

양면에서 부분적으로 유체와 접하는 사각평판의 고유진동

Free Vibration of a Rectangular Plate Partially in Contact with a Liquid at Both Sides

정경훈† · 이규만* · 김태완*

Kyeong-Hoon Jeong, Gyu-Mahn Lee and Tae-Wan Kim

Key Words : Hydroelastic Vibration(수탄성 진동), Liquid-contacting(접수), Rectangular Plate(사각평판), Added Mass(부가질량), Rayleigh-Ritz Method(Rayleigh-Ritz 방법), Finite Fourier Series Expansion(유한 푸리에 급수전개)

ABSTRACT

An analytical method for the free vibration of a flexible rectangular plate in contact with water is developed by the Rayleigh-Ritz method. The plate clamped along the edges is partially contacted with water at both sides. It is assumed that the water bounded by rigid walls is incompressible and inviscid. The wet mode shape of the plate is assumed as a combination of the dry mode shapes of a clamped beam. The liquid motion is described by using the liquid displacement potential and determined by using the compatibility conditions along the liquid interface with the plate. Minimizing the Rayleigh quotient based on the energy conservation gives an eigenvalue problem. It is found that the theoretical results can predict excellently the fluid-coupled natural frequencies comparing with the finite element analysis result.

1. 서론

유체와 접촉하는 구조물의 고유진동수는 유체로 인한 부가질량의 증가로 공기중의 고유진동수보다 감소하게 된다. 이러한 유체-구조물간의 상호간섭 문제는 많은 연구자들이 연구해 왔다. 특히 유체와 접하는 사각평판의 고유진동 해석에 최근까지 다양한 연구가 있었다. 유체에 잠긴 사각평판의 고유진동은 여러 연구자들이 이론과 실험으로 연구하였다 [1-4]. 그리고 사각평판의 한쪽면에만 유체가 접할 때, 사각평판의 고유진동 특성을 연구한 논문도 있다 [5-8]. 지금까지 평판의 양쪽면에 서로 다른 수위를 갖는 유체와 사각평판이 접촉할 경우, 이에 대한 동특성을 연구한 논문이 없었다. 따라서 본 논문은 사각평판의 양쪽면에 수위가 다른 유체가 접촉하고 있는 경우에 대하여 고유진동 해석이론을 유도하고 유한요소 해석으로 이론을 검증하고자 한다.

2. 이론 전개

2.1 공기중 고유진동수

† 교신저자; 한국원자력연구원
E-mail : khjeong@kaeri.re.kr
Tel : (042) 868-8792

* 한국원자력연구원

Fig.1은 유체와 부분적으로 접하고 있는 사각평판을 보여주고 있다. 여기서 a , b 와 h 는 사각평판의 세로 길이, 가로 길이와 두께를 각각 나타낸다. 그리고 H_1 및 H_2 는 평판의 양면에서 접촉하고 있는 유체의 수위를 나타내고, L_1 및 L_2 는 유체의 z 방향 폭을 각각 나타낸다. 이론해석을 위하여 접촉하고 있는 유체는 비압축성, 비점성의 이상유체로 가정한다. 그리고 중력의 영향은 무시한다. 유체와 부분적으로 접하는 사각평판의 변위 $w(x, y, t)$ 는 사각평판의 공기중 변위 W_{mn} 과 미정계수 $q_{(m,n)}$ 의 조합으로 나타낼 수 있다.

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N q_{(m,n)} W_{mn}(x, y) \exp(i\omega t) \quad (1)$$

여기서 $i = \sqrt{-1}$ 이며 ω 는 접수된 평판의 고유진동수를 나타낸다. 그리고 m 과 n 은 x 방향과 y 방향의 모드수를 각각 나타낸다. 공기중 사각평판의 변위는 허용함수인 공기중 양단 고정된 보의 모드함수 곱으로 나타낼 수 있다.

$$W_{mn}(x, y) = X_m(x) Y_n(y) \quad (2)$$

여기서 사각평판의 경계조건을 만족하는 허용함수는 다음과 같이 나타낸다.

