

# 파수 영역의 방사 구면에서 음향 에너지 집중을 통한 평면파 생성 방법

## Generation of a plane-wave field by point focusing of acoustic potential energy on the radiation sphere in the wavenumber domain

장지호† · 김양한\*

Ji-Ho Chang and Yang-Hann Kim

**Key Words:** radiation sphere(방사 구), wavenumber domain(파수 영역)

### ABSTRACT

In the wavenumber domain, each point on a radiation sphere indicates a plane wave of the frequency corresponding to radius of the sphere and the position on the sphere shows propagating direction of the plane wave. This concept is extended from the research by Choi<sup>[1]</sup> where he focus acoustic potential energy at a point on a radiation sphere. Here we propose the method to focus the energy at a point on the radiation sphere, as a result, we can easily generate a plane wave which propagates to any direction that we want.

### 1. 서 론

다수의 스피커로 구성된 어레이를 이용하여 실제 음장과 유사한 입체 음장을 구현하기 위해서, 다양한 방향에서 입사하는 음파를 생성하는 것이 필수적이다. 실제 음장에서 음원은 다양한 위치에 존재할 수 있기 때문이다.

따라서 원하는 방향으로 진행하도록 음파를 생성하는 연구가 다양한 방법으로 진행되어 왔다. 원하는 방향으로 진행하는 평면파를 가정한 후 그 평면파 음장과 스피커 어레이에 의한 음장의 최소 자승 오차를 최소화하는 방법<sup>[2]</sup>, 한 방향으로 진행하는 평면파, 또는 단극 음원에 의한 음장을 모드로 전개하여 모드 계수를 맞추는 방법<sup>[3]</sup>이 그것이다.

한편, 2 차원 파수 영역에서 방사원(radiation circle) 상의 한 점에 음향 에너지를 집중시킴으로써 평면파 음장을 구현하는 방법이 제안되었는데<sup>[1]</sup> 이를 확장시켜 3 차원 파수 영역에서 방사구(radiation sphere) 상의 한 점에 음향 에너지를 집중시키는 방법을 생각해볼 수 있다. 이 방법을 이용하면 3 차원의 어느 방향으로 진행하는 음파

도 쉽게 구현해낼 수 있기 때문이다.

이 방법을 구현하기 위해서는, 각 스피커에 의해 형성되는 음장을 3 차원 푸리에 변환을 통해 3 차원 파수 영역에 표현할 수 있어야 하고, 각 스피커에 의한 음장은 스피커를 모델링 하여 가정하거나 직접 측정해야 한다. 모델링의 경우에는 구현은 쉽지만 구현된 음장은 정확하지 않을 수 있고, 반면 직접 측정할 경우에는 측정 노력이 많이 든다는 단점이 있다. 이 때 강체 구의 표면에서 측정된 음압으로 모드 계수를 예측하여 음장을 구하는 방법<sup>[4]</sup>이 알려져 있으며 이 경우 측정 노력을 줄일 수 있다.

이 논문에서는 이 방법을 이용하여 스피커에 의해 형성되는 음장을 구하고 이를 3 차원 파수 영역의 방사 구 상에 나타낸 후 원하는 한 점에 음향 에너지를 집중시켜 평면파 음장을 구현하는 방법을 제안한다.

### 2. 문제 정의

제어하고자 하는 3 차원의 영역이 있고 그 주위에  $L$  개의 스피커가 배열되어 있다고 가정하자.  $l$  번째 스피커에 의한 음장을  $p^{(l)}(\vec{r}, \omega)$  라고 할 때, 이 음장은 다음과 같이 스피커로 입력되는 신호  $q^{(l)}(\omega)$  와 스피커에서 제어영역까지의 전달함수  $h^{(l)}(\vec{r}, \omega)$  의 곱으로 표현된다.

