

# 맥놀이의 등가 링 이론에 관한 실험적 검토

## Experimental Investigation on the Equivalent Ring Theory of the Beat

김석현<sup>†</sup> · C.X.Cui\* · 박한길\*\*

S.H.Kim, C.X.Cui, H.G.Park

**Key Words:** Equivalent ring(등가 링), Slight asymmetry(미소 비대칭성), Mode pair(모드 쌍)  
Beat(맥놀이)

### ABSTRACT

In this study, we experimentally investigate the equivalent ring theory for a slightly asymmetric ring. The slightly asymmetric ring has mode pair and frequency pair due to the small asymmetry and this mode pair generates beat in vibration and sound. In this paper, a slightly asymmetric ring is modeled as the equivalent ring, i.e., the assemblage of a symmetric ring and imperfect point masses. The equivalent ring has the same mode pair condition as that of the original asymmetric ring. Effect of the additional mass attachment is investigated by the equivalent ring theory and the result is compared with those of the measurement and the finite element analysis. It is confirmed that the original ring and the equivalent ring show the same change in frequency and mode under the various additional imperfection mass conditions. The equivalent ring theory explains how the asymmetric elements influence the mode characteristics and provides useful information to tune the beat property.

### 1. 서론

본 연구에서는 미소 비대칭 링과 동일한 모드 쌍 조건을 만족시키는 등가 링 모델의 구성 방법론의 타당성을 실험적으로 검토한다. 미소 비대칭 구조물의 진동 문제는, 종, 타이어, 자이로 링이나 고속 회전 디스크 등에서 나타난다<sup>(1,2)</sup>. 축대칭 구조물의 진동 문제에 대해서 많은 연구가 수행된 것과 달리, 미소 비대칭 링의 연구는 그리 많지 않다. 미소 비대칭성은 원주 모드를 분리시켜 모드 쌍을 발생시킨다. 특히, 종형 구조물에서는 모드 쌍이 맥놀이라는 흥미로운 진동 현상을 만들고, 그 결과 방사되는 소리의 특성을 복잡하게 만든다<sup>(3)</sup>. 이러한 현상은 한국종의 소리를 독특하게 만드는 중요한 요인이 되고 있으며, 근래 구조 음향의 분야에서 꾸준

한 연구가 진행되어 왔다<sup>(4,5)</sup>. 본 연구에서는 미소 비대칭 링의 맥놀이 현상을 등가 링을 이용하여 검토한다. 등가 링 이론은 Fox가 레일레이-리프 법으로 구한 미소 비대칭 링의 이론 모델이다<sup>(6)</sup>. 등가 링은 원래의 미소 비대칭 링과 동일한 모드 쌍 조건을 만족시키며, 축대칭 링에 한 개 이상의 집중질량을 부가하여 구성한다. Fox는 이 모델을 모드 분리 현상을 제거하는 데 이용하였고<sup>(7)</sup>, 저자는 이론을 확장하여 모드 쌍 조건을 제어하고 원하는 맥놀이 특성을 만드는 방법을 제시하였다<sup>(8)</sup>. 그러나 제시된 방법들은 이론 해석 단계로서 아직까지 실험적 검증이 이루어지지 않은 상태이다. 본 연구에서는 미소 비대칭 링에 대한 실험적 검증을 통하여, 등가 링 모델의 타당성을 검증하고 문제점을 진단하고자 한다.

### 2. 등가 링 이론

미소 비대칭 링의 모드 쌍의 절점 위치가  $\psi_{L,H}$ 이고, 주파수쌍이  $\omega_{L,H}$ 일 때, 등가 링은 이와 동일한 모드 조건을 만족시킨다. 이러한 등가 링은 질량

† 책임저자: 정회원, 강원대학교 기계메카트로닉스 공학부

E-mail: [seock@kangwon.ac.kr](mailto:seock@kangwon.ac.kr)