$$X_m(x) = \cosh(\lambda_m x/a) - \cos(\lambda_m x/a) - \sigma_m \{ \sinh(\lambda_m x/a) - \sin(\lambda_m x/a) \}, \quad (3)$$

$$Y_n(y) = \cosh(\lambda_n y/b) - \cos(\lambda_n y/b)$$

$$-\sigma_n \{ \sinh(\lambda_n y/b) - \sin(\lambda_n y/b) \} \quad (4)$$

여기서 계수 λ_m 와 σ_m 는 다음 식으로 얻는다.

$$\cos(\lambda_m) \cosh(\lambda_m) = 1, \quad (5)$$

$$\sigma_m = \frac{\cosh(\lambda_m) - \cos(\lambda_m)}{\sinh(\lambda_m) - \sin(\lambda_m)} \quad (6)$$

미정계수 $q_{(m,n)}$ 을 식(7)과 같이 벡터로 나타낼 때 사각평판의 기준운동에너지 T^* 는 식(8)로 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{q} = \{ q_{(1,1)} q_{(1,2)} \cdots q_{(1,N)} q_{(2,1)} q_{(2,2)} \cdots q_{(M,N)} \}^T \quad (7)$$

$$T^* = \frac{\rho h}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{Z} \mathbf{q} \quad (8)$$

여기서 ρ 는 사각평판의 밀도를 나타낸다. 한편 모드의 직교성을 이용하면 식(8)의 행렬 \mathbf{Z} 를 식(9)로 나타낼 수 있다.

$$Z = \int_0^b \int_0^a W_{mn} W_{lk} dx dy = ab \quad (9)$$

여기서 l 과 k 도 x 방향과 y 방향의 모드수를 각각 나타낸다. 그리고 사각평판의 최대 포텐셜에너지는 식(10)으로 나타낸다.

$$\begin{aligned} V = & \frac{D}{2} \int_0^b \int_0^a \left[\left\{ \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W_{jk}}{\partial x^2} \right\} + \left\{ \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 W_{jk}}{\partial y^2} \right\} \right. \\ & + \mu \left\{ \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W_{jk}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W_{jk}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial y^2} \right\} \\ & \left. + 2(1-\mu) \left\{ \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 W_{jk}}{\partial x \partial y} \right\} \right] dx dy \quad (10) \end{aligned}$$

여기서 평판의 강성도 $D = Eh^3/12(1-\mu^2)$ 이고, μ 와 E 는 평판의 Poisson비와 탄성계수를 나타낸다. 식(10)에 식(2)-(4)를 대입하고 각 구간에 따라 적분을 수행하면 식(11)을 얻는다.

$$V = \frac{D}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{U} \mathbf{q} \quad (11)$$

여기서 행렬 \mathbf{U} 는 각각의 허용함수를 미분하고 구간별 적분을 통해서 구해진다. 사각평판 고유진동의 Rayleigh 지수 V/T^* 를 미정계수 벡터 \mathbf{q} 에 대해서 최소화하면 식(12)의 고유치방정식을 얻게 된다. 이 식으로부터 공기중의 사각평판의 고유진

동수와 모드형상을 얻는다.

$$D \mathbf{U} \mathbf{q} - \omega^2 \rho h \mathbf{Z} \mathbf{q} = 0 \quad (12)$$

2.2 유체의 변위포텐셜 (Displacement Potential)

사각평판의 양쪽에서 부분적으로 접하고 있는 이상유체의 운동은 속도포텐셜의 Laplace 방정식으로 나타낸다.

$$\nabla^2 \Phi_j(x, y, z, t) = 0, \quad j = 1, 2 \quad (13)$$

여기서 $j = 1$ 인 경우는 평판의 왼편에 위치한 유체를 나타내며 $j = 2$ 인 경우는 평판의 오른편에 위치한 유체를 나타낸다. 식(13)의 속도포텐셜은 변수분리를 이용하면 식(14)의 변위포텐셜로 나타낼 수 있다.

$$\Phi_j(x, y, z, t) = i\omega \phi_j(x, y, z) \exp(i\omega t) \quad (14)$$

유체를 감싸는 벽과 바닥을 강체로 가정한다면 다음의 유체 경계조건식을 만족해야 한다.

