

비대칭 유한 요소 방정식으로 표현되는 고속 유연 폴리곤 미러 스캐너 모터의 유한 요소 불평형 응답 해석

Finite Element Analysis of Unbalance Response of a High Speed Flexible Polygon Mirror Scanner Motor with Asymmetric Finite Element Equations

서 찬 희* · 정 경 문* · 장 건 희†
Chanhee Seo, Kyungmoon Jung and Gunhee Jang

Key Words : Adjoint eigenvalue problem(수반 고유치 문제), Asymmetric finite element equation(비대칭 유한 요소 방정식), Eigenvalue problem(고유치 문제), FEM(Finite Element Method, 유한 요소법), Mass unbalance(질량 불평형), Mode superposition method(모드 중첩법), Polygon mirror scanner motor(폴리곤 미러 스캐너 모터), Rotor dynamics(회전체 동역학), Unbalance response(불평형 응답)

ABSTRACT

This paper presents a method to analyze the unbalance response of a high speed polygon mirror scanner motor supported by sintered metal bearing and flexible structures by using the finite element method and the mode superposition method considering the asymmetry of the gyroscopic effect and sintered metal bearing. The eigenvalues and eigenvectors are calculated by solving the eigenvalue problem and the adjoint eigenvalue problem by using the restarted Arnoldi iteration method. The decoupled equations of motion can be obtained from global finite element motion equations by using the orthogonal relation between the right eigenvectors and left eigenvectors. The decoupled equations of motion are used to analyze the unbalance response of a high speed polygon mirror scanner motor. The validity of the proposed method is verified by comparing the simulated unbalance response with the experimental results.

1. 서 론

폴리곤 미러 스캐너 모터(Polygon mirror scanner motor)는 레이저 빔 프린터(Laser beam printer)를 구동하는 고속 스핀들 모터이다. Fig. 1 과 같이 폴리곤 미러 스캐너 모터는 회전하는 폴리곤 미러와 회전부의 소결 베어링, 하우징, PCB 플레이트 등의 지지구조로 구성되어 있다. 프린터의 인쇄 품질을 향상시키기 위해서는 저진동 특성이 요구되는데 모터 조립과 가공 과정에서 불평형 질량이 발생하게 되고 이 불평형 질량은 시스템의 가진원이 되어 진동특성을 저해하는 요인된다. 저진동의 폴리곤 미러 스캐너 모터 시스템을 설계하기 위해서는 불평형 질량을 해석할 수 있는 해석 방법이 필요하다.

Jang 과 Seo⁽¹⁾는 회전체의 자이로스코픽(Gyroscopic) 효과와 유체 동압 베어링의 강성 및 감쇠로 인한 비대칭성의 영향이 작다고 가정하고 모드 중첩법을 이용하여 유체 동압 베어링으로 지지되는 유연 회전 디스크-스핀들 시스템, 공기

베어링과 피벗베어링을 가지는 헤드-서스펜션-액추에이터, 복잡한 형상을 가지는 베이스 플레이트로 구성된 유연 HDD 에 대한 강제 진동 해석을 수행하였다. 또한 Jang⁽²⁾ 등은 회전체의 자이로스코픽 효과와 소결 베어링의 강성 및 감쇠로 인한 비대칭성의 영향이 작다고 가정하고 모드 중첩법을 이용하여 폴리곤 미러 스캐너 모터 시스템의 불평형 응답을 수행하였다. 하지만 비대칭 방정식으로 표현되는 시스템에 대해서는 연성된 전체 운동방정식을 직접 적분법으로 해석하거나 수반 고유치 문제를 풀어 비연성된 운동방정식을 해석해야 한다.

본 논문은 폴리곤 미러 스캐너 모터의 유한 요소 모델을 개발하여 고유진동 해석과 수반 고유진동 해석을 수행하고 고유진동 해석 결과인 우 고유벡터와 수반 고유진동 해석 결과인 좌 고유벡터

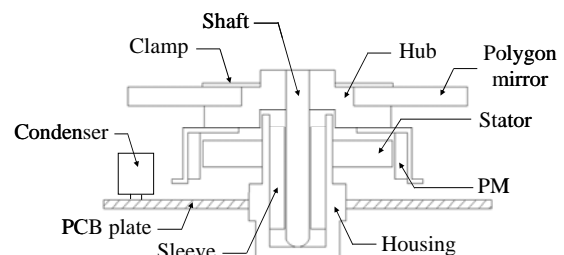


Fig. 1 Mechanical structure of a polygon mirror scanner motor

† 한양대학교 기계공학과
E-mail : ghjang@hanyang.ac.kr
Tel : (02) 2220-0431, Fax : (02) 2292-3406

* 한양대학교 대학원 기계공학과

의 직교성을 이용하여 폴리곤 미러 스캐너 모터의 운동방정식을 비연성시켜 불평형 응답 해석을 수행하고 실험을 통하여 해석결과와의 타당성을 검증한다.