Tel: (033)252-2595, Fax: (033) 257-4190

\* 강원대학교 대학원 메카트로닉스 전공

\*\* LG전자 DA 연구소

$M_0$ 의 축대칭 링과, 이에 부착된  $n$ 개의 집중 질량  $m_i$ 로 구성된다. 여기서, 미소 비대칭성으로 인하여 모드가 분리될 때, 미세하게 낮은 진동수의 모드를 L 모드로, 높은 진동수의 모드를 H 모드로 표기한다. 이러한 모드 분리는 모드별로 각각 발생한다. Fox는 Rayleigh-Ritz 법을 이용하여 모드 쌍의 고유진동수와 절점 위상을 다음과 같이 결정하였다<sup>(6)</sup>.

$$\tan 2n\psi_n = \frac{\sum_i m_i \sin 2n\phi_i}{\sum_i m_i \cos 2n\phi_i} \quad (1)$$

$$\omega_{nL,nH}^2 = \omega_{on}^2 \left[ \frac{1 + \alpha_n^2}{(1 + \alpha_n^2) + \sum_i m_i P_{i,n}} \right] \quad (2)$$

여기서,

$$P_{i,n} = [(1 + \alpha_n^2) \mp (1 - \alpha_n^2) \cos 2n(\phi_i - \psi_n)] / M_0 \quad (3)$$

$M_0$ 는 축대칭 링의 질량을,  $\phi_i$ 는  $i$ 번째 집중 질량의 원주상 위치를,  $\psi_n$ 는 링의  $n$ 차 진동 모드의 절점 위상,  $\alpha_n$ 은 축대칭 링의 반경방향 진동과 수직방향 진동의 진폭비로 다음 식으로 주어진다.

$$\alpha_n = \{(n^2 - 1)/2n\} \{1 + \beta(1 - n^2)\} + \{[(1 - n^2)^2 / 4n^2] \{1 + \beta(1 - n^2)\}^2 + 1\}^{1/2} \quad (4)$$

$$\beta = h^2 / (12R^2) \quad (5)$$

위 식에서  $R$ 은 링의 평균반경이다. 그리고 Flugge의 얇은 셸 이론에 근거하여 구해지는 축대칭 링의  $n$ 차 고유진동수는 다음과 같다.

$$\omega_{on} = (1/R) \sqrt{E/\rho(1 - \nu^2)} \{[(n - \alpha_n)^2 + \beta\alpha_n^2(1 - n^2)^2 / (1 + \alpha_n^2)]^{1/2} \quad (6)$$

여기서  $E$ 는 재료의 탄성계수,  $\rho$ 는 밀도,  $\nu$ 는 프와송 비이고,  $h$ 는 링의 두께이다. 식 (1)과 식 (2)는 삼각함수의 변환을 통하여 다음의 식 (7)과 식 (8)로 대체할 수 있다.

$$\sum m_i \sin 2n(\phi_i - \psi_n) = 0 \quad (7)$$

$$\sum m_i \cos 2n(\phi_i - \psi_i) = M\lambda_n, \quad \lambda_n = \frac{(\omega_{nL}^2 - \omega_{nH}^2)(1 + \alpha_n^2)}{(\omega_{nL}^2 + \omega_{nH}^2)(1 - \alpha_n^2)} \quad (8)$$

여기서,  $M = M_0 + \sum m_i$

위 식으로부터, 모드별로 모드조건을 만족시키는 등가 링을 구성할 수 있다. 즉, 식 (1), (2)로부터  $n$

차 진동모드 조건만을 만족시키는  $n$ 차 등가 링은 고유진동수 쌍  $\omega_{nL,nH}$ , 와  $n$ 차 모드의 L-모드 절점 위상  $\psi_n$ 을 충족시키는 조건으로부터 결정된다. 이 경우 축 대칭 링에 하나의 집중 질량  $m_{eq}$ 로 구성된 등가 링을 다음과 같이 결정된다.

$$m_{eq} \sin 2n(\phi_{eq} - \psi_n) = 0 \Rightarrow \phi_{eq} = \psi_n + \frac{\pi}{2n} \quad (9)$$

$$m_{eq} \cos 2n(\phi_{eq} - \psi_n) = M\lambda_n \Rightarrow m_{eq} = M\lambda_n \quad (10)$$