$$\left. \frac{\partial \phi_j(x, y, z)}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial \phi_j(x, y, z)}{\partial y} \right|_{y=b} = 0, \quad (15)$$

$$\left. \frac{\partial \phi_j(x, y, z)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \phi_j(x, y, z)}{\partial z} \right|_{z=L_j} = 0 \quad (16,17)$$

또한 중력의 영향을 무시한다면 유체 윗면인 자유표면의 운동에 대한 경계조건식은 식(18)로 근사화될 수 있다.

$$\phi_j(x, y, z) \Big|_{x=H_j} = 0 \quad (18)$$

유체의 경계조건식(15)-(18)을 만족하는 식(13)의 일반해는 유체의 변위포텐셜인 식(19)로 나타낸다.

$$\begin{aligned} \phi_j(x, y, z) = & \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \cos(\alpha_{rj} x) \cos(\beta_s y) \\ & \times \{ B_{rsj} \sinh(\gamma_{rsj} z) + C_{rsj} \cosh(\gamma_{rsj} z) \} \quad (19) \end{aligned}$$

여기서 B_{rsj} 와 C_{rsj} 는 미정계수이며, 식(19)에 나타난 계수는 다음 식으로 정의된다.

$$\alpha_{rj} = \frac{(2r-1)\pi}{2H_j}, \quad \beta_s = \frac{(s-1)\pi}{b}, \quad \gamma_{rsj} = \sqrt{\alpha_{rj}^2 + \beta_s^2} \quad (20-22)$$

미정계수 B_{rsj} 와 C_{rsj} 의 관계식은 식(17)을 식(19)에 대입하여 식(23)을 구한다.

$$C_{rsj} = - \left[\tanh(\gamma_{rsj} L_j) \right]^{-1} B_{rsj} \quad (23)$$

따라서 유체의 변위포텐셜은 식(24)로 귀착된다.

$$\begin{aligned} \phi_j(x, y, z) = & \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} B_{rsj} \cos(\alpha_{rj} x) \cos(\beta_s y) \\ & \times \left\{ \sinh(\gamma_{rsj} z) - \cosh(\gamma_{rsj} z) / \tanh(\gamma_{rsj} L_j) \right\} \end{aligned} \quad (24)$$

2.3 접수 사각평판의 고유진동수

접수면에서 적합조건을 고려하면 접수면에 수직 방향의 유체의 변위와 평판의 변위가 같아야 하므로 식(25)를 만족해야 한다.

$$\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N q_{(m,n)} W_{mn}(x, y) = \frac{\partial \phi_j(x, y, z)}{\partial z} \Big|_{z=0} \quad (25)$$

식(25)에 식(2)–(4)와 식(24)를 대입하면 식(26)을 얻는다.

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M q_{(m,n)} \left[\cosh(\lambda_m x/a) - \cos(\lambda_m x/a) \right. \\ & \quad \left. - \sigma_m \left\{ \sinh(\lambda_m x/a) - \sin(\lambda_m x/a) \right\} \right] \\ & \times \left[\cosh\left(\frac{\lambda_n y}{b}\right) - \cos\left(\frac{\lambda_n y}{b}\right) - \sigma_n \left\{ \sinh\left(\frac{\lambda_n y}{b}\right) - \sin\left(\frac{\lambda_n y}{b}\right) \right\} \right] \\ & = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \gamma_{rsj} B_{rsj} \cos(\alpha_{rj} x) \cos(\beta_s y) \end{aligned} \quad (26)$$

위 식에 유한 푸리에변환(finite Fourier transform)을 수행하기 위하여 양변에 $\sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \cos(\alpha_{rj} x) \cos(\beta_s y)$

를 곱하고 구간 $[0, H_j]$ 와 $[0, b]$ 를 따라서 적분하고 정리하면 식(27)을 얻는다.

$$B_{rsj} = \begin{cases} \frac{2}{\gamma_{r1j} b H_j} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M q_{(m,n)} \Gamma_{mrj} \Gamma_{n1} & \text{for } s=1 \\ \frac{4}{\gamma_{rsj} b H_j} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M q_{(m,n)} \Gamma_{mrj} \Gamma_{ns} & \text{for } s>1 \end{cases} \quad (27)$$