2. 해석 방법

2.1 고유 진동 해석

본 연구에서는 Jang⁽³⁾ 등이 제안한 방법을 적용하여 모델링한 폴리곤 미러의 유한 요소 방정식과 폴리곤 미러를 제외한 회전체의 유한 요소 방정식, 소결베어링의 유한 요소 방정식, 지지구조의 유한 요소 방정식을 조합하여 전체 시스템의 유한 요소 방정식을 구성할 수 있다. 3차원 유한 요소를 포함하는 시스템의 유한 요소 방정식의 경우 일반적으로 자유도가 매우 크며 전요소의 자이로스코픽 항과 소결베어링의 비대칭 강성 및 감쇠 계수가 추가되어 아래와 같은 방정식으로 표현된다.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + (\mathbf{C} + \mathbf{G})\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (1)$$

여기서 \mathbf{M} , \mathbf{G} , \mathbf{C} , \mathbf{K} 는 각각 전체 시스템의 질량 행렬, 자이로스코픽 행렬, 감쇠 행렬, 강성 행렬이다. 비대칭 행렬을 포함하는 유한 요소 방정식의 고유치 문제는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\lambda^2 \mathbf{M}\mathbf{u} + \lambda(\mathbf{C} + \mathbf{G})\mathbf{u} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (2)$$

고유치의 수치해석을 위해 식(2)를 상태공간방정식 형태로 바꾸면 다음과 같은 행렬식으로 표현된다.⁽⁴⁾

$$[\mathbf{D}] \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \lambda \mathbf{u} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\lambda} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \lambda \mathbf{u} \end{Bmatrix} \quad \text{또는} \quad [\mathbf{D}]\{\Phi\} = \frac{1}{\lambda}\{\Phi\} \quad (3)$$

$$[\mathbf{D}] = - \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G} + \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4)$$

여기서 λ , Φ 는 각각 고유치와 고유벡터이다. 식(3)의 매우 큰 크기의 비대칭 행렬에 대한 복소 고유치 문제를 풀기 위해 Implicitly restarted deflation technique 을 포함하는 Arnoldi 반복법을 사용하였다.⁽⁵⁾ Arnoldi 방법의 전개에서는 식(4)와 같은 큰 크기의 희소 행렬(Sparse matrix)

에 대한 행렬-벡터 곱셈 연산과 선형 연립 방정식 연산이 필요하다. 본 연구에서는 전체 유한 요소 방정식의 희소성(Sparsity)을 이용한 행렬-벡터 곱셈을 수행하여 연산에 필요한 메모리 크기와 연산 시간을 줄였다.⁽⁶⁾ 선형 연립 방정식 연산에는 비대칭 행렬에 대한 수치 연산이 가능한 frontal technique 을 사용하였다.⁽⁷⁾

식 (1)에서 회전 요소의 자이로스코픽 효과와 소결베어링의 강성 및 감쇠계수에 의해 \mathbf{G} , \mathbf{K} , \mathbf{C} 행렬은 비대칭 행렬이 되며, 이 경우 고유 벡터 Φ 의 직교성(Orthogonality)은 성립하지 않는다. 이러한 비대칭 행렬로 표현되는 전체 유한 요소 방정식에서 고유 벡터의 직교성질을 이용하기 위해서는 고유치 문제(Eigenvalue problem)뿐만 아니라 수반 고유치 문제(Adjoint eigenvalue problem)도 해석하여 각각의 고유벡터를 구하여야 한다.⁽⁸⁾

식 (3)의 고유치 문제를 수반 고유치 문제로 바꾸면 다음과 같은 방정식으로 표현된다.