이 등가 링의  $n$ 차 진동의 고유진동수 값과, 모드 쌍의 절점위치는 모두 원래의 비대칭 링과 동일할 뿐만 아니라, 여기에 질량을 추가 혹은 제거할 때 발생하는 모드 변화도 원래의 비대칭 링과 동일함이 이론적으로 증명되었다<sup>(8)</sup>

선행연구에 의하면 등가 링에 두 번째 질량  $m_2$ 를 부착하여 변화된 고유진동수 쌍  $\omega'_{nL,nH}$ 와 모드 쌍 절점 위상  $\psi'_n$ 은 다음과 같이 결정된다.

$$\tan 2n\psi'_n = \frac{m_{eq} \sin 2n\phi_{eq} + m_2 \cos 2n\phi_2}{m_{eq} \cos 2n\phi_{eq} + m_2 \cos 2n\phi_2} \quad (11)$$

$$\omega'_{nL,nH}{}^2 = \omega_{on}^2 \left[ \frac{1 + \alpha_n^2}{(1 + \alpha_n^2) + m_{eq} P_{eq,n} + m_2 P_{2,n}} \right] \quad (12)$$

여기서,

$$P_{eq,n} = [(1 - \alpha_n^2) \mp (1 - \alpha_n^2) \cos 2n(\phi_{eq} - \psi'_n)] / M_o^* \quad (13)$$

$$P_{2,n} = [(1 - \alpha_n^2) \mp (1 - \alpha_n^2) \cos 2n(\phi_2 - \psi'_n)] / M_o^* \quad (14)$$

식(11)과 식(12)에서 질량  $m_2$ 의 크기와 부착 위치  $\phi_2$ 를 조정하면 변화된 고유진동수와 절점 위치를 조정할 수 있으며, 결과적으로 맥놀이 주기와 선명도를 조정할 수 있다.

### 3. 등가 링 이론의 실험적 검증

본 연구에서는 가장 중요한  $n=2$  모드를 대상으로 등가모델 이론을 유한요소해석과 실험적으로 검증한다. 검증에 사용한 초기 미소 비대칭 링의 제원은 Table 1과 같으며, Fig. 1은 실험 장면을 보인다.

Table 1 Dimension of the original ring

Average radius	R=0.199m
Average thickness	h=0.007m
Average width	d=0.04m
Mass	M=2.8166kg

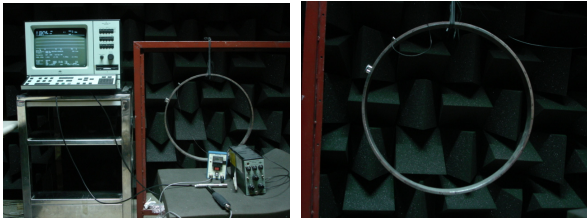


Fig. 1 Experimental set up and slight asymmetric ring.

Fig.2에서와 같이, 확대(zooming) 기능을 사용하여 정밀 측정된 주파수응답함수로부터 초기 비대칭 링의 고유진동수 쌍은  $\omega_{2L} = 112.391Hz$ ,  $\omega_{2H} = 112.711Hz$  로 나왔다. Fig.3에서 링을 32등분할 때, n=2 모드 쌍의 L모드의 배(H모드의 절점)는  $37.125^\circ$ (3과 4 사이)에 위치하고, H모드 배(L모드 절점)는  $82.125^\circ$ 에 위치하는 것으로 확인되었다.

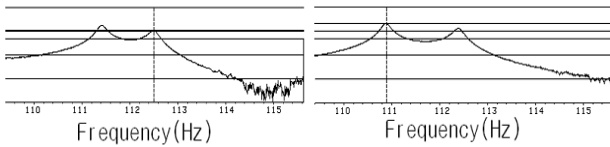


Fig. 2 Frequency response functions of the slight asymmetric ring.

