

## 2 자유도 비선형 연성시스템에서 내부공진과 안정성 변화

### Internal Resonance and Stability Change for the Two Degree Nonlinear Coupled System

김명구† · 박철희\* · 조종두\*

Myoung-Gu Kim, Chul-Hui Pak and Chongdu Cho

**Key Words** : Normal mode(정규모드), Bifurcation mode(분기모드), Manifold(다양체), Saddle-loop(안장고리)

#### ABSTRACT

To understand the concept of dynamic motion in two degree nonlinear coupled system, free vibration not including damping and excitation is investigated with the concept of nonlinear normal mode. Stability analysis of a coupled system is conducted, and the theoretical analysis performed for the bifurcation phenomenon in the system. Bifurcation point is estimated using harmonic balance method. When the bifurcation occurs, the saddle point is always found on Poincare's map. Nonlinear phenomenon result in amplitude modulation near the saddle point and the internal resonance in the system making continuous interchange of energy. If the bifurcation in the normal mode is local, the motion remains stable for a long time even when the total energy is increased in the system. On the other hand, if the bifurcation is global, the motion in the normal mode disappears into the chaos range as the range becomes gradually large.

#### 1. 서 론

현재 기술의 발전으로 유연하고 경량화 된 유연 구조물들이 많이 사용되고 있다. 유연 구조물들은 일반적인 선형 진동이론으로 설명이 되지 않는 준주기 운동, 도약현상, 분기현상, 혼동운동 등이 나타나고 있다. 그러므로 유연 구조물에서 구조물의 비선형성을 고려한 설계와 해석에 대한 개념과 연구가 필요하다. 일반적으로 선형계에서는 선형 정규모드가 존재하는 것과 같이 비선형계에서도 유사한 정규모드가 존재한다. 선형계에서 구조물의 공진현상은 언제나 정규모드의 근처에서 일어나고 있다. 비선형 진동현상을 연구하는 방법으로 정규모드(normal mode)의 개념을 이용하여 계의 비선형성을 해석하였다.<sup>(1,2)</sup>

유연 구조물의 동적특성은 매개변수의 변화에 따라 그 안정성이 바뀔 수 있으며, 구조물의 안정성 변화에 따른 분기(bifurcation)가 발생하여 일반적인 선형이론으로는 설명되지 않는 새로운 동역학적인 현상이 발생한다. 구조물에서 새롭게 나타나는 모드를 분기모드(bifurcation mode)라고 한다. 구조물에서 나타나는 분기모드에 의한 안정성 변화에 대한 연구가 중요하다. 정규모드를 이용한 비선형 현상들의 해석과 예측뿐만 아니라 시스템의 강제진동, 혼동운동 해석에도 정규모드의 개념을 사용할 수 있다. 비선형 정규모드 연구에서 Vakakis는 포앙카레 사상도를 사용하여 비선형 시스템의 global dynamics를 해석적 방법과 수치적 방법을 사용하여 연구하였다. 특히 시스템의 내부공진과 분기가 일어날 때 포앙카레 사상도에서 동역학적인 변화에 관심을 집중하였다.<sup>(3,4)</sup> 그러므로 시스템의 강제진동이 정규모드와 밀접한 관계가 있다는 가정 하에서 비선형 강제진동을 정규모드의 개념을 이용하여 2자유도 연성시스템의 비선형 특성을 규명한 연구이다.

† 책임저자 : 인하대학교 기계공학과  
E-mail : mgkim21@hotmail.com  
Tel : (032) 860-7321, Fax : (032) 868-7321

\* 인하대학교 기계공학과

#### 2. 정규모드와 안정성 해석

## 2.1 정규모드

비선형 운동방정식에서 다음과 같은 조건을 만족하는 경우에 정규모드로 표현할 수 있다.

$$\ddot{x} + \frac{\partial V(x)}{\partial x} = 0 \quad x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$$

- ①  $x_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ )은 같은 진동수를 갖는다.
- ②  $x_i(\hat{t}) = 0$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ )인  $\hat{t}$ 가 존재한다.
- ③  $t_i \neq t_o \Rightarrow \dot{u}_i(t_i) = 0$  가 존재한다.
- ④  $\forall x_i(\bar{t})$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )은  $x_j(\bar{t})$  ( $j = 1, 2, 3, \dots, n \quad i \neq j$ )의 single valued function이다.

모든 질량  $m_i$ 은 동일한 진동수를 갖는 주기운동을 하며,  $m_i$ 은 같은 시각에 평형상태가 된다.  $m_i$ 은 같은 시각에 최대변위에 도달한다. 임의의 시간  $t$ 일 때, 한 질량  $m_i$ 의 변위  $x_i(t)$ 를 알 수 있다면 나머지 질량의 변위  $x_j(t)$  ( $i \neq j$ )는  $x_i(t)$ 의 단일함수로 표현된다. 정규모드는 선형계에서 매우 중요한 물리적 의미를 갖는다. 선형계에서 가진주파수가 계의 고유주파수에 가까이 있을 때 시스템에 공진현상이 발생한다. 계는 선형이나 비선형이나 또는 가진력에 상관없이 시스템은 필수적으로 정규모드의 형태로 진동을 하고 있다. 정규모드와 분기현상이 비선형 시스템 동역학에 큰 영향을 미친다. 비선형 정규모드는  $N$  자유도를 갖는 보존시스템에서 특별한 해를 갖는다. 이것은 선형시스템의 일반적인 정규모드와 유사한 특성을 갖고 있다. 정규모드의 안정성과 강제진동의 안정성이 매우 밀접한 관계가 있다는 것은 매우 잘 알려져 있다. 그러므로 강제진동의 안정성을 해석하는데 정규모드의 안정성 개념을 적용할 수 있다.<sup>(12)</sup>

## 2.2 분기모드

일반적으로 비선형 미분방정식에서 정규모드라고 하는 어떤 주기적인 운동들을 말한다. 시스템 전체에너지  $h$ 가 매우 적은 경우에는 정규모드는 언제나 안정되고 규칙적인 운동을 한다. 그러나  $h$ 가 커져서 어떤 임계점에 도달하게 되면 정규모드는 불안정해지고 운동 또한 불규칙적인 운동으로 변화한다. 시스템의 안정성 변화를 포아카레 사상도에 나타내면 Fig. 1과 같이 나타낼 수 있다. 안정된 타원 중심점(elliptic center)이 불안정한 안장점(saddle point)으로 변화하게 된다.

