연매체의 물성치로 밀도는  $681.8 \text{ kg/m}^3$ , 영률은  $1.0 \text{ GPa}$ , 두께는  $0.1 \text{ mm}$ , 길이는  $0.1 \text{ m}$ 를 사용하였다. 먼저 엄밀해가 존재하는 간단한 정적 문제에 대해서 해석을 수행하였다.

그림 5 는 외팔보의 끝단의  $F_y = 10EI/L^2$ 의 힘을 가하였을 때의 처짐량과 모멘트 팔길이의 변화를 무차원하여 나타낸 것이다.

TL 법과 UL 법 그리고 CR 법에서 엄밀해와 잘 일치하는 해를 구할 수 있었다.

그림 6 은 외팔보의 끝단의  $M = 2\pi EI/L$ 의 모멘트를 가하였을 때의 처짐량과 모멘트 팔길이의 변화를 무차원하여 나타낸 것이다. CR 법에서는 약간의 차이를 보였지만 엄밀해와 잘 일치하는 해를 구할 수 있었으나 TL 가 UL 법에서는 상당한 오차를 보였다. 이는 CR 방법이 대회전(Large rotation)에 탁월한 성능을 보임을 나타낸다.

그림 7 은 수치적분 알고리즘을 확인하기 위한 해석으로 CR 법을 이용, 뉴마크베타 알고리즘을 적용하여 외팔보의 자중에 의한 진동 시에 끝단

의 위치를 시간에 대해서 그린 그림이다.

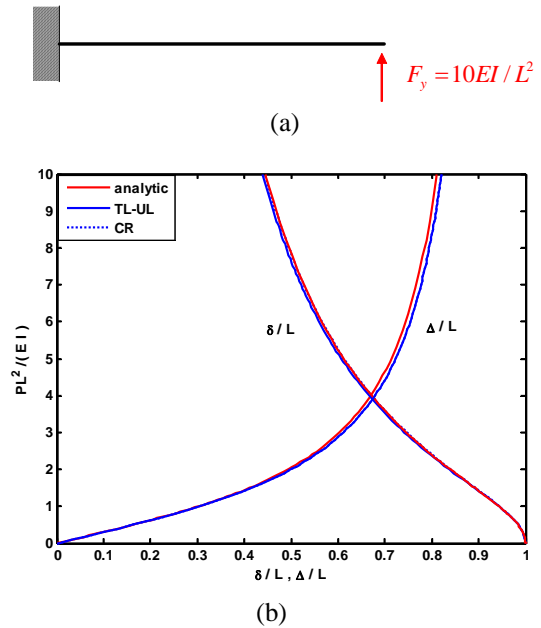


Fig.5 Deflection Shapes of Cantilevered Sheet with End Force

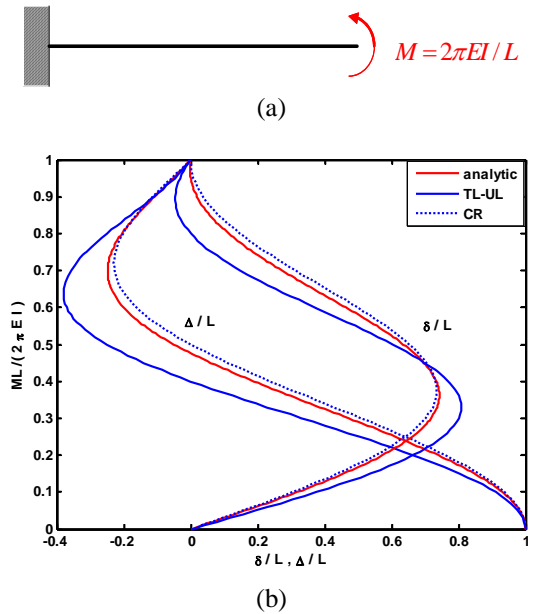


Fig.6 Deflection Shapes of Cantilevered Sheet with End Moment

공기의 영향이 없기 때문에 진동량이 줄어들지 않고 반복해서 일어남을 확인할 수 있다.