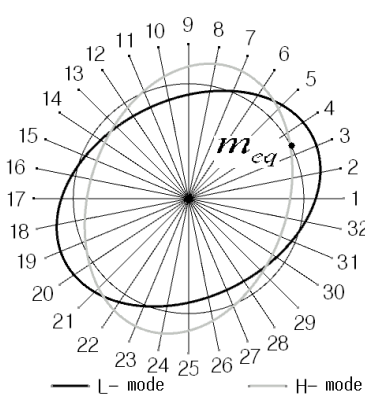


Fig.3 n=2 equivalent ring with a point mass.

n=2의 모드 쌍 조건을 만족시키는 등가 링의 등가 질량은 식(10)으로부터 다음과 같이 결정되었다.

$$m_{eq} = M \frac{(\omega_{nL}^2 - \omega_{nH}^2)(1 + \alpha_n^2)}{(\omega_{nL}^2 + \omega_{nH}^2)(1 - \alpha_n^2)} = 0.0134kg$$

$$m_{eq}/M_o = 0.00478$$

결과적으로 Fig. 3은 실제 링과 동일한 반경의 축대칭 링에  $37.125^\circ$  위치에 집중질량  $m_{eq}$ 가 부가된 등가 링으로, 축대칭 링의 질량은  $M_0 = M - m_{eq}$ 이다. 등가 링을 구하는 과정에서 미세하게 조정된 탄성계수는  $E=195.3Gpa$  이었다. 이 경우 축대칭 링만의 고유진동수는  $\omega_{02} = 112.818Hz$  로 계산되었다. 한편, 결정된 등가 링의 제원으로 유한요소해석을 통하여 구한 축대칭 링의 고유진동수는  $\omega_{02} = 107.590Hz$  로 나왔다.

축대칭 링의 고유진동수의 이론치가 유한요소 해석치에 비해 다소 높은 값을 보이는 것은 예상되는 결과이다. 그러나 두 결과 모두에서 L-모드 배의 위치는 불균일 질량이 부착된  $37.125^\circ$ 로 일치하였다. 등가 링 모델의 고유진동수 특성의 타당성 검증을 위하여 Fig.3의 등가 링에서 사용된 불균일 질량비를 현재 값( $m_{eq}/M_o = 0.00478$ )으로부터 가감하면서 고유진동수의 변화를 보았다. 먼저 모드 쌍의 절점과 배의 위치를 확인했을 때, 불균일 질량의 크기에 무관하게 질량 부착 지점은 정확하게 L 모드의 배가 되었다. Fig. 4는 이론, 유한요소 해석 및 측정에 의한 고유진동수를 비교한다.

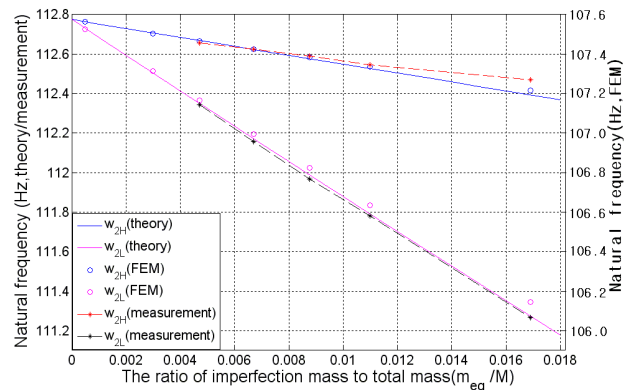


Fig. 4 Frequency vs. the ratio of imperfection mass to total mass.

