

# 중동력을 받는 티모센코 보의 안정성에 미치는 크랙의 영향

## Effects of Crack on Stability Timoshenko Beam Subjected to Follower Force

안태수\* · 손인수\*\* · 윤한익\*\*

In-Soo Son, Han-Ik Yoon and Tae-Su Ahn

**Key Words** : Timoshenko Beam Theory(티모센코 보 이론), Stability(안정성), Follower Force(중동력), Cracked Cantilever Beam(크랙 외팔 보)

### ABSTRACT

In this paper, the stability of a cracked cantilever beam subjected to follower force is presented. In addition, an analysis of the flutter instability(flutter critical follower force) of a cracked cantilever beam subjected to a follower compressive load is presented. Based on the Timoshenko beam theory. The vibration analysis on such cracked beam is conducted to identify the critical follower force for flutter instability based on the variation of the first two resonant frequencies of the beam. Besides, the effect of the crack's intensity and location on the flutter follower force is studied. The crack section is represented by a local flexibility matrix connecting two undamaged beam segments. The crack is assumed to be in the first mode of fracture and to be always opened during the vibrations. Generally, the critical follower force for flutter is proportional to the crack depth.

### 1. 서론

집중 중동력(concentrated follower force)을 받는 보의 동적 안정성에 대한 연구는 오랜 기간 많은 연구자들로부터 연구되어져 왔다. 이러한 중동력을 받는 보의 동적 안정성 해석은 비보존계의 안정성 문제로서 그 대표적인 예로 Beck<sup>(1)</sup>의 기동문제를 들 수 있다. 또, 구조손상의 하나인 크랙은 구조물의 진동특성과 안정성을 변화시켜 구조물의 불안정 및 파괴를 유발하는 주요 원인이 된다. 따라서 보의 끝단에 집중 중동력을 받는 보에 크랙이 존재하는 시스템은 이러한 불안정을 일으키는 두 요소를 모두 포함하고 있으므로 이들의 연성관계에 의한 시스템의 동적특성 및 안정성 해석을 수행하는 것은 공학적으로 매우 흥미로운 문제가 된다. 크랙을 가지는 구조물의 동적특성을 파악하는 것은 구조물의 안전진단 및 사고예방을 위해 중요한 문제라고 할 수 있다. 일반적으로 구조물에 크랙형태의 결함이 있는 경우 구조물의 강성이 저하되는 경향을 보인다. 크랙이 구조물의 동적특성에 미치는 영향을 연구하기 위하여

구조물에서 단지 크랙이 존재하는 부분의 강성을 줄이는 방법<sup>(2)</sup>에서 출발하여, 최근에는 크랙에 의해서 부가되는 에너지를 파괴역학적 변수를 계산하여 유연행렬을 구하여 적용하는 해석방법을 주로 사용하고 있다<sup>(3)</sup>. 크랙과 중동력을 고려한 연구는 양단 자유 보를 티모센코 보 이론을 적용하여 크랙이 동적 안정성에 미치는 영향에 대한 해석과 크랙의 위치에 따라 계의 불안정을 일으키는 플러터 하중을 계산하는 연구결과들이 발표되고 있다<sup>(4,5)</sup>. 또 Wang은<sup>(6)</sup> 압축 중동력을 받는 탄성 지지된 외팔 보의 안정성에 미치는 크랙의 영향에 대하여 연구하기도 하였다. 끝단질량을 가진 크랙 보에 대한 연구는 Dado등<sup>(7)</sup>에 의해 끝단질량 및 그 회전 관성모멘트가 크랙 외팔보의 횡방향 및 축방향 고유진동수에 미치는 영향에 대한 연구를 수행하였다. 최근 Euler 보 이론을 적용하여 끝단질량과 중동력을 가진 크랙 외팔보의 안정성 해석에 관한 연구결과도 발표되었다<sup>(8)</sup>. 하지만 이들의 연구들은 대부분 크랙의 영향에 의한 계의 고유진동수 변화 및 동적특성에 관한 연구들이었으며 크랙이 계의 안정성에 미치는 영향에 대한 연구는 드문 실정이다. 따라서 이 연구에서는 집중 중동력을 받는 티모센코 보에 크랙이 존재할 때 크랙(크기 및 위치)가 보의 횡방향 고유진동수 및 계의 불안정을 유발하는 임계 중동력에 미치는 영향에 대하여 연구하였다.