$$[\mathbf{D}]^T \{\Psi\} = \frac{1}{\lambda} \{\Psi\} \quad (5)$$

여기서 효율적인 수치연산이 가능하도록 각각의 요소 방정식에서 전치 행렬을 구하여 전체 유한 요소 방정식으로 조합하여 $[\mathbf{D}]^T$ 를 구성하였다. 식 (5)의 수반 고유치 문제를 Arnoldi 반복법을 사용하여 계산하면, 고유치 λ 와 고유벡터 Ψ 를 구할 수 있다. 고유치 문제와 수반 고유치 문제를 통하여 계산된 고유벡터는 각각 우 고유벡터(Right eigenvector) Φ 와 좌 고유벡터(Left eigenvector) Ψ 라고 하며, 우 고유벡터 Φ 와 좌 고유벡터 Ψ 사이에는 다음과 같은 직교 관계(orthogonal relation)가 성립한다.

$$\Psi_j^T \Phi_i = k_i \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, 2n) \quad (6)$$

$$\Psi_j^T [\mathbf{D}] \Phi_i = m_i \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, 2n) \quad (7)$$

$$\frac{k_i}{m_i} = \lambda_i \quad (8)$$

여기서 k_i , m_i 는 i 번째 복소 계수이며, λ_i 는 i 번째 고유치이다. δ_{ij} 는 Kronecker delta 이다.

2.2 좌-우 고유벡터의 직교성을 이용한 불평형 응답 해석

불평형 질량에 의한 가진력을 포함하는 폴리곤 미러 스캐너 모터의 전체 유한 요소 운동방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + (\mathbf{C} + \mathbf{G})\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{Q}(t) \quad (9)$$

여기서 $\mathbf{Q}(t)$ 는 불평형 질량에 의한 가진력 벡터이다.⁽²⁾ 식 (9)를 상태공간 방정식 형으로 바꾸면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C} + \mathbf{G} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}$$

또는

$$-\mathbf{[D]}\{\dot{\mathbf{r}}\} + \{\mathbf{r}\} = \{\mathbf{Y}\} \quad (10)$$

식(3)의 고유치 문제로부터 계산된 우 고유벡터 $[\Phi]$ 는 복소 공액쌍 (complex conjugate)이 되고 모드 중첩법에 의해 불평형 응답 $\mathbf{r}(t)$ 은 저차 2n 개의 우 고유벡터 $[\tilde{\Phi}]$ 를 사용하여 다음과 같이 근사화 할 수 있다.

$$\{\mathbf{r}(t)\} = [\tilde{\Phi}]\{\mathbf{z}(t)\} \quad (11)$$

$$[\tilde{\Phi}] = [\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \dots \quad \Phi_{2n}] \quad (12)$$

식 (11)을 식 (10)에 대입한 후 양변에 식 (5)의 수반 고유치 문제로부터 계산된 저차 2n 개의 좌 고유벡터의 전치인 $[\tilde{\Psi}]^T$ 를 곱하면, 우 고유벡터와 좌 고유벡터의 직교 관계에 의해 다음과 같은 비연성된 2n 개의 운동 방정식을 구할 수 있다.

$$-\mathbf{[\tilde{\Psi}]^T [D][\tilde{\Phi}]\{z\} + [\tilde{\Psi}]^T [\tilde{\Phi}]\{z\} = [\tilde{\Psi}]^T \{Y\}$$

또는

$$-m_i \dot{z}_i + k_i z_i = f_i \quad (i = 1, 2, \dots, 2n) \quad (13)$$

식 (13)의 양변을 $-m_i$ 로 나누어 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\dot{z}_i - \lambda_i z_i = \frac{f_i}{-m_i} \quad (i = 1, 2, \dots, 2n) \quad (14)$$

응답 $z_i(t)$ 는 시간에 대해 적분하여 구할 수 있다.⁽¹⁾ 이를 식(11)에 대입하면 질량 불평형에 의한 가진력에 대한 폴리곤 미러 스캐너 모터 전체 시스템의 불평형 응답 $\mathbf{r}(t)$ 를 구할 수 있다.