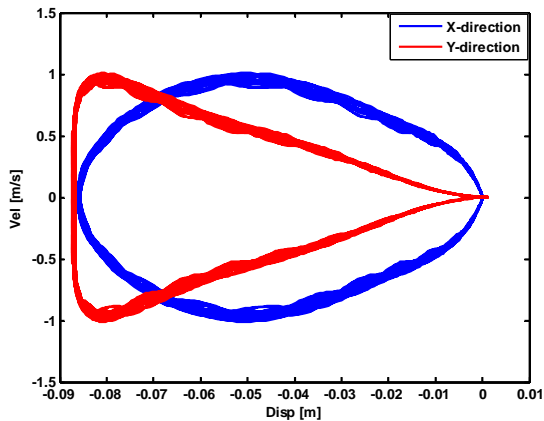


Fig.7 Phase Plot for the Trajectories of End Point of Cantilevered Sheet

## 6. 결론

기하비선형 특성을 갖는 유연매체를 해석하는 방법으로 가장 일반적으로 쓰이는 TL 법, UL 법, CR 법에 대한 수식화와 시뮬레이션을 수행 하였다. TL 과 UL 방법에서는 같은 결과를 얻었고 CR 에서는 약간의 차이를 보였으나, TL 법과 UL 법보다 좋은 결과를 얻을 수 있었다. 이것은 TL 과 UL 법에서 접선강성행렬로  $[k_e]$ 와  $[k_g]$  만 을 고려했기 때문으로 해석된다. 그러나, TL 법 과 UL 법은 수식이 복잡하고 연산시간이 오래 걸리는 단점이 있으며 CR 법이 가장 편리하고 효율적인 방법임을 확인할 수 있었다.

## 참고문헌

- (1) K. E. Bisshopp and D. C. Drucker, 1945, "Large Deflection of Cantilever Beams", Quarterly of Applied Mathematics, Vol.3, No.3, pp.272-275.
- (2) Klaus-Jürgen Bathe and Kaluk Ozdemir, 1976, "Elastic-plastic Large Deformation Static and Dyanmic Analysis", Computers and Structures, Vol.6, pp.81-92.
- (3) R. D. Wood, and O. C. Zienkiewicz, 1977, "Geometrically Nonlinear Finite Element Analysis of Beams, Frames, Arches and Axisymmetric Shells", Computers and Structures, Vol.7, pp.725-735.
- (4) Yeong-Bin Yang and Liang-Jenq Leu, 1994, "Non-linear Stiffness in Analysis of Planar Frames", Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol.117, pp.233-247.
- (5) M. A. Crisfield, 1990, "A Consistent Co-rotational Formulation for Non-linear, Three-dimensional, Beam-elements", Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol.81, pp.131-150.
- (6) H. A. Elkaranshawy and M. A. Dokainish, 1995, "Corotational Finite Element Analysis of Planar Flexible Multibody Systems", Computers and Structures, Vol.54, No.5,

pp.881-890.

(7) Kuo Mo Hsiao, Jer Yan Lin and Wen Yi Lin, 1999, "A Consistent Co-rotational Finite Element Formulation for Geometrically Nonlinear Dynamic Analysis of 3-D Beams", Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol.169, pp.1-18.

(8) Hong Hu Chen, Wen Yi Lin and Kuo Mo Hsiao, 2006, "Co-rotational Finite Element Formulation for Thin-walled Beams with Generic Open Section", Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol.195, pp.2334-2370.

(9) T. Y. Yang and Sunil Saigal, 1984, "A Simple Element for Static and Dynamic Response of Beams with Material and Geometric Nonlinearities", Int. J. Numer. Meth. Engrg., Vol.20, pp.851-867.

(10) D. W. Wang, H. S. Tzou and H. J. Lee, 2004, "Control of Nonlinear Electro/Elastic Beam and Plate Systems(Finite Element Formulation and Analysis)", Journal of Vibration and Acoustics, Vol.126, pp.63-70.