\* 동의대학교 대학원 기계공학과

\*\* 정회원, 동의대학교 기계공학과

E-mail : isson92@deu.ac.kr

Tel : (051) 890-2239, Fax : (051) 890-2232

## 2. 시스템 모델링

Fig. 1은 본 연구에서 예제해석을 위하여 가정한 집중 종동력을 받는 크랙을 가진 외팔보의 개략도를 나타낸 것이다. 여기서  $P$ 와  $L$ 은 각각 집중 종동력과 외팔보의 전체 길이를 나타낸다.  $x_c$ ,  $b$ , 그리고  $a$ 는 각각 외팔보 상에 존재하는 크랙의 위치, 크랙의 횡방향 길이, 그리고 전체 크랙의 크기를 의미한다.

### 2.1. 크랙 모델링

같은 하중이 작용하는 구조물에서도 크랙이 존재하는 경우에 구조물의 자체 탄성 변형에너지 외에 크랙에 의한 변형에너지가 존재하고 이 부가되는 에너지만큼 추가적인 변형이 발생하게 된다. Castigliano의 정리에 의하여 크랙에 의해서 부가되는 추가 에너지는 유연행렬을 이용하여 표현할 수 있으며 무차원 유연행렬을 구해보면 다음과 같다.

$$C = 6\pi(1-\nu^2)H \int_0^\alpha [\alpha F_t^2(\alpha)] d\alpha \quad (1)$$

여기서  $\nu$ 는 포와송 비이고, 식 (1)에 사용된 무차원 매개변수와  $F_t(\alpha)$ 는 각각 다음과 같다.

$$H = \frac{h}{L}, \quad \alpha = \frac{a}{h},$$

$$F_t(\alpha) = \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi\alpha} \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \left[0.923 + 0.1999 \left(1 - \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right)^4\right]}}{\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} \quad (2)$$

해석에 필요한 무차원 스프링 상수( $k_R$ )는 식 (1)의 역수, 즉  $k_R = C^{-1}$ 이다.

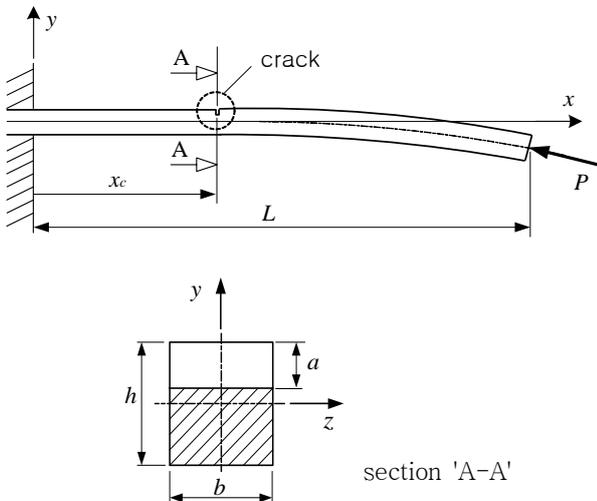


Fig.1 Geometry of cracked beam subjected to follower force and cross section

### 2.2. 종동력을 받는 Timoshenko 보

크랙을 가진 외팔보의 안정성 해석을 위하여 먼저 종동력을 받는 외팔보를 고려하였다. 자유진동에 대하여 티모셴코 보 이론을 적용한 외팔보의 운동방정식을 유도하면 다음과 같다.