3. 결과 및 고찰

2 장의 해석방법의 타당성을 검증하기 위해 Fig. 2 에서와 같이 30,000rpm 으로 회전하는 고속 회전 유연 폴리곤 미러 스캐너 모터 시스템의 유한 요소 모델에 대해 고유진동 및 불평형 응답 해석을 수행하였다. 유연 회전 폴리곤 미러 스캐너 모터 시스템의 운동방정식은 회전에 따른 자이로스 코픽 항과 베어링의 비대칭 동특성 계수로 인해 비대칭 형태를 가지게 된다. 유연한 지지구조를 포함한 고속 회전 유연 폴리곤 미러 스캐너 모터 시스템의 전체 요소수는 7,110 개이고 유한 요소 모델의 자세한 설명과 실험과 비교한 고유 진동수, 고유 모드 형상은 참고 문헌(2)에서 설명된다.

3.1. 고유진동 해석과 수반 고유진동 해석

Table 1 은 고유진동 해석과 수반 고유진동 해석의 고유치 30 개(켈레 고유치 60 개)를 나타내는 것으로 2 장에서 설명한 것과 같이 각각의 고유치가 동일한 것을 알 수 있다. 이는 수반 고유진동 해석이 타당하게 수행된 것을 나타낸다.

또한 고유진동 해석의 우 고유벡터와 수반 고유진동 해석의 좌 고유벡터는 식 (6)과 같이 직교성 관계가 성립한다. Fig. 3 과 4 는 각각 식 (6)의 각 행을 식(15)와 같이 각 행의 대각성분으로 나눈 실수부와 허수부 값을 나타내는 것으로 대각성분이 1 이고 비대각성분이 0 이 것을 알 수 있다. 이는 좌 고유벡터와 우 고유벡터가 직교성 관계를 만족함을 나타낸다.

$$\frac{\{\Psi_i\}^T \{\Phi_j\}}{\{\Psi_i\}^T \{\Phi_i\}} = (\text{Real part}) + i (\text{Imaginary part}) \quad (15)$$

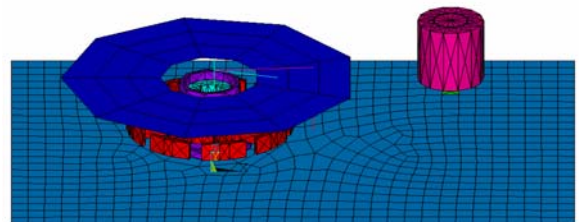


Fig. 2 Finite element model of a polygon mirror scanner motor

Table 1 Comparison between the real and imaginary eigenvalue of the eigenvalue problem and the adjoint eigenvalue problem for a polygon mirror scanner motor at 30,000 rpm

| Mode number | Eigenvalue problem | | Adjoint eigenvalue problem | |
|-------------|--------------------|----------------------|----------------------------|----------------------|
| | Real eigenvalue | Imaginary eigenvalue | Real eigenvalue | Imaginary eigenvalue |
| 1 | -682.77 | 219.88 | -682.77 | 219.88 |
| 2 | -36.77 | 250.26 | -36.77 | 250.26 |
| 3 | -15.22 | 539.90 | -15.22 | 539.90 |
| 4 | -9.28 | 646.66 | -9.28 | 646.66 |
| 5 | -18.61 | 1,165.37 | -18.61 | 1,165.37 |
| 6 | -0.85 | 1,452.59 | -0.85 | 1,452.59 |
| 7 | -18.22 | 1,801.89 | -18.22 | 1,801.89 |
| 8 | -19.96 | 2,033.00 | -19.96 | 2,033.00 |
| 9 | -27.99 | 2,618.86 | -27.99 | 2,618.86 |
| 10 | -4.40 | 2,715.03 | -4.40 | 2,715.03 |
| 11 | -43.39 | 2,755.00 | -43.39 | 2,755.00 |
| 12 | -4.92 | 3,961.34 | -4.92 | 3,961.34 |
| 13 | -14.22 | 4,346.73 | -14.22 | 4,346.73 |
| 14 | -12.42 | 4,499.76 | -12.42 | 4,499.76 |
| 15 | -1.15 | 5,101.48 | -1.15 | 5,101.48 |
| 16 | -8.83 | 6,137.53 | -8.83 | 6,137.53 |
| 17 | -26.52 | 7,006.51 | -26.52 | 7,006.51 |
| 18 | -55.80 | 7,412.70 | -55.80 | 7,412.70 |
| 19 | -81.90 | 7,879.39 | -81.90 | 7,879.39 |
| 20 | -1.65 | 8,662.54 | -1.65 | 8,662.54 |
| 21 | -81.89 | 8,808.88 | -81.89 | 8,808.88 |
| 22 | -0.02 | 9,055.20 | -0.02 | 9,055.20 |
| 23 | -35.58 | 9,315.89 | -35.58 | 9,315.90 |
| 24 | -0.91 | -9,773.01 | -0.91 | -9,773.01 |
| 25 | -0.91 | 9,773.01 | -0.91 | 9,773.01 |
| 26 | -9.97 | 10,268.95 | -9.97 | 10,268.95 |
| 27 | -0.34 | 11,407.85 | -0.34 | 11,407.85 |
| 28 | -4.49 | 12,076.78 | -4.49 | 12,076.78 |
| 29 | -2.35 | 12,953.53 | -2.35 | 12,953.53 |
| 30 | -0.59 | 13,393.78 | -0.59 | 13,393.78 |