† 한국과학기술원 기계공학과  
E-mail : vacuum0@kaist.ac.kr  
Tel : (042) 869-3065, Fax : (042) 869-8220

\* 한국과학기술원 기계공학과  
E-mail : yanghannkim@kaist.ac.kr  
Tel : (042) 869-3025, Fax : (042) 869-8220

$$p^{(l)}(\vec{r}, \omega) = q^{(l)}(\omega) h^{(l)}(\vec{r}, \omega). \quad (1)$$

따라서 모든 스피커에 의한 음장은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} p^{(total)}(\vec{r}, \omega) &= \sum_{l=1}^L p^{(l)}(\vec{r}, \omega) \\ &= \sum_{l=1}^L q^{(l)}(\omega) h^{(l)}(\vec{r}, \omega) \end{aligned} \quad (2)$$

한편 평면파가  $\vec{k}_0$  방향으로 진행할 때 그 음장은 복소 상수  $C(\omega)$ 를 이용하여 다음과 같이 표현된다.

$$p^{(plane)}(\vec{r}, \omega) = C(\omega) e^{j\vec{k}_0 \cdot \vec{r}} \quad (3)$$

평면파를 구현하는 문제는 결국 스피커에 의한 음장이 평면파 음장에 가까워지도록 하는 스피커 입력 신호  $\mathbf{q}(\omega) = [q^{(1)}(\omega) q^{(2)}(\omega) \dots q^{(L)}(\omega)]^T$ 를 구하는 문제라고 할 수 있다.

### 3. Solution Method

#### 3.1 전달함수 측정

서론에서 언급한 각 스피커에 의한 음장은 각 스피커와 제어 영역의 전달함수로 표현된다.  $l$ 번째 스피커에 의한 전달함수  $h^{(l)}(\vec{r}, \omega)$ 는 다음과 같이 구형 조화함수 전개(spherical harmonics expansion)로 표현될 수 있다<sup>[5]</sup>.

$$h^{(l)}(r, \theta, \phi, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_{nm}^{(l)}(\omega) j_n(kr) Y_n^m(\theta, \phi). \quad (4)$$

여기서  $j_n(kr)$ 는  $n$  차 구형 베셀 함수이고,  $k$ 는 파수(wavenumber)로서 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$k = \omega/c. \quad (5)$$

그리고  $Y_n^m(\theta, \phi)$ 는 다음과 같이 정의되는 구형 조화함수이다.

$$Y_n^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!}} P_n^m(\cos \theta) e^{jm\phi} \quad (6)$$

모드 계수  $A_{nm}^{(l)}(\omega)$ 은 다음과 같이 구해질 수 있다.

$$\begin{aligned} A_{nm}^{(l)}(\omega) &= -i(ka)^2 h_n^{(l)}(ka) \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} h_l^{(l)}(r=a, \theta, \phi, \omega) Y_n^m(\theta, \phi)^* \sin \theta d\theta d\phi \\ & \quad (7) \end{aligned}$$

여기에서  $a$ 는 강체 구의 반지름을 의미하며  $h_n^{(l)}(ka)$ 는  $n$  차 1 종 한켈함수를 의미한다.  $h_l^{(l)}(r=a, \theta, \phi, \omega)$ 는  $l$ 번째 스피커에 의한 입사음장과 강체 구의 산란음장을 포함한 전체 음장을 뜻한다. 한편 실제로는 강체 구 표면의 모든 점의 음압을 구할 수 없기 때문에 일정한 차수  $n=0, 1, \dots, N$ 까지의 모드 계수만을 구할 수 있고 그에 따라 잘라버림 오차(truncation error)가 발생한다.

#### 3.2 3차원 공간 푸리에 변환

구형좌표계에서  $l$ 번째 스피커에 의한 전달함수  $h^{(l)}(\vec{r}, \omega)$ 의 3차원 공간 푸리에 변환은 다음과 같이 표현된다<sup>[6]</sup>.

$$\widehat{h}_k^{(l)}(k_r, \theta_k, \phi_k, \omega) = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} h^{(l)}(r, \theta, \phi, \omega) e^{-i\vec{k}_k \cdot \vec{r}} r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr \quad (8)$$

커널  $e^{-i\vec{k}_k \cdot \vec{r}}$ 는 구형 조화함수 전개로 다음과 같이 표현된다.

$$e^{-i\vec{k}_k \cdot \vec{r}} = 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (-i)^n j_n(k_r r) Y_n^m(\theta, \phi)^* Y_n^m(\theta_k, \phi_k) \quad (9)$$