Fig. 4에서 이론치와, 유한요소 해석치는 대칭 링에서부터 이미 약간의 초기 차이를 가지므로, 고유

진동수 값을 좌우 두 축으로 구분하여 표시하였다. 불균일 질량의 변화에 대한 L,H 주파수 쌍의 변화는 이론과 측정치가 거의 일치한다. 또한, 초기 대칭 링의 고유진동수 값 차이에도 불구하고 유한 요소 해석치와 이론치의 변화 양상은 매우 유사하다. 이와 같이 모드 쌍의 배치와 고유진동수 쌍에서 등가 링 모델은 불균일 질량의 변화에 따른 주파수 쌍의 변화 특성을 정확하게 기술한다. 불균일 질량 부착 지점에 따른 모드 쌍의 배치 특성을 확인하기 위하여 같은 크기의 질량( $m_{ad}$ )을  $90^\circ$ 간격( $37.125^\circ$ ,  $127.125^\circ$ ,  $217.125^\circ$ ,  $307.125^\circ$ )으로 옮겨 부착하면서 고유진동수를 확인하였다. 이 4개의 지점은 이론식 (1), (2)에 근거할 때, 동일한 질량 부가 효과를 발생시킨다. 이를 실험으로 확인한 결과를 Fig. 5에 보인다. 그림에서 4 가지의 불균일 질량 모두에서 4개 지점은 동일한 주파수 쌍을 발생시킴을 알 수 있다. 물론 모드 쌍의 절선 배치도 동일함도 확인되었다.

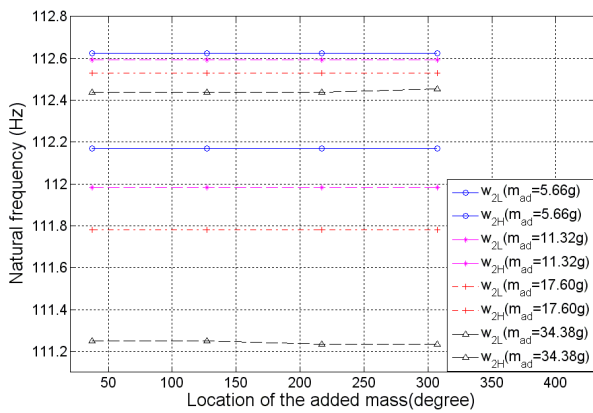


Fig.5 Frequency vs. location of the added mass.

이러한 실측 결과는 이 들 4개 지점 모두가 정확하게 L 모드의 절점(H모드의 배)가 됨을 의미하며, 미세한 비대칭성은 대칭 링의 절점 배치에 거의 변화를 가져오지 않음을 의미한다.

다음으로 비대칭 링에 제 2의 추가 질량을 부가할 때, 모드 쌍 및 주파수 쌍이 어떻게 변화하는지를 검토하였다. Fig. 6에서 등가 링에 추가한 두 번째 질량  $m_2$ 의 위치를  $\phi_2$ 로 표기한다. 처음 질량  $m_1(=m_{eq})$ 와 동일한  $m_2$ 를 사용할 때, L, H 모드 쌍의 주파수의 변화를 식(11), (12)로부터 구하여 Fig. 7에서 검토한다.

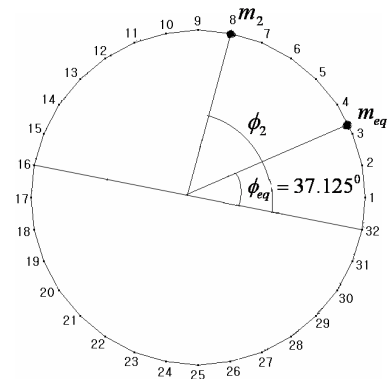
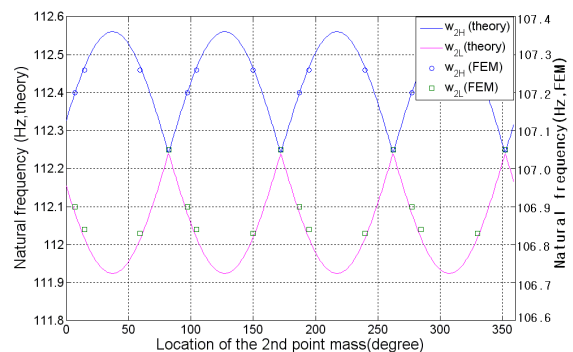
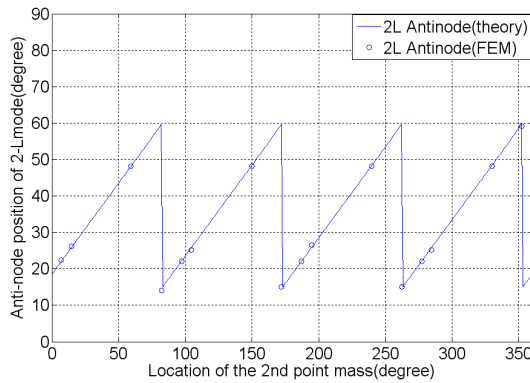


Fig. 6 n=2 equivalent ring model with two point mass.