$$EI \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} + \kappa GA \left( \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \psi(x,t) \right) - \frac{mI}{A} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3)$$

$$\kappa GA \left( \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \right) - P \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - m \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (4)$$

여기서  $y(x,t)$ 는 횡방향 변위,  $\psi(x,t)$ 는 전단변형,  $\kappa$ 는 전단계수이다. 또  $P$ ,  $A$ , 그리고  $G$ 는 각각 종동력과 보의 단면적, 그리고 전단탄성계수를 나타내고 있다. 식 (3), (4)로부터  $\psi(x,t)$ 를 소거시키면 횡변위  $y(x,t)$ 에 대한 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$EI \left( 1 - \frac{P}{\kappa GA} \right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \rho I \left[ 1 + \frac{E}{\kappa G} - \frac{P}{\kappa GA} \right] \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{\kappa G} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} = 0 \quad (5)$$

여기서  $\rho$ 는 보의 밀도이며, 횡변위와 전단변형은 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$y(x,t) = Y(x) e^{i\omega_f t}, \quad \psi(x,t) = \phi(x) e^{i\omega_f t} \quad (6,7)$$

여기서  $\omega_f$ 는 보의 고유진동수이며  $i = \sqrt{-1}$ 를 나타낸다. 식 (6)을 식 (3)에 대입하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$Y^{iv} + \left[ \frac{(1-\omega^2\beta r)p + \omega^2(\beta+r)}{(1-\rho\beta)} \right] Y'' + \frac{\omega^2(\omega^2\beta r - 1)}{(1-\rho\beta)} Y = 0 \quad (8)$$

여기서 (')은 무차원 좌표  $\xi (=x/L)$ 에 대한 미분을 나타내며, 식 (8)에 사용된 각 무차원 파라미터는 다음과 같다.

$$\omega^2 = \frac{mL^4 \omega_f^2}{EI}, \quad \beta = \frac{EI}{\kappa GAL^2}, \quad r = \frac{I}{AL^2}, \quad p = \frac{PL^2}{EI} \quad (9)$$

식 (9)의 일반해를 구하면 다음과 같다.

$$Y(\xi) = a_1 \sinh(\lambda_1 \xi) + a_2 \cosh(\lambda_1 \xi) + a_3 \sin(\lambda_2 \xi) + a_4 \cos(\lambda_2 \xi) \quad (10)$$

여기서

$$\lambda_{1,2} = \left[ \frac{\sqrt{k_2} \mp k_1}{2} \right]^{1/2} \quad (11)$$

이며,  $k_1$  과  $k_2$  는 각각 다음과 같다.

$$k_1 = \frac{(1 - \omega^2 \beta r)p + \omega^2(\beta + r)}{(1 - p\beta)}, \quad k_2 = k_1^2 - 4\omega^2 \frac{(\omega^2 \beta r - 1)}{(1 - p\beta)} \quad (12)$$

동일한 방법으로 계산을 하면 전단변형에 대해서도 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi(\xi) = & q_1 a_2 \sinh(\lambda_1 \xi) + q_1 a_1 \cosh(\lambda_1 x) \\ & + q_2 a_4 \sin(\lambda_2 x) - q_2 a_3 \cos(\lambda_2 \xi) \end{aligned} \quad (13)$$

여기서

$$q_1 = (1 - p\beta)\lambda_1 + \frac{\omega^2 \beta}{\lambda_1}, \quad q_2 = (p\beta - 1)\lambda_2 + \frac{\omega^2 \beta}{\lambda_2} \quad (14)$$

이다. 식 (10), (13) 의  $Y(\xi)$  와  $\phi(\xi)$  는 크랙에 의하여 분할되는 각 구간에 대하여 각각 다음과 같이 표현할 수 있다.