(4)와 (9)식을 (8)식에 대입하고 정리하면,

$$\begin{aligned} \widehat{h}_k^{(l)}(k_r, \theta_k, \phi_k, \omega) &= \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} h^{(l)}(r, \theta, \phi, \omega) e^{-i\vec{k}_k \cdot \vec{r}} r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left[ \sum_{n=0}^N \sum_{m=-n}^n A_{nm}^{(l)}(\omega) j_n(kr) Y_n^m(\theta, \phi) \right] \\ & \quad \left[ 4\pi \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} (-i)^{n'} j_{n'}(k_r r) Y_{n'}^{m'}(\theta, \phi)^* Y_{n'}^{m'}(\theta_k, \phi_k) \right] r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr \\ &= \int_0^{\infty} \left[ \sum_{n=0}^N \sum_{m=-n}^n A_{nm}^{(l)}(\omega) j_n(kr) \left\{ 4\pi (-i)^n j_n(k_r r) Y_n^m(\theta_k, \phi_k) \right\} \right] r^2 dr \\ &= 4\pi \sum_{n=0}^N \sum_{m=-n}^n (-i)^n A_{nm}^{(l)}(\omega) \left[ \int_0^{\infty} j_n(kr) j_n(k_r r) r^2 dr \right] Y_n^m(\theta_k, \phi_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4\pi \sum_{n=0}^N \sum_{m=-n}^n (-i)^n A_{mm}^{(l)}(\omega) \left[ \frac{\pi}{2\sqrt{k_r k}} \int_0^\infty J_{n+1/2}(kr) J_{n+1/2}(k_r r) r dr \right] Y_n^m(\theta_k, \phi_k) \\
&= \frac{2\pi^2}{\sqrt{k}} \left[ \frac{\delta(k_r - k)}{k_r^{\frac{3}{2}}} \right] \sum_{n=0}^N \sum_{m=-n}^n (-i)^n A_{mm}^{(l)}(\omega) Y_n^m(\theta_k, \phi_k).
\end{aligned} \tag{10}$$

이 값은  $k_r$  과  $k$  이 같을 때만 0 이 아닌 값을 갖고 곧 방사 구의 표면에서만 의미가 있음을 나타낸다.  $k_r$  에 관한 항과 상수항을 제거하고  $(\theta_k, \phi_k)$  에 대한 항만 나타내면 다음과 같은 식을 얻고 이를 구형 스펙트럼이라고 정의한다. 이 값은  $l$  번째 스피커에 의해 방사 구의 표면에 나타나는 스펙트럼의 상대적 크기를 보여준다.

$$\hat{H}_k^{(l)}(\theta_k, \phi_k, \omega) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=-n}^n (-i)^n A_{mm}^{(l)}(\omega) Y_n^m(\theta_k, \phi_k). \tag{11}$$

$(\theta_0, \phi_0)$  방향으로 진행하는 평면파의 경우에는

$$A_{mm}^{(l)}(\omega) = 4\pi i^n Y_n^m(\theta_0, \phi_0)^* \tag{12}$$

이므로 (11)식에 대입했을 때,

$$\begin{aligned}
&\hat{H}_k^{(l)}(\theta_k, \phi_k, \omega) \\
&= \sum_{n=0}^N \sum_{m=-n}^n (-i)^n 4\pi i^n Y_n^m(\theta_0, \phi_0)^* Y_n^m(\theta_k, \phi_k) \\
&= 4\pi \sum_{n=0}^N \sum_{m=-n}^n Y_n^m(\theta_0, \phi_0)^* Y_n^m(\theta_k, \phi_k)
\end{aligned} \tag{13}$$

와 같이 표현되며  $N \rightarrow \infty$  일 때 구형 조화함수의 completeness relation 에 의해

$$\hat{H}_k^{(l)}(\theta_k, \phi_k, \omega) \rightarrow 4\pi \delta(\phi - \phi') \delta(\cos \theta - \cos \theta') \tag{14}$$

로 접근한다.

### 3.3 음향 에너지 집중

각 스피커에 의한 구형 스펙트럼을 조합한 구형 스펙트럼은 다음과 같이 구해지고 벡터 형태를 사용하여 간단히 정리된다.

$$\begin{aligned}
\hat{P}_k^{(total)}(\theta_k, \phi_k, \omega) &= \sum_{l=1}^L q^{(l)}(\omega) \sum_{n=0}^N \sum_{m=-n}^n (-i)^n A_{mm}^{(l)}(\omega) Y_n^m(\theta_k, \phi_k) \\
&= \hat{\mathbf{H}}_k(\omega) \mathbf{q}(\omega)
\end{aligned} \tag{15}$$

여기서  $\hat{\mathbf{H}}_k(\theta_k, \phi_k, \omega)$  는 다음과 같다.