Fig. 5 과 6 은 식 (7)의 각 행을 식 (16)과 같이 각 행의 대각성분으로 나눈 실수부와 허수부를 나타내는 것으로 대각성분이 1 이고 비대각성분이 0 이 것을 알 수 있다. 이는 식 (7) 역시 직교성 관계가 성립함을 나타낸다.

$$\frac{\{\Psi_i\}^T [D] \{\Phi_j\}}{\{\Psi_i\}^T [D] \{\Phi_i\}} = (\text{Real part}) + i (\text{Imaginary part}) \quad (16)$$

3.2. 불평형 응답 해석 및 실험

3.1 절에서 해석된 고유진동수와 고유진동벡터를 2.2 절에서 전개한 모드 중첩법에 의한 불평형 응답 해석 방법⁽²⁾에 적용하여 회전속도 30,000rpm 에서의 불평형 응답 해석을 수행 하였으며 불평형 질량 m, 편심량 e 는 실험모델에서 측정된 수치를 사용하였다.

중첩모드수에 대한 수렴성을 검증하기 위하여,

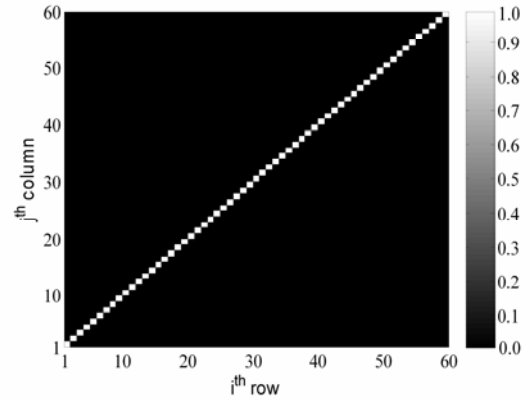


Fig. 3 Real part of eq. (15)

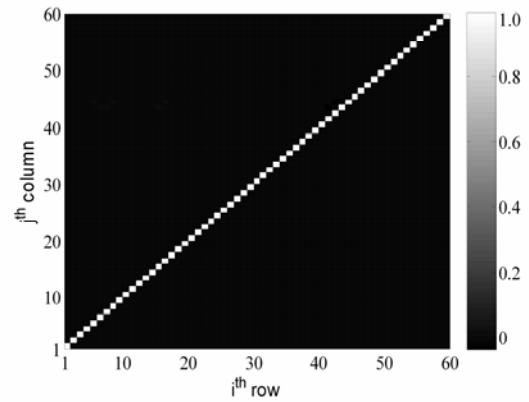


Fig. 4 Imaginary part of eq. (15)

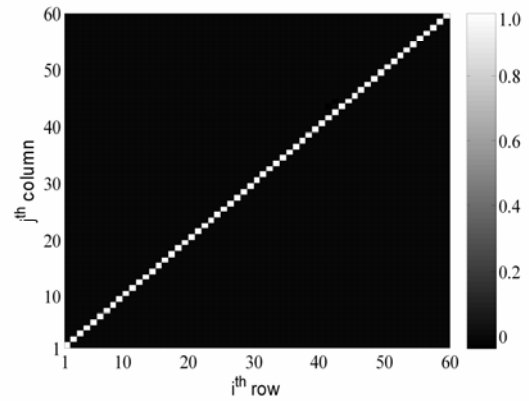


Fig. 5 Real part of eq. (16)