I) segment 1: ( $0 \leq \xi \leq x_{i_c}$ )

$$\begin{aligned} Y_1(\xi) = & A_1 \sinh(\lambda_1 \xi) + A_2 \cosh(\lambda_1 \xi) \\ & + A_3 \sin(\lambda_2 \xi) + A_4 \cos(\lambda_2 \xi), \end{aligned} \quad (11a)$$

$$\phi_1(\xi) = q_1 A_2 \sinh(\lambda_1 \xi) + q_1 A_1 \cosh(\lambda_1 \xi)$$

$$+ q_2 A_4 \sin(\lambda_2 \xi) - q_2 A_3 \cos(\lambda_2 \xi),$$

II) segment 2: ( $x_{i_c} \leq \xi \leq 1$ )

$$\begin{aligned} Y_2(\xi) = & A_5 \sinh(\lambda_1 \xi) + A_6 \cosh(\lambda_1 \xi) \\ & + A_7 \sin(\lambda_2 \xi) + A_8 \cos(\lambda_2 \xi), \end{aligned} \quad (11b)$$

$$\phi_1(\xi) = q_1 A_6 \sinh(\lambda_1 \xi) + q_1 A_5 \cosh(\lambda_1 \xi)$$

$$+ q_2 A_8 \sin(\lambda_2 \xi) - q_2 A_7 \cos(\lambda_2 x) i,$$

외팔보의 경계조건과 크랙에 의한 분할 구간의 연속조건은 각각 다음과 같다.

$$Y_1(0) = \phi_1(0) = 0, \quad (12)$$

$$\frac{d\phi_2(1)}{dx} = 0, \quad \frac{dY_2(1)}{dx} - \phi_2(1) = 0$$

$$Y_1(\xi_c) = Y_2(\xi_c), \quad Y_1''(\xi_c) = Y_2''(\xi_c), \quad (13)$$

$$Y_1'''(\xi_c) = Y_2'''(\xi_c), \quad k(\phi_2(\xi_c) - \phi_1(\xi_c)) = \phi_2'(\xi_c)$$

식 (11) 의 미지수들은 식 (12), (13) 의 경계조건과 연속조건을 이용하여 각각 구할 수 있다. 또 계의 고유진동수는 다음과 같은 고유치의 기본 형태로 변환하여 쉽게 구할 수 있다.

$$\Lambda \mathbf{X} = \mathbf{0}, \quad |\Lambda| = 0 \quad (14)$$

여기서  $\Lambda$  는 식 (12), (13) 의 연속조건 및 경계조건을 대입하여 얻은 각각의 식을 행렬형태로 표현한 것이다. 또

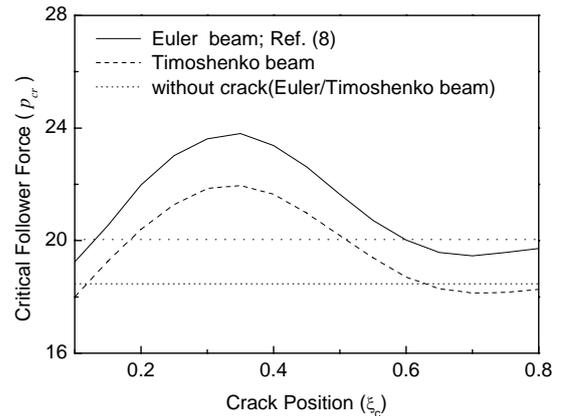
$|\Lambda|$  는  $\Lambda$  의 행렬식을 나타내고 있으며,  $\mathbf{X}$  는 다음과 같다.

$$\mathbf{X} = [A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8]^T \quad (15)$$