$$\hat{\mathbf{H}}_k(\theta_k, \phi_k, \omega) = [\hat{H}_k^{(1)} \quad \hat{H}_k^{(2)} \quad \dots \quad \hat{H}_k^{(L)}] \tag{16}$$

이 스펙트럼의 음향 에너지가 우리가 원하는 평면파의 방향  $(\theta_k, \phi_k) = (\theta_0, \phi_0)$  에 집중되도록 하는 입력 신호  $\mathbf{q}(\omega)$  를 구해야 한다. 이 문제는 잘 알려진 점 포커싱(point focusing) 문제이다. 입력 신호의 파워에 대해 포커싱된 점의 음향 에너지를 최대화하는 해<sup>[7]</sup>는 다음과 같이 주어진다.

$$\mathbf{q}_0(\omega) = \hat{\mathbf{H}}_{0,k}^{-1}(\theta_k = \theta_0, \phi_k = \phi_0, \omega)^H \tag{17}$$

그리고 모든  $(\theta_k, \phi_k)$  점의 음향에너지에 대한  $(\theta_k, \phi_k) = (\theta_0, \phi_0)$  점의 음향 에너지를 최대화하는 해<sup>[7]</sup>는 다음과 같이 주어진다.

$$\mathbf{q}_0(\omega) = (\hat{\mathbf{H}}_{t,k}^H \hat{\mathbf{H}}_{t,k})^{-1} \hat{\mathbf{H}}_{0,k}(\theta_k = \theta_0, \phi_k = \phi_0, \omega)^H \tag{18}$$

## 4. 시뮬레이션과 분석

### 4.1 오차의 정의

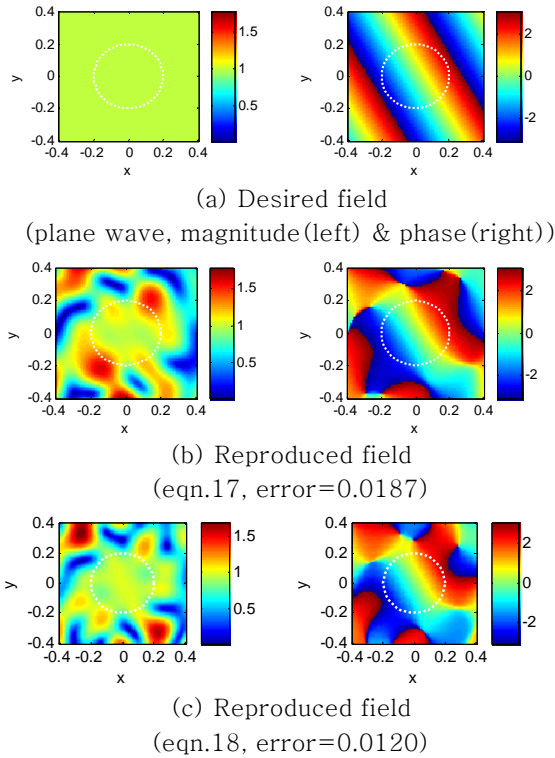
평면파 음장을 재현했을 때 그 성능은 재현하고자 한 평면파 음장과 재현된 음장의 차이에 의해 평가될 수 있다. 제어 공간을 D 라고 했을 때 D 에서의 공간 에러  $\bar{e}_D(\omega)$  는 다음과 같이 정의될 수 있다.

$$\bar{e}_D(\omega) = \frac{\int_D |p^{(plane)}(\vec{r}, \omega) - p^{(total)}(\vec{r}, \omega)|^2 dV_D}{\int_D |p^{(plane)}(\vec{r}, \omega)|^2 dV_D} \tag{19}$$

### 4.2 시뮬레이션 조건과 가정

이상에서 제안된 해를 평가하기 위해 시뮬레이션을 수행하였다. 스피커를 단극 음원이라고 가정하였고 원점에 중심이 위치하고 반지름이 2m 인 구의 표면 상에 고르게 분포되어 있고(pack 3.25<sup>[8]</sup>) 개수는 25 개라고 가정하였다. 모드 계수의 최고 차수를  $N=4$  라고 둔다. 제어 영역을 x-y 평면 상의 반지름이  $r=0.2m$  인 원으로 놓고 1kHz 를 관심 주파수라고 하면,  $kr$  값은 3.66 정도이다. 구현하고자 하는 평면파의 방향은

$$(\theta_0, \phi_0) = \left( \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3} \right) \text{라고 둔다.}$$



**Fig. 1** 평면파 재현 결과

### 4.3 결과와 분석

이 때 (17)식과 (18)식에 의한 해가 각각 존재한다. 각각의 해를 적용하였을 때  $x-y$  평면에서의 결과는 Fig. 1 과 같다. 제어 영역 내의 오차를 계산한 결과 (17)식에 의한 음장의 오차가 0.0187, (18)식에 의한 음장의 오차가 0.0120 으로 두 음장 모두 2% 이내의 오차로 재현이 되며 (18)식의 해가 0.2% 정도 더 효과적이다.