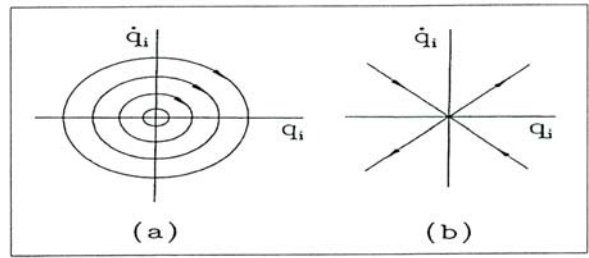


Fig. 1 Poincaré's maps to show the stability change of periodic motions in hamiltonian systems : (a)center, (b)saddle.

안장점에서 안정한 다양체(manifold)와 불안정한 다양체는 서로 만나서 안장고리(saddle-loop)를 형성하거나 에너지  $h$ 가 더 증가하면 서로 횡방향으로 교차를 해서 homoclinic tangle을 형성하고 혼돈현상을 나타낸다. 이와 같은 현상을 Smale-Birkhoff theorem에 의해서 잘 알려져 있다. 각각의 경우 안장고리 안에는 새로 생긴 주기적인 운동이 발생하고 있다. Fig. 3에 heteroclinic일 때도 동일한 방법으로 나타난다. 각각의 경우 시스템의 대칭성을 가지는 경우에 안장고리 형태로 주로 나타난다.<sup>(6,7)</sup>

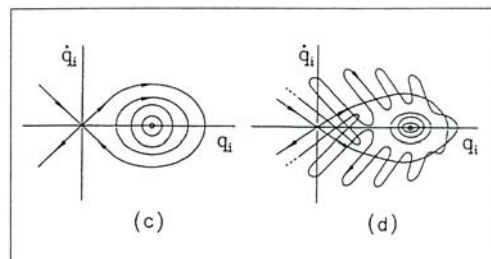


Fig. 2 The formations of a saddle-loop and homoclinic tangle : (c)saddle, (d) homoclinic tangle.

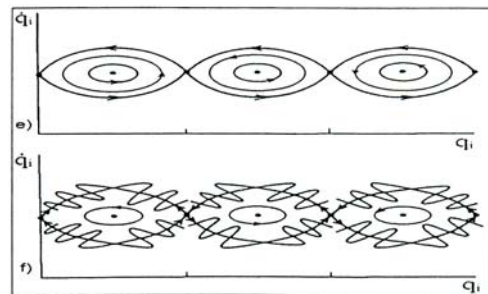


Fig. 3 The formation of a heteroclinic saddle-loop and heteroclinic tangle: (e) heteroclinic saddle-loop, (f) heteroclinic tangle

### 2.3 Synge's Stability

정규모드에서 kinematico-static sense에 의한 Synge의 안정성 개념은 궤도 안정성과 동일하다. 그리고 큰 에너지 레벨을 갖은 운동에 대해서도 적용이 가능하며, 강한 비선형성을 갖은 시스템에서도 적용이 가능한 장점이 있다. 해밀토니안 시스템을 갖는 동역학 시스템을 연구하기 위해 리만(riemann)기하학의 개념이 사용되었다. 2개의 설정공간(configuration space)  $p_1$  과  $p_2$ 를 통과하는 궤적은 자코비(jacobi)의 최소작용원리(least action principle)에 의해서 geodesic curve이다.<sup>(8)</sup>

$$\delta \int_{p_1}^{p_2} \sqrt{2(h - V(q))} ds = 0 \quad (1)$$

$$\text{where } ds^2 = \sum m_{ij} dq_i dq_j$$

시스템의 안정성을 결정하려고 하는 정규모드를 C라고 하자. 어떤 순간에 unperturbed trajectory C 위의 한 점으로부터 perturbed trajectory C\*으로의 disturbance vector  $\vec{\beta}$ 는 C에 직교한다. 이 벡터  $\vec{\beta}$ 는 Lyapunov 개념인 시간의 동시성(simultaneity)조건이 아닌 직교성 조건으로 정의된다. 모든 시간 t와 전체 에너지를 변화시키지 않는 모든 perturbed trajectory에 대해서  $\vec{\beta}$ 가 영구적으로 작게 유지될 때를 kinematic-static sense에 의해 안정하다고 한다. 이 개념은 궤도 안정성 개념과 동등하다. 정규모드의 안정성이 변할 때 새로 생기는 모드의 형태는 disturbance vector  $\vec{\beta}$ 의 형태를 가진다. 2자유도 시스템에 대해서  $\vec{\beta}$ 의 크기  $\beta$ 는 다음과 같은 방정식으로 표현이 된다.

$$\ddot{\beta} + (K\nu^2 + \sum V_{ij}n_i n_j + 3\nu^2 x^2)\beta + 2x\delta h = 0 \quad (2)$$

여기서

$K$  : Gaussian curvature of the configuration space at C

$\nu$  : velocity of the motion along C

$V_{ij}$  : the second partial derivatives of  $V(x, y)$

$n_i, n_j$  : unit vector normal to C

$x$  : curvature of C

$\delta h$  : infinitesimal difference in energy h between C and C\*

설정공간(configuration space)이 euclidean이므로 곡선 C는 이 경우 선형으로 가정되고 곡률  $K$ 와  $x$ 는 사라진다. 일정한 전체 에너지  $h(\delta h = 0)$ 에 대해 위의 방정식은 Hill's 방정식의 형태로 변환된다.

$$\ddot{\beta} + Q(\beta) = 0 \quad (3)$$

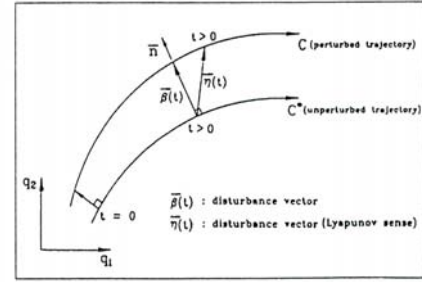


Fig. 4 Disturbance vector  $\vec{\beta}$  in Synge's stability in the kinematic-static sense.