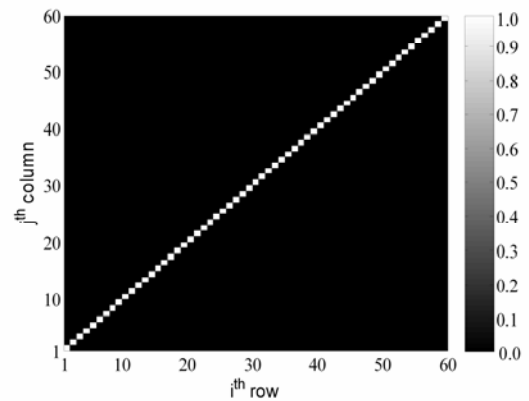


Fig. 6 Imaginary part of eq. (16)

중첩모드수에 변화에 대한 불평형 응답을 해석을 수행하였다. Fig. 7 과 8 은 회전속도 30,000rpm 일 때 중첩모드수에 변화에 따른 실험 측정점인 축(Shaft) 상단 중심에 해당하는 노드의 z 방향 불평형 응답의 최대값과 상대오차를 나타내고 Fig. 9 과 10 은 최소값과 상대오차를 나타낸다. 이전 근사값과 현재 근사값의 차로 구해지는 백분율 상대오차는 다음 식처럼 표현된다.⁽⁹⁾

Relative percent error

$$= \frac{\text{present approximation} - \text{previous approximation}}{\text{present approximation}} \times 100 \quad (17)$$

백분율 상대오차를 보면 z 방향 불평형 응답의 최대값과 최소값이 중첩모드 18 개에서부터 수렴하는 것을 알 수 있다.

불평형 응답 해석의 타당성을 검증하기 위하여 축방향 진동실험(Run-out testing)을 수행하여 해석결과와 실험결과를 비교하였다. 실험방법은 PCB 플레이트의 나사체결부를 나사로 지그에 고정된 상태에서 정전용량 변위센서(Gap sensor)를