제어 영역이 넓어지면 오차가 크게 증폭되는데, 이것은 앞서 언급한 잘라버림 오차와 관계가 있다. 즉 음장을 모드로 전개하여 표현하였을 때, 원점에서의 거리가 멀어질수록 잘라버림 오차가 커지므로<sup>[3]</sup> 음장의 표현이 정확하지 않게 되며 결과적으로 본 방법의 성능에도 영향을 준다.

스피커의 개수를 24 개 또는 26 개로 변화시켜 보았을 때, 오차는 각각 6.5325, 0.0114 였다. 스피커가 25 개 이하가 될 때 오차가 급격히 증가함을 알 수 있는데, 모드의 최고 차수가 4 일 때 필요한 최소한의 스피커의 수가  $(4+1)^2=25$  으로 구해짐<sup>[3]</sup>을 확인할 수 있다.

모드의 최고 차수를 5, 6, 7 로 증가시키고 그에 따라 스피커의 개수도 36, 50, 64 개로 증가시킬 때, 오차는 0.0060, 0.0046, 0.0019 로 줄어들었다. 최고 차수가 증가함에 따라 구현한 평면파 음장은 더 정확해진다.

## 5. 결론

스피커 어레이를 이용하여 평면파를 재현하는 방법으로써, 각 스피커에 의한 음장을 측정하고 파수 영역으로 변환하여 방사 구면 위의 한 점에 음향 에너지를 집중시키는 방법을 제안하였다. 그 결과 원점에서 가까운 영역에서 적은 오차로 재현이 되었다.

## 후 기

이 연구는 과학기술부의 국가지정연구소(NRL) 사업에 따라 한국과학재단(KOSEF)에서 지원을 받았고(M10500000112-05J0000-11210), BK21(가치 제조 기계사업단)와 ADD(외부 음향정보 탐지/분석 기술 연구)의 지원도 받았습니다. 지원에 감사드립니다.

## 참고문헌

- [1] J.-W. Choi, *Spatial Manipulation and Implementation of Sound*, Doctoral Thesis, KAIST, 2005
- [2] Ole Kirkeby and Philip A. Nelson, "Reproduction of plane wave sound fields," *J. Acoust. Soc. Am.* Vol 94(5), Nov. 1993, pp. 2992-3000
- [3] Darren B. Ward and Thushara D. Abhayapala, "Reproduction of a Plane-Wave Sound Field Using an Array of Loudspeakers," *IEEE TRANSACTIONS ON SPEECH AND AUDIO PROCESSING*, VOL. 9, NO. 6, SEP. 2001
- [4] J. Meyer, "Beamforming for a Circular Microphone Array Mounted on Spherically Shaped Objects," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 109, pp. 185-193, 2001
- [5] Earl G. Williams, *Fourier Acoustics*, academic press, 1999
- [6] Ronald N. Bracewell, *The Fourier Transform and Its Applications*, McGraw-Hill, international editions 2000, pp. 340-343
- [7] J.-W. Choi and Y.-H. Kim, "Generation of an acoustically bright zone with an illuminated region using multiple sources," *J. Acoust. Soc. Am.*, 111(4), 1695-1700, Apr. 2002.
- [8] N.J.A. Sloane, R.H.Hardin, and W.D.Smith et al.. *Tables of spherical codes*. [Online]. Available: [www.research.att.com/~njas/packings/](http://www.research.att.com/~njas/packings/).
- [9] J. -W. Choi and Y. -H. Kim, "Manipulation of sound intensity within a selected region using multiple sources," *J. Acoust. Soc. Am.*, 116(2), 2004, pp. 843-852
- [10] M. A. Poletti, "Three-Dimensional Surround Sound Systems Based on Spherical Harmonics," *J. Audio Eng. Soc.*, Vol. 53, No. 11, 2005 Nov.