여기서 Γ_{mrj} 와 Γ_{ns} 는 적분과정에서 얻게 되는 계수다. 결국 유체의 경계조건과 사각평판과의 적합조건을 만족하는 유체의 변위포텐셜은 식(28)로 나타난다.

$$\phi_j(x, y, z) = \frac{1}{b H_j} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N q_{(m,n)} \sum_{r=1}^{\infty} \left[\frac{2 \Gamma_{mrj} \Gamma_{n1j}}{\gamma_{r1j}} \cos(\alpha_{rj} x) \right.$$

$$\begin{aligned} & \left. \times \left\{ \sinh(\gamma_{r1j} z) - \cosh(\gamma_{r1j} z) / \tanh(\gamma_{r1j} L_j) \right\} \right. \\ & \left. + \sum_{s=2}^{\infty} \frac{4 \Gamma_{mrj} \Gamma_{nsj}}{\gamma_{rsj}} \cos(\alpha_{rj} x) \cos(\beta_s y) \right. \\ & \left. \times \left\{ \sinh(\gamma_{rsj} z) - \cosh(\gamma_{rsj} z) / \tanh(\gamma_{rsj} L_j) \right\} \right] \end{aligned} \quad (28)$$

유체의 기준운동에너지는 유체의 경계운동을 적분하여 구할 수 있다. 따라서 다음 식으로 유체의 기준운동에너지를 구한다.

$$\begin{aligned} T_o^* = & -\frac{1}{2} \rho_o \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{l=1}^M \sum_{k=1}^N q_{(l,k)} \\ & \times \int_0^b \left(\int_0^{L_l} W_{lk} \phi_l(x, y, 0) dx + \int_0^{L_k} W_{lk} \phi_2(x, y, 0) dx \right) dy \end{aligned} \quad (29)$$

여기서 ρ_o 는 유체의 밀도를 나타낸다. 식(29)에 식(2)–(4)와 (28)을 대입하면 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} T_o^* = & \frac{\rho_o}{b} \sum_{j=1}^2 \frac{1}{H_j} \sum_m^M \sum_n^N \sum_l^M \sum_k^N q_{(m,n)} q_{(l,k)} \\ & \times \sum_{r=1}^{\infty} \left[\frac{\Gamma_{mrj} \Gamma_{lrj} \Gamma_{n1j} \Gamma_{k1j}}{\gamma_{r1j} \tanh(\gamma_{r1j} L_j)} + \sum_{s=2}^{\infty} \frac{2 \Gamma_{mrj} \Gamma_{lrj} \Gamma_{nsj} \Gamma_{ksj}}{\gamma_{rsj} \tanh(\gamma_{rsj} L_j)} \right] \\ & = \rho_o \mathbf{q}^T \mathbf{G} \mathbf{q} \end{aligned} \quad (30)$$

2.1절에서 유도했던 동일한 Rayleigh–Ritz 방법으로 식(31)의 고유치방정식을 얻게 된다. 이 식으로부터 접수 사각평판의 고유진동수와 모드형상을 얻는다.

$$D U \mathbf{q} - \omega^2 \{ \rho h \mathbf{Z} + \rho_o \mathbf{G} \} \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (31)$$

3. 계산에 및 고찰

3.1 유한요소 해석모델

고정된 사각평판이 갇혀 있는 이상유체와 평판의 양쪽에서 부분적으로 접촉할 때, 고유진동수와 모드형상을 식(31)의 행렬식으로부터 구할 수 있다. 제시된 이론적인 해석방법의 타당성을 확인하기 위하여 상용 유한요소 해석 코드인 ANSYS를 이용하여 양쪽면의 수위가 서로 다른 고정된 사각평판을 3차원 유한요소 모델을 만들었다. 해석에 사용된 사각평판은 알루미늄 재질이며, 크기는 가로 360 mm 이고 세로 480 mm 이며 두께는 3 mm 다. 사각평판 및 유체의 물성치는 다음과 같다: 환형평판의 탄성계수 = 65.0 GPa, Poisson 비 = 0.3, 밀도 = 2700 kg/m³. 사각평판과 접하는 유체는 물