Mathieu's 방정식은 Hill's 방정식의 특별한 형태의 함수로 변환이 된다.

$$\ddot{\beta} + \delta + \epsilon \cos(2\omega t) = 0 \quad (4)$$

### 3. 비선형 시스템의 정의

#### 3.1 비선형 시스템

양단이 고정되어 있는 유연 구조물에서는 구조물의 변형이 커짐에 따라 기하학적인 비선형성 때문에 구조물 내부의 인장력이 발생한다. 이것은 응력과 변형률 관계 그리고 곡률의 관계에 의해서 3차 비선형 운동방정식으로 표현된다. 그러므로 비선형 운동방정식은 Galerkin method를 사용하여 N개의 자유도의 비선형 방정식으로 표현된다. 유연 구조물에서 관심 있는 모드 2개만 표현하면 비선형 2 자유도계가 된다. 만약 구조물의 경계가 모두 단순지지인 대칭계라면 직교성에 의해 시스템은 다음과 같이 간략하게 표현될 수 있다. 운동방정식을 다시 무차원화하면 다음과 같다.<sup>(6)</sup>

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad (5)$$

$$V = \frac{1}{2}(x^2 + p^2 y^2) + \alpha x^4 + \beta x^2 y^2 + \gamma y^4$$

$T + V = H$ 가 성립한다. 여기서 T는 운동에너지, V는 위치에너지이고, 위치에너지에 대해서 다음과 같은 가정이 적용되었다.

$$V(x, y) \geq 0$$

$$V(-x, -y) = V(x, y)$$

$$\nabla V = 0 \quad V(x, y) \leq H$$

H는 시스템의 전체에너지이며,  $\alpha, \beta, \gamma$ 는 비선형 계수들

이고,  $p = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ 는 선형 진동수의 비이며, x와 y는 시스템의 일반좌표들의 변수이다. Lagrange 방정식에 따라

시스템의 운동방정식은 다음과 같이 된다.

$$\ddot{x} + x + 4\alpha x^3 + 2\beta xy^2 = 0 \quad (6)$$

$$\ddot{y} + p^2 y + 2\beta x^2 y + 4\gamma y^3 = 0$$

방정식(6)에 비선형 정규모드 개념을 적용하였다. 정규모드는 기본적으로 주기적인 운동인  $x$ -mode ( $y=0, x \neq 0$ )와  $y$ -mode ( $x=0, y \neq 0$ )가 존재한다. Fourier series로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n-1} \cos[(2n-1)\omega t] \quad (7)$$

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n-1} \cos[(2n-1)\omega t]$$

이 경우  $n$ 은 정수이다.

$x$ -mode는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x(t) = A \cos(\omega t), y(t) = 0 \quad (8)$$

$y$ -mode는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$y(t) = B \cos(\omega t), x(t) = 0$$

### 3.2 비선형 시스템의 안정성 해석과 내부공진

시스템의 안정성을 해석하기 위해서 Synge's stability의 개념을 갖고 정규모드의 안정성 해석을 하였다. 우선  $x$ -mode의 안정성을 알아보기 위해 식(8)에서  $y$ 에 섭동을 주면

$$x(t) = A \cos(\omega t), y(t) = \eta \quad (\eta \ll 1) \quad (9)$$

이고 이것은 운동방정식(6)에 대입하고 정리하면 Mathieu 방정식의 형태가 된다.

$$\ddot{\eta} + (\delta + 2\epsilon \cos(2\tau))\eta = 0 \quad (10)$$

식(10)에서  $\delta$ 와  $\epsilon$ 은 다음과 같이 표현된다.

$$\delta = p^2 + (2 - 6\frac{\alpha}{\beta} p^2)\epsilon \quad (11)$$

$$\epsilon = \frac{\beta A^2}{2(1 + 3\alpha A^2)} \quad (12)$$

동일하게  $y$ -mode의 안정성을 평가하기 위해서 식(8)에서  $x$ 에 섭동을 주면 아래와 같이 되고,

$$y(t) = B \cos(\omega t), x(t) = \zeta \quad (\zeta \ll 1) \quad (13)$$

이것은 운동방정식(6)에 대입하고 정리하면 마찬가지로 Mathieu의 방정식의 형태를 얻을 수 있다.

$$\ddot{\zeta} + (\delta + 2\epsilon \cos(2\tau))\zeta = 0 \quad (14)$$

식(14)에서  $\delta$ 와  $\epsilon$ 은 다음과 같이 표현된다.

$$\delta = \frac{1}{p^2} + (2 - 6\frac{\gamma}{\beta} \frac{1}{p^2})\epsilon \quad (15)$$

$$\epsilon = \frac{\beta B^2}{2(p^2 + 3\gamma B^2)} \quad (16)$$

따라서  $p = \frac{\omega_1}{\omega_2} = 5, \alpha = 1, \beta = 12, \gamma = 1$ 일 때 안정

성 선도를 구성하면 Fig. 4가 된다.  $p=5$ 라는 것은 선형 진동수비가 1:5인 것을 의미한다.  $\delta$ 와  $\epsilon$ 의 방정식들 (11)과 (12) 그리고 (15)와 (16)에서 유도된 (17)과 (18)에서 알 수 있듯이

$$A^2 = \frac{2\epsilon}{(\beta - 6\alpha\epsilon)} \quad (17)$$

$$B^2 = \frac{2p^2\epsilon}{(\beta - 6\gamma\epsilon)} \quad (18)$$

$\epsilon$ 의 증가는 진폭의 증가와 비례하고 따라서 전체에너지(H)의 값도 비례하여 증가한다.  $x$ -mode의 운동곡선은 안정성 선도 Fig. 4에서  $\delta = 25$  근방에서 시작하여  $\delta = 4$  근방에서  $\epsilon = 2$ 일 때 끝난다. Floquet theory에 의해서  $\delta = 0, 1^2, 2^2, 3^2, \dots$ 에서 나오는 천이곡선은 안정한 영역과 불안정한 영역을 나누어 준다. Mathieu 방정식은 고유값 문제로 바뀔 수 있는데 천이곡선에 대응하는 고유함수의 형태로 유도되었다. 각 번호에 대응되는 곡선에서 고유함수의 형태는 식(19)과 같다.