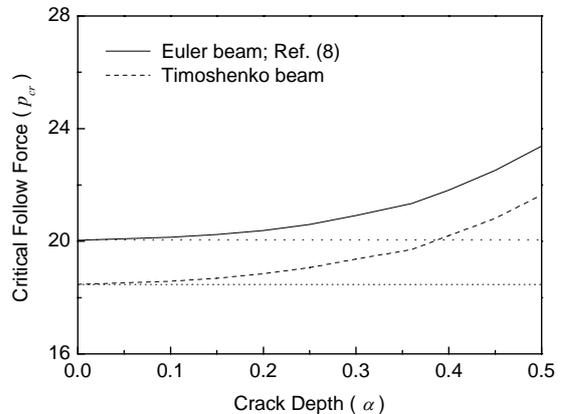
### 3. 수치해석결과 및 고찰

이 연구에서는 수치해석에서 유도된 운동방정식을 이용하여 종동력의 임계값(플러터 임계하중) 및 크랙의 영향에 의한 티모센코 보의 고유진동수 변화를 수치해석을 통해 비교, 고찰하였다. 수치해석은 Matlab (6.1) 및 Mathematica (5.0) 를 이용하여 계산을 수행하였다. 일반적으로 종동력을 받는 외팔보에서 종동력이 증가할수록 1 차 모드 고유진동수는 서서히 증가하고, 2 차 모드 고유진동수는 감소하는데 두 모드의 고유진동수가 일치하는 점의 종동력 값이 바로 그 계의 플러터 불안정을 유발하는 임계 종동력( $p_{cr}$ ) 값이다.

Fig. 2 는 끝단질량이 없는 경우 크랙의 영향 즉, 크랙의 크기와 위치의 변화에 따른 계의 임계 종동력 값의 변화를 나타낸 것이다. Fig. 2(a) 는 크랙의 크기가 0.5 로 일정한 경우에 크랙의 위치변화에 따른 보의 플러터 임계 종동력을



(a) Effect of crack position( $\alpha = 0.5$ )



(b) Effect of crack depth( $\xi_c = 0.4$ )

Fig. 2 Critical follower force versus crack effects

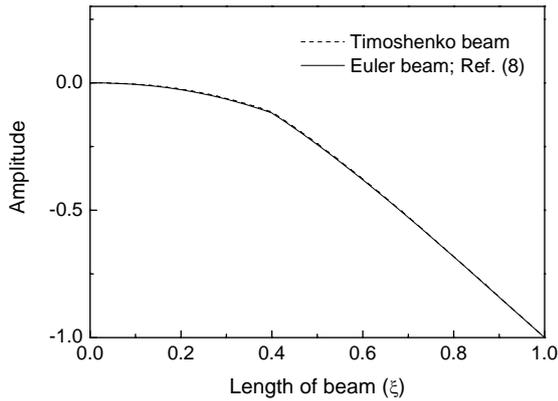


Fig. 3 First mode shape of cantilever beam at  $p=10$

참고문헌 (18)의 오일러 보 이론으로 구한 결과와 비교하여 도시하였다. 크랙이 존재하지 않는 경우의 임계유속 값은 오일러 보는  $20.05^{(1)}$ 이며, 티모센코 보인 경우 18.47이다. 전반적으로 오일러 보에 비해 티모센코 보의 플러터 임계 종동력 값은 약 7~8% 정도 낮은 값을 가진다. 티모센코 보인 경우 크랙이 위치하는 범위가  $0.12 \leq \xi_c \leq 0.62$  일 때는 크랙이 존재하지 않는 경우의 임계 종동력에 비하여 큰 임계 종동력 값을 가지지만 그 이외의 위치에 크랙이 존재하는 경우는 더 작은 임계종동력 값을 가짐을 알 수 있다. 즉, 크랙이 존재하는 위치에 따라 임계 종동력은 완전히 다른 경향의 결과를 가져온다는 것을 알 수 있다. 이러한 현상은 집중 종동력이 작용하는 경우 외팔보의 모드형상과 곡률 모양의 영향에 의한 결과임을 알 수 있다<sup>(6)</sup>. Fig. 2(b)는 크랙이 존재하는 위치가 보의 0.4일 때 크랙의 깊이 변화에 따른 보의 임계 종동력의 변화를 보여준다. 전반적으로 크랙의 크기와 임계 종동력값은 서로 비례적인 경향을 나타낸다.