로서 밀도가 1000 kg/m^3 이다. 사각평판은 모든 가장자리에서 고정되었다고 가정하였다. 유한요소 해석모델은 3 차원 유체요소 (FLUID80)와 탄성 셸 요소 (SHELL63)로 구성되었다. 유체요소 절점은 마주 보는 강체 벽면에서 z 방향의 변위만을 구속하였다. 그리고 사각평판과 접촉하는 유체의 절점이 평판의 절점과 수직방향으로만 같이 움직일 수 있도록 연성시켰다. 평판과 양쪽 강체벽 사이의 거리는 $L_1 = L_2 = 200 \text{ mm}$ 다. 왼쪽 유체의 수위가 25%이고 오른쪽 유체의 수위가 75%인 경우에 유한요소 해석모델은 Fig.2 에서 보는 바와 같이 왼쪽 유체인 경우, 8640 ($12 \times 36 \times 20$)개의 동일한 크기의 3 차원 유체요소로 구성되며, 오른쪽 유체인 경우, 동일한 크기의 유체요소 25920 ($36 \times 36 \times 20$) 개로 구성된다. 사각평판은 1728 (48×36) 개의 셸 요소로 이루어져 있다. ANSYS 의 고유치를 추출하는 방법 중에서 본 문제에 Block Lanczos 방법을 적용하였는데 이는 비교적 큰 유한요소해석 모델에 사용된다. 한편 양쪽 유체의 수위가 각각 50%인 경우는 양쪽에 각각 17280 ($24 \times 36 \times 20$)개의 동일한 크기의 3 차원 유체요소로 구성된다.

3.2 이론의 검증 및 결과

Table 1 과 Table 2 는 상용 ANSYS Code 를 이용한 유한요소해석 및 이론해석 결과를 보여주고 있다. 이론해석 계산에서 급수전개의 수렴성을 조사하여 수렴속도가 빠르다는 것을 확인하였고 따라서 충분히 큰 Fourier 급수전개항을 계산에서 사용하였다. 급수전개항 r 과 s 는 각각 50 을 취하여 해가 충분히 수렴하도록 하였다. Rayleigh-Ritz 방법을 적용할 때 공기중의 보 모드를 중첩시키는데 M 과 N 에 충분히 큰 값인 18 과 5 를 취하여 계산하였다. 이론해석을 수행할 때, 상용 소프트웨어인 MathCAD(2000 년판)을 사용하여 이론값 고유치, 즉 이론값 고유진동수를 구하였다.

25%의 수위와 75%의 수위로 이루어진 평판의 이론해석 및 유한요소해석 결과가 Table 1 에 나타나 있는데, 12 개의 저차 모드 고유진동수를 확인한 결과 이론치와 유한요소 해석결과가 2% 오차 범위 이내에서 일치하고 있음을 확인할 수 있었다. 한편 양쪽이 50%의 수위와 접촉하고 있는 평판의 결과는 Table 1 에 나타나 있는데, 12 개의 저차 모드 고유진동수에서 2.5% 오차 범위 내에서 잘 일치하고 있음을 확인하였다. 따라서 유한요소 해석결과와 이론해석결과를 비교해 볼 때, 제시된 이론의 타당성은 확보되었다고 판단된다.

Fig. 3 은 유한요소 해석으로 구한 25%의 수위와 75%의 수위로 이루어진 평판의 12 개의 모드형상을 보여주고 있다. 유체의 영향으로 1 차, 3 차 모드와 6 차 모드처럼 판의 하단부에서 변위가 크게 나타나기도 하지만 그 밖의 모드는 오히려 유체가

접하지 않는 부분의 변위가 크게 나타난다. 한편 Fig. 4 에서 보는 바와 같이 양쪽에 50%의 수위를 갖는 경우, 모드형상에서 유체의 영향이 집중되는 경향을 보이고 있어 공기중 모드에서 많이 왜곡된 모드형상을 보여주고 있다. 하지만 고유진동수 상에서는 반대로 저차모드에서 50%의 수위를 갖는 경우보다 25%~75%의 수위 경우가 고유진동수가 더 낮아 유체의 부가질량이 크다는 것을 확인할 수 있다.