( $A_1$ : 지배적임 그리고  $B_1$ : 지배적임)

$$\textcircled{1} \zeta = B_0 + B_1 \cos(4\omega t) + B_2 \cos(2\omega t) + \dots$$

$$\textcircled{2} \zeta = B_1 \sin(4\omega t) + B_2 \sin(2\omega t) + \dots$$

$$\textcircled{3} \zeta = B_1 \sin(3\omega t) + B_2 \sin(\omega t) + \dots$$

$$\textcircled{4} \zeta = B_1 \cos(3\omega t) + B_2 \cos(\omega t) + \dots$$

$$\textcircled{5} \zeta = B_0 + B_1 \cos(2\omega t) + B_2 \cos(4\omega t) + \dots \quad (19)$$

$$\textcircled{6} \eta = A_1 \sin(2\omega t) + A_2 \sin(4\omega t) + \dots$$

$$\textcircled{7} \eta = A_1 \sin(\omega t) + A_2 \sin(3\omega t) + \dots$$

$$\textcircled{8} \eta = A_1 \cos(\omega t) + A_2 \cos(3\omega t) + \dots$$

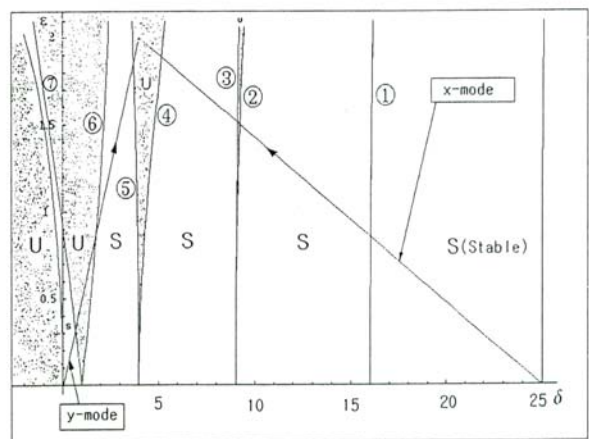


Fig. 5 Stability chart ( $p = 5, \alpha = 1, \beta = 12, \gamma = 1$ )

내부공진과 관련은  $\delta = 1$ 인 경우,  $\delta = 2^2 = 4$ 인 경우,  $\delta = 3^2 = 9$ 인 경우의 천이 곡선들은 각각 진동수 비가 1:1, 1:2, 1:3인 경우와 서로 대응된다. 안정성 선도에 비선형 정규모드의 장점을 확인할 수 있다. 기존의 섭동법은 모드 사이에 연계된 관계식을 얻기가 힘들고, 포앙카레 사상도에 나타나는 모든 운동현상을 나타낼 수 없다는 단점이 있다. 반면에 비선형 정규모드는 시스템에 내부공진 있다는 조건을 가정 할 필요가 없고 ( $\omega_2 = N\omega_1 + \varepsilon\sigma$   $0 < \varepsilon \ll 1$ ) 운동이 작아야 한다는 제약도 없으므로 강한 비선형계(strongly nonlinear system)에서 좋은 해석결과를 얻을 수 있다.

### 3.3 정규모드의 분기현상

H가 증가함에 따라 운동곡선이 천이곡선을 통과하는 점에서 정규모드의 안정성이 변화하고 동시에 새로운 모드가 발생한다. 분기 뒤에 새로 생겨나는 모드의 형태는 천이곡선의 고유함수의 형태를 가진다. 포앙카레 사상도에서는 기존의 타원형 중심점이 변화하여 안장고리 형태로 변화된다. 안장고리 안에서 다시 타원케도들이 형성되고, 새로운 타원형 중심점이 형성되는데 이것이 새로 발생하는 분기모드이다. 일반적으로 고리는 대칭성을 가진 시스템에서 나타난다. 안정성 선도 Fig. 5의 각 천이곡선에 통과할 때 새로 생기는 분기모드의 형태는 다음과 같다.

\* x-mode의 변화에 따라 생성되는 분기모드의 형태를 보면, transition curve ②를 통과할 때

$$\begin{aligned} x &= A\cos(\omega t) \\ y &= B_1\sin(3\omega t) + B_2\sin(\omega t) \end{aligned} \quad (20)$$

transition curve ③을 통과할 때

$$\begin{aligned} x &= A\cos(\omega t) \\ y &= B_1\cos(3\omega t) + B_2\cos(\omega t) \end{aligned} \quad (21)$$

transition curve ④를 통과할 때

$$\begin{aligned} x &= A\cos(\omega t) \\ y &= B_0 + B_1\cos(2\omega t) + B_2\cos(4\omega t) \end{aligned} \quad (22)$$

\* y-mode의 변화에 따라 생성되는 분기모드의 형태

transition curve ⑦을 통과할 때

$$\begin{aligned} x &= A_1\cos(\omega t) + A_2\cos(3\omega t) \\ y &= B\cos(\omega t) \end{aligned} \quad (23)$$

transition curve ⑥을 통과할 때

$$\begin{aligned} x &= A_1\sin(\omega t) + A_2\sin(3\omega t) \\ y &= B\cos(\omega t) \end{aligned} \quad (24)$$