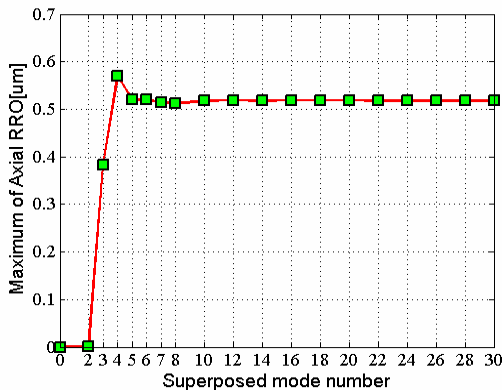


Fig. 7 Maximum axial RRO due to the superposed mode number

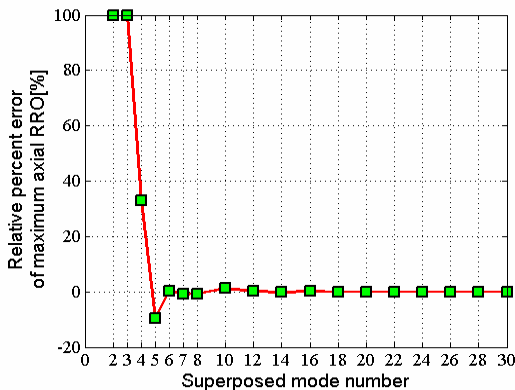


Fig. 8 Relative percent error of maximum axial RRO

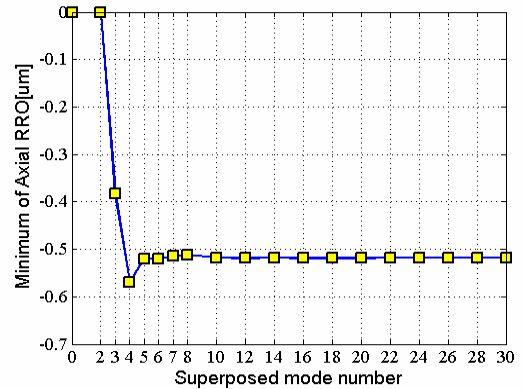


Fig. 9 Minimum axial RRO due to the superposed mode number

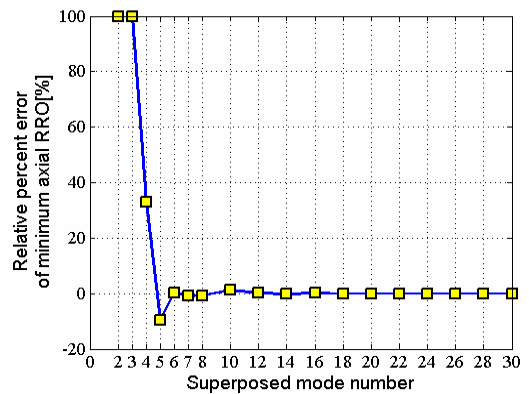


Fig. 10 Relative percent error of minimum axial RRO

사용하여 축의 축방향 진동을 측정하였다. 전체 진동성분에서 NRRO(Non repeatable run-out)를 제거하고 불평형 응답에 해당하는 RRO(repeatable run-out)만을 측정하였다.

Fig. 11 은 각각 회전속도 30,000rpm 일때의 축방향 RRO 실험결과와 실험 측정점에 해당하는 노드의 z 축방향 불평형 응답 해석결과(중첩모드 30 개)로 서로 일치함을 알 수 있다.

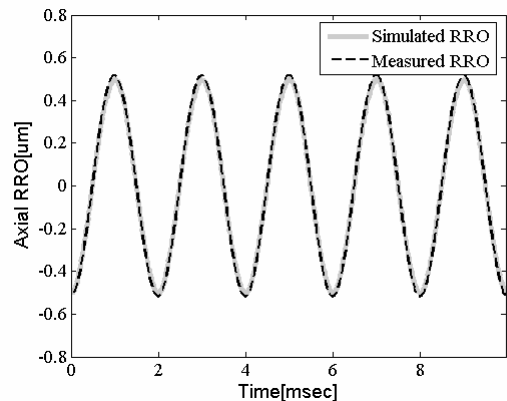


Fig. 11 Comparison of the simulated and measured axial RRO at 3,000 rpm

4. 결 론

본 연구에서는 회전에 따른 자이로스코픽항과 베어링의 비대칭 동특성 계수로 인해 비대칭 유한 요소 방정식으로 표현되는 시스템에 대해 유한 요소 고유진동 해석과 수반 고유진동해석 방법을 제시하였다. 또한 비대칭 운동방정식을 좌/우 고유벡터의 직교성을 이용하여 비연성된 운동방정식으로 구성하였다. 이를 모드 중첩법을 이용하여 불평형 응답 해석을 수행하고 실험을 통해 해석 방법 및 해석 결과의 타당성을 검증하였다.

본 연구에서 제안한 해석 방법은 회전과 베어링의 비대칭성을 포함한 임의의 유연 회전체의 강제진동 해석이 가능하다. 따라서 임의의 가진에 대한 회전체의 성능을 해석함으로써 회전체 설계에 활용될 수 있을 것으로 사료된다.⁽²⁾

참고 문헌

- (1) Jang , G. H. and Seo, C. H., 2007, "Finite-element shock analysis of an operating hard disk drive considering the flexibility of a spinning disk-spindle, a head-suspension-actuator, and a supporting structure", IEEE Transaction on Magnetics, vol.43, no.9., pp. 3738-3743.
- (2) Jang , G. H., Jung, K.M., Seo, C. H. and Kim, M.G., 2007, "Finite element analysis of unbalance response of high-speed polygon mirror scanner motor considering the flexibility", ASME/ISPS conference.
- (3) Jang , G. H., Han , J. H. and Seo, C. H., 2005, "Finite element modal analysis of a spinning flexible disk-spindle system in a HDD considering the flexibility of complicated supporting structure", Microsystem Technologies, vol.11, no.7, pp. 488-498.
- (4) Leonard Meirovitch, 1967, "Analytical methods in vibrations", Macmillan, pp. 412-413.
- (5) Lehoucq, R. B., and Sorensen, D. C., 1996, "Deflation techniques for an implicitly restarted Arnoldi iteration", SIAM J. of Matrix Anal Appl vol. 17(4), pp. 789-821.
- (6) Saad, Y., 1995, "Iterative methods for sparse linear system", PWS Publishing Company, Boston.
- (7) Hinton, E and Owen, D. R. J., 1977, "Finite element programming", Academic Press, London.
- (8) Leonard Meirovitch, 2001, "Fundamentals of vibrations", International ed., McGraw-Hill, pp. 345-355.
- (9) Chapra, Steven C. and Canale, Raymond P., 1988, "Numerical methods for engineers", 2nd ed., McGraw-Hill, p. 63