4. 결론

본 논문은 평판의 양쪽 면에 서로 다른 수위를 갖는 유체와 접촉하고 있는 사각평판에 대하여 고유진동수를 구하는 해석방법을 제시하였다. 이 해석방법의 타당성을 확인하기 위하여 사각평판의 경계조건이 고정된 경우에 대하여 고유진동수를 이론적으로 구하고 상용 컴퓨터 코드로 검증하였다. 계산결과를 통해서 이론값의 고유진동수와 유한요소 해석결과로 얻은 고유진동수가 매우 잘 일치하고 있음을 확인하였다. 제시된 이론은 수문과 같이 물과 접하는 사각구조물 해석에 유용하게 이용될 것으로 기대된다.

참고문헌

- (1) Fu, Y. and Price, W. G., 1987, "Interactions between a Partially or Totally Immersed Vibrating Cantilever Plate and the Surrounding Fluid", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 118, pp. 495-513.
- (2) Haddara, M. R. and Cao, S., 1996, "A Study of the Dynamic Response of Submerged Rectangular Flat Plates", *Marine Structures*, Vol. 9, pp. 913-933.
- (3) Liang, C. C., Liao, Y. S. Tai, and W. H. Lai, 2001, "The Free Vibration Analysis of Submerged Cantilever Plates", *Ocean Engineering*, Vol. 28, pp. 1225-1245.
- (4) Yadykin, Y., Tenetov, V., and Levin, D., 2003, "The Added Mass of a Flexible Plate Oscillating in a Fluid", *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 17, pp. 115-123.
- (5) Robinson, N. J., Palmer, S. C., 1990, "A Modal Analysis of a Rectangular Plate Floating on an Incompressible Liquid", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 142, pp. 435-460.
- (6) Kwak, M. K., 1996, "Hydroelastic Vibration of Rectangular Plates", *Transaction of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 63, pp. 110-115.
- (7) D. Zhou, and Y. K. Cheung, 2000, "Vibration of Vertical Rectangular Plate in Contact with Water on One Side", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 29, pp. 693-710.
- (8) Cheung, Y. K., and Zhou, D., 2000, "Coupled Vibratory Characteristics of a Rectangular Container

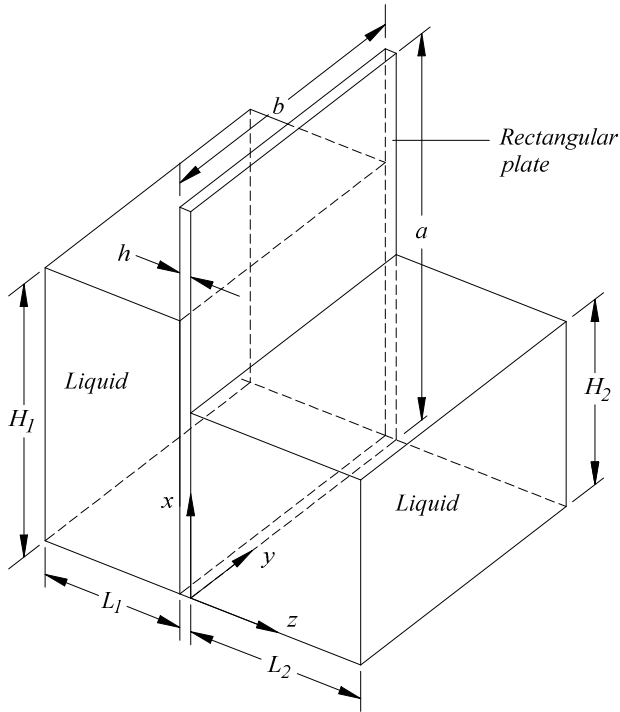


Fig. 1 A flexible rectangular plate partially in contact with a liquid.

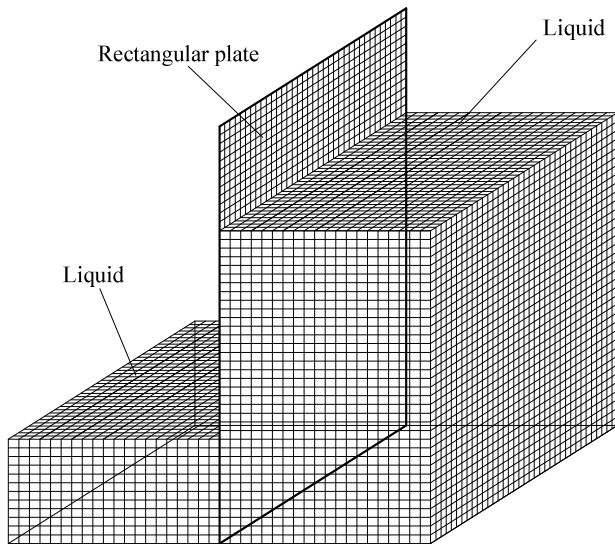


Fig. 2 Typical 3-dimensional finite element analysis model of a flexible rectangular plate partially in contact with water (25%–75% water level).