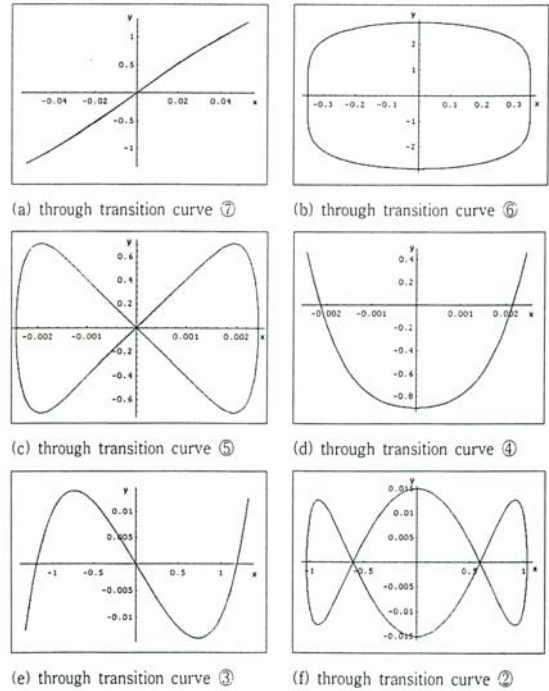


Fig. 6 Prototypes of bifurcation modes

안정성 선도의  $\delta - \varepsilon$  관계에서 구한 분기점에서의 H 값과 조화균형법(harmonic balance method: HBM)을 사용해서 구한 H값, 포앙카레 사상도를 사용해서 구한 H값을 다음과 같은 Table 1로 나타내었다.

①에 해당하는 값들이 Hill방정식의 성질에 따라 안정된 영역과 불안정한 영역이 융합되어 나타난다. 즉 계의 불안정한 영역이 사라진 것을 의미한다. 이것에 의해서  $p = 5$ 이므로 선형 진동수 비가 1:5이지만 실제로는 1:3과 비슷한 운동양상을 보여주고 있다. 다만 분명하게 변화과정을 확인할 수 있고 분기점에서 H값의 크기가 커진다.

Table 1. The values of H at bifurcation point

mode	curve	$\delta - \varepsilon$	HMB	Poincare's maps	Stability change
X	①	...	...	...	...
	②	1.53	1.53	1.58	$S \rightarrow U$
	③	1.603	1.6	1.601	$U \rightarrow S$
	④	35.6	6.04	5.86	$S \rightarrow U$
Y	⑤	130.58	$\infty$	$\infty$	...
	⑥	121.98	142.8	142.3	$U \rightarrow S$
	⑦	22.18	22.49	22.45	$S \rightarrow U$

Mathieu 방정식을 사용해서 나타낸 안정성 선도에서 ⑤번을 통과하는 것으로 나타났으나 실제로는 통과하지 않는다. 다시 말해 안정성이 변하지 않는다. 확인해 보면 HBM이나 포앙카레 사상도에서는 변화를 관찰할 수 없었고, Lamé 방정식으로 안정성 선도를 그려보면  $\delta = 2^2$ 의 왼쪽으로 올라가는 천이곡선에서 운동곡선이 끝난다.  $\delta - \varepsilon$  관계에서 계산한 H값들은  $\varepsilon$ 의 값들이 커짐에 따라 점점 오차가 커지는 것이 알려져 있다.

### 3.4 포앙카레 사상도

각각의 분기점에서  $x-x'$  포앙카레 사상도와  $y-y'$  포앙카레 사상도를 동시에 나타내었다.  $x$ -mode는  $x \neq 0, y=0$ 이기 때문에  $y-y'$  포앙카레 사상도에서 보아야 하고  $y$ -mode는  $x=0, y \neq 0$ 이기 때문에  $x-x'$  포앙카레 사상도에서 보아야 한다. 연성인 2 자유도 시스템의 포앙카레 사상도의 특성상  $x-x'$  포앙카레 사상도와  $y-y'$  포앙카레 사상도는 최외각에 대응되고  $y-y'$  포앙카레 사상도의 중심도 마찬가지로  $x-x'$  포앙카레 사상도의 최외각에 대응되며, 분기가 일어날 때 포앙카레 사상도에서는 2의 배수로 특이점(singular point)들이 생긴다. 시스템이 대칭성을 가지고 있는 경우 분기가 일어날 때 하나의 쌍(pair)으로 운동이 나타난다는 사실을 확인할 수 있다.

H가 1.58보다 작은 경우  $x$ -mode와  $y$ -mode는 타원궤도로 둘러싸인 중심점(center)로 나타난다. 이 경우 포앙카레 사상도로 나타내지 않았지만 Fig. 10과 동일한 형태를 유지하고 있으며 둘 다 안정한 상태이다. H가 1.58을 통과할 때  $x$ -mode의 안정성은 안정에서 불안정으로 변화한다. 이 새로 생긴 분기모드는 연성모드이다. 동시에  $x-x'$  포앙카레 사상도에서는 최외각에 6개의 중심점(center)과 6개의 안장점(saddle)로 이루어진 공진밴드가 생긴다. 이 공진밴드는 한 쌍의 주기  $3T$  운동(a pair of  $3T$  period motion)을 의미한다. Fig. 7에서 확인할 수 있다.

H가 5.86보다 커지면  $y-y'$  포앙카레 사상도에서 이전과는 다른 분기가 발생한다. 한 쌍의 안정된 분기모드와 한 쌍의 불안정한 분기모드가 동시에 최외각에서 일어난다.  $x-x'$  포앙카레 사상도에서는 (0, 0)인 중심점 부근에서부터 4개의 중심점(center)과 4개의 안장점(saddle)로 이루어진 공진밴드가 생긴다. 이 공진밴드는 한 쌍의 주기  $2T$  운동(a pair of  $2T$  period motion)을 의미한다. Fig 8에서 확인할 수 있다.

H가 22.45보다 커지면  $y$ -mode에서 분기가 일어나고, 한 쌍의 saddle loop가 생긴다. 이 때  $y$ -mode의 안정성은 안정에서 불안정으로 바뀐다. 동시에  $y-y'$  포

앙카레 사상도에서는 최외각에 2개의 중심점과 2개의 안장점으로 이루어진 공진밴드가 생겼다. 이것은 한 쌍의 주기  $T$  운동을 의미한다. Fig 9에서 확인할 수 있다. 이 경우 특히 혼돈영역을 확인 할 수 있다.