Fig. 3은 보에 작용하는 임계종동력  $p=10$ 인 경우 보의 진동모드를 정규화하여 나타낸 것이다. 이 때 크랙의 크기와 위치는 각각 0.5와 0.4이다. 티모센코 보인 경우 미소하지만 진폭이 크다는 것을 알 수 있다. 이때의 오일러 보의 무차원 고유진동수  $\omega=4.34$ , 그리고 티모센코 보의 고유진동수는 4.31로 나타났다. 크랙이 존재하는 보의 위치 ( $\xi_c=0.4$ )에서 약간의 모드형상의 변화가 생기는 것을 확인할 수 있다. 이러한 현상은 크랙의 위치가 보의 앞부분에 존재할수록, 크랙의 크기가 클수록 더욱 확연히 나타난다.

#### 4. 결론

티모센코 보 이론을 적용하여 크랙을 가진 외팔보에 종동력이 작용하는 경우 보의 안정성, 즉 플러터 임계 종동력에 미치는 크랙의 영향에 대하여 수치해석 하고, 참고문헌 (8)의 오일러 보의 결과와 비교, 고찰하였다. 또 일정 ( $p=10$ ) 종동력이 작용하는 경우 1차 진동 모드형상을 도

시하였다. 종동력을 받는 외팔보의 경우 크랙의 위치가 크랙이 파이프의 일정범위에 존재하는 경우(약  $0.12 \leq \xi_c \leq 0.62$ )는 크랙의 영향으로 인하여 플러터 불안정을 유발하는 임계 종동력의 값이 이 커지며, 다른 범위에서는 오히려 임계 종동력이 작아진다. 이것은 크랙의 존재 시 그 존재하는 위치가 계의 안정성에 매우 중요한 인자로 작용함을 판단할 수 있다. 전반적으로 티모센코 보 이론을 적용한 경우 오일러 보의 결과에 비하여 약 7~8% 정도 낮은 임계 종동력 값을 보인다.

#### 참 고 문 헌

- (1) Beck, M., 1952, "Die Knicklast des Einseitig Eingespannten Tangential Gedrückten Stabes", ZAMP, Vol. 3, pp. 225~228.
- (2) Datta, P. K. and Lal, M. K., 1992, "Parametric Instability of a Non-prismatic Bar with Localized Damage Subjected to an Intermediate Periodic Axial Load", Computer and Structures, Vol. 4, No. 6 pp.1199~1202.
- (3) Ruotolo, R., Surace, C., Crespo, P. and Storer, D., 1996, "Harmonic Analysis of The Vibrations of a Cantilevered Beam With a Closing Crack", Computers and Structures, Vol. 61, No. 6, pp.1057~1074.
- (4) Takahashi, I., 1997, "Vibration and Stability of a Cracked Shaft Simultaneously Subjected to a Follower Force with an Axial Force", Int. Journal of Solids and Structures, Vol. 35, No. 23, pp.3071~3080.
- (5) Takahashi, I., 1999, "Vibration and Stability of non-uniform Cracked Timoshenko Beam Subjected to Follower Force", Computers and Structures, Vol. 71, pp.585~591.
- (6) Wang, Q., 2004, "A Comprehensive Stability Analysis of a Cracked Beam Subjected to Follower Compression", Int. Journal of Solids and Structures, Vol. 41, pp.4875~4888.
- (7) Dado, M. H. F. and Abuzeid, O., 2003, "Coupled Transverse and Axial Vibration Behaviour of Cracked Beam with End Mass and Rotary Inertia", Journal of Sound and Vibration, Vol. 261, pp.675~696.
- (8) Son, I. S., Yoon, H. I. and Ahn, T. S., 2007, "Stability Analysis of Cracked Beam with Tip Mass and Follower Force", Transactions of KSNVE, Vol. 17, No. 7, pp.605~610.