Fig. 7 a)에서  $m_2$ 의 위치가  $m_{eq}$ 의 위치( $37.125^\circ$ )와 동일할 때 L, H 모드의 주파수 차이는 최대가 된다. 그 이유는 두 불균일 질량 효과가 정확하게 일치하기 때문이며, 최대 주파수 차이는  $90^\circ$ 간격의  $m_2$ 위치에서 주기적으로 발생한다. 반대로  $m_2$ 가 L-모드의 절점( $82.125^\circ$ )에 위치할 때는 두 질량의 부가 효과가 정확하게 상쇄되어, L,H 모드 쌍의 주파수는 같아지고, 그 결과 맥놀이 주파수는 영이 된다. 이러한 결과는 초기 대칭 링의 계산 오차를 제외하고는 이론과 유한요소 해석 결과가 완전히 일치한다. Fig. 7 b)는  $m_2$  부착 위치에 따른 L 모드 배점의 위치를 검토한 결과이다. 모드쌍의 배치 상태에서도 이론과 유한 요소해석 결과는 완전히 일치한다.



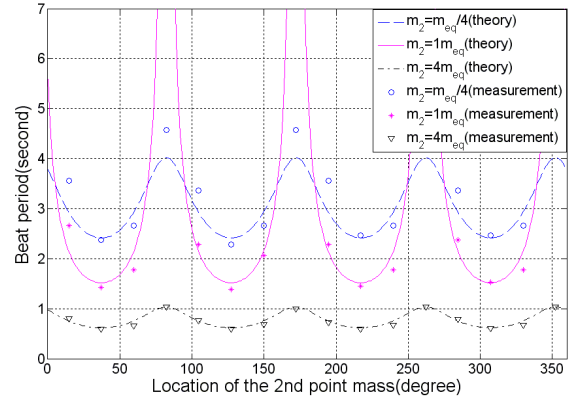
a) Frequency vs. the 2nd mass position



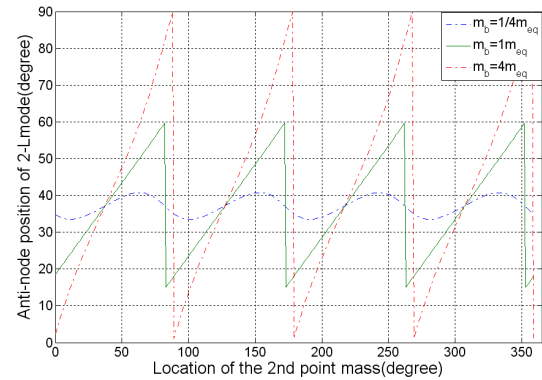
b) Anti-node position of L-mode vs. the point mass position

Fig. 7 Change of mode data by the 2nd point mass.

다음으로 추가 질량의 크기를 변화시키면서 부착 위치에 따른 맥놀이 특성의 변화를 실험적으로 검토한다.  $m_2 = \frac{1}{4}m_{eq}, m_{eq}, 4m_{eq}$ 의 세 경우, 부착 위치를  $0^\circ \sim 360^\circ$  사이에서 변화시키면서 맥놀이 주기의 변화를 이론과 측정으로 구한 결과를 Fig. 8 a)에 보인다. 그림에서 맥놀이 주기가 크다는 것은 두 주파수 쌍의 차이가 작음을 의미한다.  $m_2$ 의 크기에 관계없이  $\phi_2 = 82.125^\circ$  및 이와  $90^\circ$  간격으로 맥놀이 주기가 최대, 즉 주파수 쌍의 차이가 최소로 된다. 그 이유는  $37.125^\circ$ 에 위치한 등가 링의 초기 불균일 질량  $m_1$ 과 추가되는 질량  $m_2$ 의 질량 효과가 서로 상쇄되는 데에 기인한다. 반대로  $m_2$ 가  $37.125^\circ$  및 그와  $90^\circ$  간격의 위치에서 맥놀이 주기는 가장 짧아진다. 두 질량의 비대칭 효과가 중첩되어 비대칭성이 커지고 맥놀이 주파수가 커지기 때문이다. Fig. 8 a)에서 이러한 비대칭성에 의한 맥놀이 주파수 쌍의 변화 주기성은 계산치와 측정 결과가 매우 잘 일치한다. 다만,  $m_2$ 의 크기가 초기 불균일 질량  $m_1$ 에 비해 작을 때, 맥놀이 주기 값의 차이가 증가하는 점이 흥미롭다.