H가 142.3보다 커지면  $y$ -mode에서 분기가 일어난다. 이 때  $y$ -mode의 안정성은 불안정에서 안정으로 바뀐다. 이 경우에도  $x$ -mode의 2번째 분기에서처럼 불안정한 분기모드가 생길 것으로 예상되었으나 이미 주위에서 존재하던 혼돈영역과 중첩됨으로써 보이지는 않고 타원형 중심점만 볼 수 있다. Fig. 10에서 확인할 수 있다.

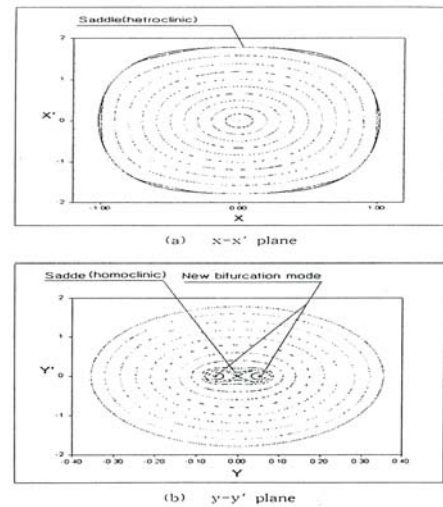


Fig 7 Poincaré's maps after 1st stability change of  $x$ -mode (stable  $\rightarrow$  unstable) at  $H=1.585$

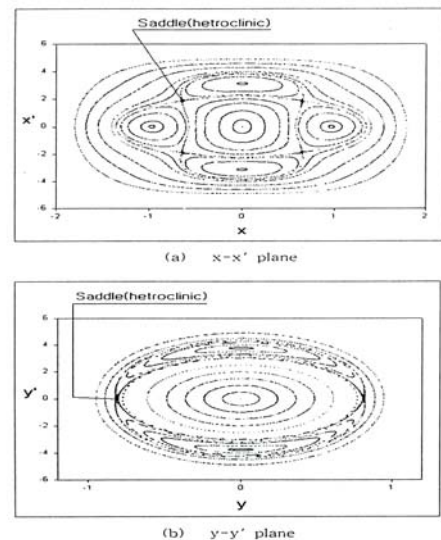


Fig 8 Poincaré's maps after 3rd stability change of  $x$ -mode (stable  $\rightarrow$  unstable) at  $H=12$ .

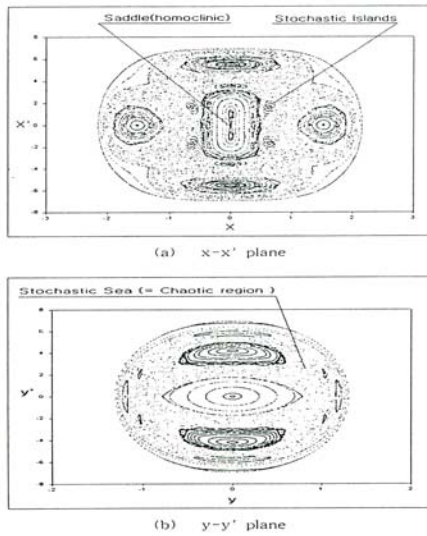


Fig. 9 Poincaré's maps after 1st stability change of  $y$ -mode (stable $\rightarrow$ unstable) at  $H=24$ .

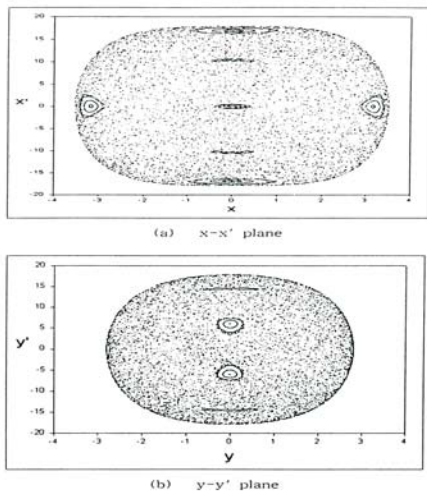


Fig. 10 Poincaré's maps after 2nd stability change of  $y$ -mode (unstable $\rightarrow$ stable) at  $H=160$ .

### 3.5 내부공진과 안장점

내부공진에서 발생하는 안장점에 대한 연구에 집중하였다. 분기가 일어난 경우 언제나 안장점이 나타나는 것을 볼 수 있었다. Fig. 7(b)와 Fig. 9(a)에서 호모클리닉 안장점을 볼 수 있다. Fig. 7(a)와 Fig. 8에서는 공진밴드 속에서 헤테로클리닉 안장점을 볼 수 있다. Fig. 10(a)에서는 혼돈 영역과 중첩되어서  $y$ -mode가 불안정에서 안정으로 변함에 따라 나타난 타원형 중심점만 보인다.

안장점 근방(정확히 안정고리 근방)에서  $x$ 의 시간영역

(time history)와  $y$ 의 시간영역(time history)의 예를 Fig. 11에 나타내었다. 전형적인 진폭변조운동이 발생하고 있다. 또한 연속적인 에너지교환 현상도 발생하고 있음을 볼 수 있었다. Fig. 9(a)의 안장점에서 받은 time history인 Fig. 11(b)에서  $y$ 의 아주 작은 변화가  $x$ 에서는 큰 변화로 나타나며 계속해서 에너지가 교환되는 것을 볼 수 있다.  $H=12$ 인 Fig. 8(b)의 안장점에서 안정한 다양체와 불안정한 다양체의 교차가 일어나면서 large scale chaotic motion이 생기기 시작할 때도 Fig. 11(c)에서 볼 수 있듯이 지속적인 에너지교환이 발생하고 있음을 확인할 수 있다.