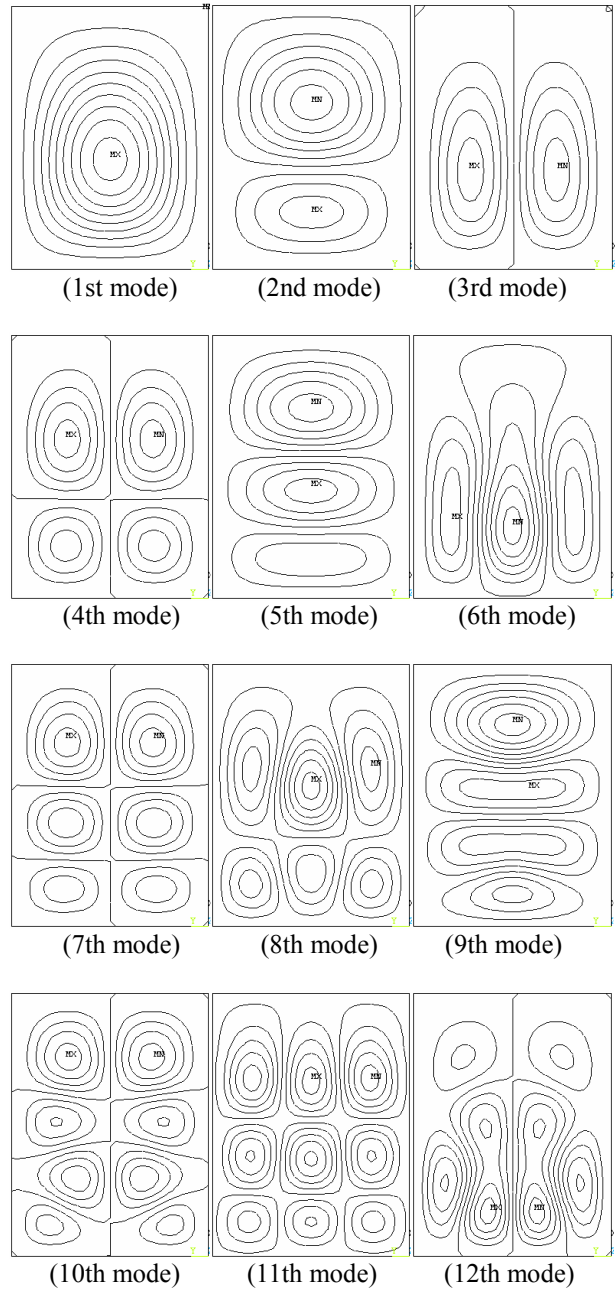
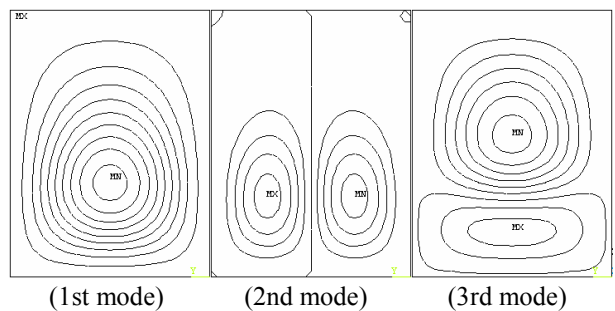


Fig. 3 Mode shapes of the partially water-contacting plate from FEM results ($a = 480$ mm, $b = 360$ mm, $h = 3$ mm, $H_1 = 360$ mm, $H_2 = 120$ mm, $L_1 = L_2 = 200$ mm).