a) Beat period vs. 2nd mass position



b) Anti-node position vs. 2nd mass position

Fig. 8 Change of mode pair by the attachment of 2nd point mass

Fig. 8 b)는  $m_2$  위치 변화에 따른 L-모드 배의 위치를 검토한 결과이다.  $m_2$ 가  $37.125^\circ$ 에 위치할 때 L-모드의 배는 변함없이  $37.125^\circ$ 에 오고 이 현상이  $90^\circ$ 를 주기로 일어난다.  $m_2$ 가  $82.125^\circ$ 에 있을 때에는 배점의 위치가 급격히 변하고 있다. 이와 같은 절점의 이동은 타격 지점과 함께 뚜렷한 맥놀이를 만드는데 매우 중요한 요소가 된다. 전술한 등가 링 모델을 이용한다면, 링의 구조를 효과적으로 변경시킴으로써, 요구되는 주파수 쌍이나 모드 쌍의 배치를 결정할 수 있을 것이다.

#### 4. 결론

등가 링 이론을 사용하여 초기의 미소 비대칭 링과 동일한 모드 쌍 조건을 갖는 등가 링을 구성할 수 있었다. 미소 비대칭 링을 대상으로 실험한 결과, 불균일 질량을 변화시킬 때, 실제 링과 등가 링에서의 주파수 쌍의 변화는 거의 일치하였다. 2차

불균일 질량을 부착할 때 발생하는 주파수 쌍의 변화나 모드 쌍의 배치도 이론치는 실험 결과에 잘 접근하였다. 다만 2차 불균일 질량이 초기 불균일 질량에 비하여 작을 때, 이론과 측정 주파수 값의 차이가 커지는 문제는 추후 정밀 측정과 이론적 검토를 통하여 밝혀져야 할 문제이다.

### 참고문헌

- (1) D.Allaei, W.Soedel and T.Y.Yang, 1988, "Vibration analysis of non-axisymmetric tires", Journal of Sound Vibration, Vol.122, pp.11~29.
- (2) J.S.Hong, J.M.Lee, 1994, "Vibration of circular rings with local deviation", Journal of Applied Mechanics, Vol.61, pp.317-322
- (3) S.H.Kim, W. Soedel, J.M.Lee, 1994, "Analysis of the beating response of bell type structures", Journal of Sound Vibration, Vol.174(4), pp.517-536.
- (4) S.H.Kim, C.W.Lee, J.M.Lee, 2005, "Beat characteristics and beat maps of the King Seong-deok Divine Bell", Journal of Sound Vibration, Vol.281, pp.21-44.
- (5) H.G. Park, J.M. Lee, Y.J. Kang, and S.H.Kim, 2007, "A study on the mode pair of a slightly asymmetric circular ring with multiple deviations", Journal of Sound Vibration, accepted and in press.
- (6) C.H.J.Fox, 1990, "A simple theory for the analysis and correction of frequency splitting in slightly imperfect rings", Journal of Sound Vibration, Vol.142(2), pp.227-243.
- (7) A.K.Rourke, S.McWilliam, C.H.J.Fox, 2001, "Multi-mode trimming of imperfect rings", Journal of Sound Vibration, Vol.248(4), pp.695-724
- (8) H.G.Park, S.H.Kim, Y.J.Kang, 2007, "Analytical method of beat tuning in a slightly asymmetric ring", Journal of Mechanical Science and Technology, accepted and in press.