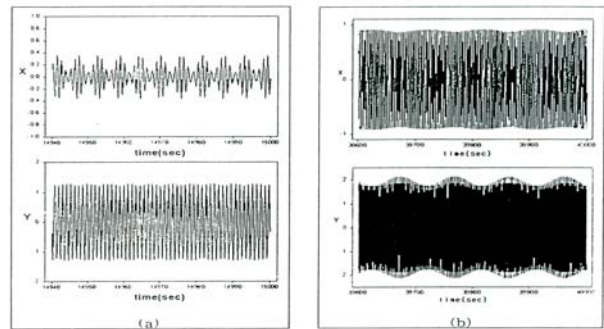


Fig. 11 Beat-like motions near saddle.

(a) time histories at (homoclinic) saddle in Fig. 12 (a),  $H=24$ , initial condition  $(x, x')=(0.07, 0)$

(b) time histories at (homoclinic) saddle in Fig. 10 (a),  $H=1.70$ , initial condition  $(x, x')=(0, 1.6)$

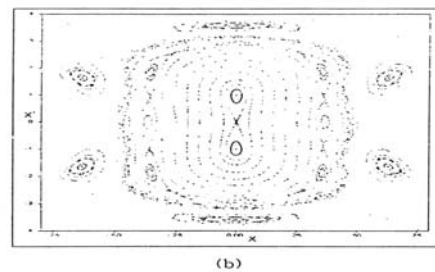
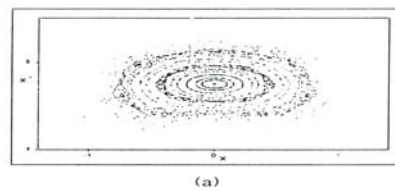


Fig. 12 Subharmonic motions

(a) the resized figure of the upper in Fig. 9(a)

(b) the resized figure of the upper in Fig. 9(b)

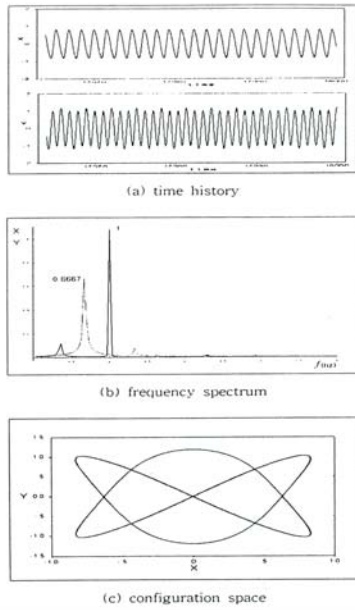


Fig. 13 The comparison of analysis methods,  $(x, x')=(0, 3.6)$  center in Fig. 9(a), frequency ratio of  $x$  &  $y=2:3$

두 개 또는 그 이상의 모드들 사이의 조합이 다른 모드들 가운데 한 모드와 알맞게 일치된다면 모드들 사이에 강한 연성을 일으키고 모드들 사이에 연속적인 에너지 상호교환을 보여주며, 시스템 전체의 응답에 강한 영향을 미친다. 이러한 현상이 시스템의 내부공진이다.

$$m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + m_3\omega_3 + \dots + m_n\omega_n \cong 0 \quad (25)$$

이 때  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$  정수(integer)

식(25)와 같이 자유진동에서 시스템의 고유진동수  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$  들이 통분 가능할 때 내부공진이 존재한다. 임의의 두 개의 모드가 강하게 연성되어 있을 때 초기 상태에서 에너지가 한 쪽으로 쏠려 있다면 일반적으로 연속적으로 에너지가 교환되게 된다.  $N$  자유도 시스템 ( $N \geq 2$ )에서는 고유진동수들 간의 조합에 의해서 보다 다양한 공진현상을 볼 수 있으며 시스템의 전체 응답에 크게 영향을 끼친다. 이론적인 해석결과 다양한 분기와 여러 가지 형태의 해를 가지며, 특히 주기적인 정상해와 혼돈적인 해를 갖는 것이 밝혀져 있다. 내부공진의 실제 예로서 선박의 롤링(rolling)운동과 피칭(pitching)운동의 교환현상, 스프링 진자(spring pendulum)의 에너지 교환현상, elastica의 굽힘진동과 비틀림진동이 교대로 나타나는 현상들이 있다.

포양카레 사상도에서 안장점의 존재는 정규모드의 안정성이 바뀔 때뿐만 아니라 다른 경우에서도 볼 수 있다. 이것은 global bifurcation과 관계가 있으며, 기존의

정규모드의 안정성 변화와는 상관없이 새로운 모드가 생겨난다.  $H$ 가 충분히 작을 때, 시스템은 적분 가능한 운동상수로 나타낼 수 있고, 모든 운동은 2차원 불변의 토러스 위에 존재한다.  $H$ 가 증가함에 따라 토러스는 붕괴되어지고 그 결과 무한히 많은 주기적인 운동 또는 혼돈 운동이 분기의 연속에 의해 생겨난다는 KAM(Kolmogorov, Arnol'd, Moser)이론으로 설명되어지는 혼돈운동과 밀접한 관계가 있다. 이와 관련된 분수조화운동(subharmonic motion)을 나타내는 공진밴드 안에서도 안장점을 볼 수 있다. 분수조화운동과 관계있는 안장점 근처에서도 안정한 다양체와 불안정한 다양체의 교차가 일어나면서 작은 크기의 혼돈영역 (small-scale chaotic motion)이 생긴다. 공진밴드를 stochastic islands는 혼돈영역 안으로 사라짐을 Fig. 9-10에서 볼 수 있었고, Fig. 13에서 분수조화운동을 확대시켜서 나타내었다. Fig. 12(a)는 Fig. 9(a)의 위쪽 큰 stochastic islands를 나타내었으며 아래쪽 큰 stochastic islands와 대칭으로 연결되어 있다. 이 경우 한 쌍의 주기  $6T$  운동을 안쪽에서 한 쌍의 주기  $7T$ 운동을 바깥쪽에서 볼 수 있다. Fig. 12(b)는 Fig. 9(a)의 호모클리닉 안장점 주위를 확대한 그림으로서 역시 분수조화운동과 6개의 stochastic islands를 볼 수 있으며 이 islands 안에서도 5개의 중심점(center)과 5개의 안장점(saddle)로 연결된 공진밴드로 이루어진 한 쌍의 주기  $15T$ 의 운동을 볼 수 있다. 가운데 안장점 고리(saddle-loop)를 둘러싸고 있는 공진밴드에서 한 쌍의 주기  $4T$  운동도 볼 수 있다.  $H$ 를 지속적으로 증가 시켜가면서 포야카레 사상도의 변화를 확인해 본 결과 정규모드의 안정성 변화에 의해 생기는 것은  $H$ 가 증가하더라도 오랫동안 계속 존재하는 경향을 보였다. 그러나 불변의 토러스들의 깨짐 (invariant tori's break)에 의해 생기는 것은 혼돈현상이 나타나면서 stochastic islands가 되고 혼돈영역이 커짐에 따라 혼돈영역 안으로 사라지게 됨을 확인 할 수 있었다.