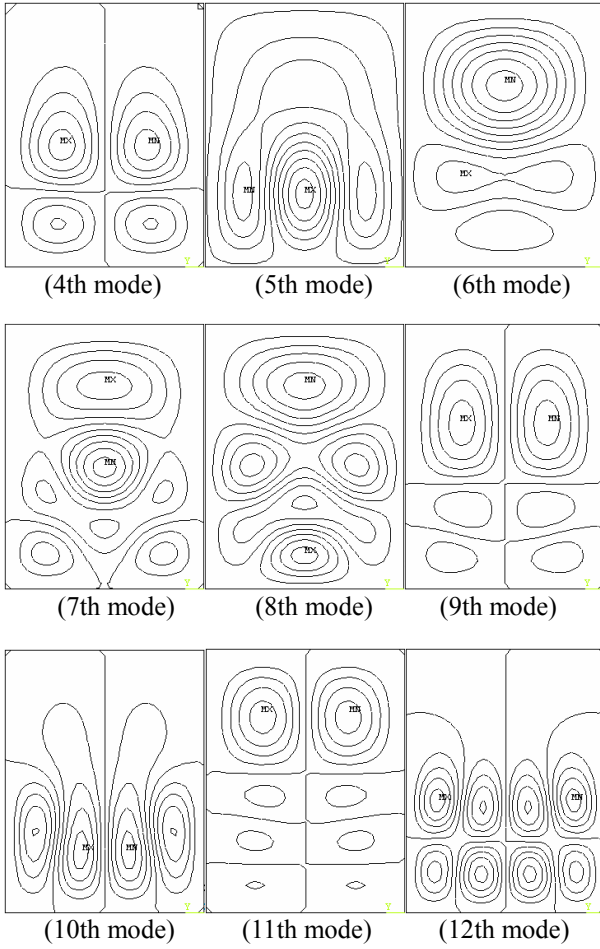


Fig. 4 Mode shapes of the partially water-contacting plate from FEM results ($a = 480$ mm, $b = 360$ mm, $h = 3$ mm, $H_1 = 240$ mm, $H_2 = 240$ mm, $L_1 = L_2 = 200$ mm).

Table 1 Comparison of FEM and theoretical natural frequencies for a clamped rectangular plate in partially contact with water ($a = 480$ mm, $b = 360$ mm, $h = 3$ mm, $H_1 = 360$ mm, $H_2 = 120$ mm, $L_1 = L_2 = 200$ mm).

Mode	Natural frequency (Hz)		Error (%)
	ANSYS	Theory	
1 (S)	35.9	36.0	0.27
2 (S)	94.9	95.6	0.73
3 (A)	125.6	126.3	0.55
4 (A)	188.1	190.0	1.00
5 (S)	192.2	194.4	1.13
6 (S)	264.2	267.3	1.16
7 (A)	295.7	299.7	1.33
8 (S)	339.1	343.4	1.25
9 (S)	342.1	347.3	1.50
10 (A)	454.6	463.5	1.92
11 (S)	466.4	474.1	1.62
12 (A)	478.3	486.3	1.65

Note

S: Symmetric mode with respect to $y = b/2$

A: Asymmetric mode with respect to $y = b/2$

Table 2 Comparison of FEM (ANSYS) and theoretical natural frequencies for a clamped rectangular plate in partially contact with water ($a = 480$ mm, $b = 360$ mm, $h = 3$ mm, $H_1 = 240$ mm, $H_2 = 240$ mm, $L_1 = L_2 = 200$ mm).

Mode	Natural frequency (Hz)		Error (%)
	ANSYS	Theory	
1 (S)	43.8	44.0	0.45
2 (A)	115.2	116.0	0.69
3 (S)	128.6	130.7	1.61
4 (A)	229.0	233.0	1.72
5 (S)	233.2	235.5	0.98
6 (S)	247.4	249.0	0.64
7 (S)	366.4	373.0	1.77
8 (S)	380.1	387.7	1.96
9 (A)	405.0	412.7	1.87
10 (A)	412.5	417.8	1.27
11 (A)	512.8	517.9	0.98
12 (A)	570.6	584.2	2.33

Note

S: Symmetric mode with respect to $y = b/2$

A: Asymmetric mode with respect to $y = b/2$