#### 4. 수치해석의 결과

시스템의 변수들의 시간영역(time history)을 얻고 각 분기값에 대하여 포양카레 사상도를 구성하기 위해 4차 Runge-Kutta방법을 가지고 계산을 수행하였다. Mathematica를 사용하여 안정성 선도를 구성하고  $H$  값의 계산을 위한 symbol 계산과 진동수의 비를 알기 위해 FFT를 수행하였고, 얻어진 자료들을 가지고 그래프를 그리기 위해 Sigmaplot software를 사용하였다.



안장점(saddle) 근처의 시간영역(time history)를 받아서 대표적인 몇 개를 Fig. 11에 나타내었다. Fig. 13에서 시스템의 동적특성을 분석하는 방법인 시간영역(time history), 주파수 스펙트럼(frequency spectrum), 설정공간(configuration space) 위의 궤적을 비교해서 제시하였다.

정규모드의 분기가 일어날 때 생기는 안장점의 근처에서 받은 시간영역(time history)를 가지고 FFT를 수행하니 진동수 비가 대략 1:1, 1:2, 1:3이 나왔다. 이것은 분기가 일어날 때의 해의 형태와 포앙카레 사상도에서 안장점 고리나 공진밴드의 개수를 조사하여 예측할 수 있다. 정규모드 분기 때와 마찬가지로 global bifurcation이 일어날 때 생기는 안장점 근처에서 FFT를 수행한 결과 약 2:3, 2:5, 3:4, 4:5, 5:7등의 다양한 진동수 비가 나타났다.

## 5. 결론

2 자유도 비선형 연성시스템의 동특성을 규명하기 위해 시스템의 안정성 변화와 분기현상을 연구하였다. 분기현상이 일어날 때 포앙카레 사상도에서 안장점(saddle)이 발생하고 있음을 의미한다. 내부공진은 정규모드에 의한 분기현상에서는 진동수의 비가 1:1, 1:2, 1:3 이었다. global bifurcation에 의해 발생한 진동수의 비는 2:3, 2:5, 3:4, 5:7등이 나타난다. 진동수의 비는 주파수 스펙트럼을 이용하여 확인하였고 전체적인 시스템의 운동은 설정공간(configuration space) 위의 궤적을 통해서 확인하였다. 비선형 현상에 대한 분석의 신뢰성을 얻기 위해서 시스템의 안정성 변화가 발생하여 분기가 발생할 때 마다 포앙카레 사상도를 확인할 필요가 있다. 조금 더 일반화된 시스템에서의 정규모드를 이용한 혼돈현상에 대한 연구가 필요하다고 본다.

## 참 고 문 헌

- (1) Rosenberg, R., M., 1966, "On Nonlinear Vibration of Systems with Many Degrees of Freedom", Academic press, Applied Mach., Vol. 9, pp. 155-242.
- (2) Pak, C. H. and Rosenberg, R. M., 1968, "On the Existence of Normal Modes Vibrations in Nonlinear Systems", Q. Appl. Math., Vol. 24, pp. 177-193.
- (3) Johnson. T. and Rand, R. H., 1979, "On

the Existence and Bifurcation of Minimal Normal Modes", Int. J. Nonlinear Mechanics, Vol. 14, pp. 1-12.

(4) Nayfeh, A. H. and Mook, D. T., 1979, "Nonlinear Oscillations", Willy-Interscience, New York.

(5) Bajaj, A. K., Davies, P. and Chang, S. I., 1995, "On Internal Resonance in Mechanical Systems", in Nonlinear Dynamics and Stochastic Mechanics, Kiliemann, W. and Sri Namachchivaya, N. (eds.), CRC Press, Boca Raton, pp. 69-94.

(6) Nayfeh. S. A., Nayfeh. A. H., 1994, "Energy Transfer from High-to -Low Frequency Modes in Flexible Structures via Modulation", J. Vibration and Acoustics, ASME, Vol. 116, pp. 203-207.

(7) Pak, C. H., 1992, "Analysis and Applications of String Nonlinear Dynamic Characteristics in Mechanical Systems", Tech. Report, No. 89-0202-03, KOSEF.

(8) Pak, C. H., 1989, "On the Stability behaviors of Bifurcated Normal Modes in Coupled Nonlinear Systems", J. Applied Mech., ASME, Vol. 56, pp. 156-161.

(9) Rosenberg, R. H., Atkinson, C. P., 1959, "On the Natural Modes and Their Stability in Nonlinear Two-degree-of-freedom systems", J. Applied Mech., ASME, pp. 377-385.

(10) Hamdan, M. N., Burton, T. D., 1993, "On the Steady State Response and Stability of Nonlinear Oscillators using Harmonic Balance", J. Sound and Vibration, pp. 255-266.

(11) Magnus W. and Winkler, 1966, "Hill's Equation", Interscience Publisher.

(12) Pak, C. H., "Nonlinear Normal Mode Dynamics : Theory and Application", to be pressed.