

**연속 시간과 이산 시간 비선형 상호 결합 시스템을 위한
분산 정적 출력 제한 제어기 설계**

구근범*, 주영훈**, 박진배*

*연세대학교 전기전자공학과, **군산대학교 전자정보공학부

**Decentralised Static Output Feedback Controller Design for Continuous-time
and Discrete-time Nonlinear Interconnected Systems**

Geun Bum Koo*, Young Hoon Joo** and Jin Bae Park*

*Department of Electrical and Electronic Engineering, Yonsei University

**School of Electronic and Information Engineering, Kunsan National University

Abstract - 본 논문은 연속 시간과 이산 시간 비선형 상호 결합 시스템에 대한 분산 정적 출력 제한 제어기의 설계에 대해 연구한다. 먼저 퍼지 모델 기법을 이용하여 비선형 상호 결합 시스템을 Takagi-Sugeno (T-S) 퍼지 모델로 모델링한다. 각각의 하위 시스템에 대한 정적 출력 제한 제어기를 병렬 분산 보상(PDC)기법을 이용하여 구한다. 선형 행렬 부등식(LMI)을 통하여 하위 시스템의 안정화를 위한 이득값을 구한다. 이득값을 통하여 하위 시스템들이 안정화되고 그를 통해 전체 상호 결합 시스템이 안정화됨을 모의실험을 통하여 증명한다.

지 모델링을 통하여 모델링을 하면 다음과 같이 나타낼 수 있다:

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{k=1}^L \mu_k(z_i(t))(A_{ik}x_i(t) + B_{ik}u_i(k) + \sum_{j=1, j \neq i}^N A_{ijk}x_j(t)) \quad (4)$$

$$x_i(t+1) = \sum_{k=1}^L \mu_k(z_i(t))(G_{ik}x_i(t) + H_{ik}u_i(k) + \sum_{j=1, j \neq i}^N G_{ijk}x_j(t)) \quad (5)$$

모델링된 시스템을 제어하기 위해서 다음과 같은 정적 출력 제한 제어기를 설계한다:

$$u_i(t) = \sum_{k=1}^L \mu_k(z_i(t))F_{ik}y_i(t) \quad (6)$$

식(4), (5)와 식(6)을 이용하여 정적 출력 제한 제어기로 제어가 된 연속 시간과 이산 시간 비선형 상호 결합 시스템의 모델을 구할 수 있다:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= \sum_{k=1}^L \sum_{m=1}^L \mu_k(z_i(t))\mu_m(z_i(t)) \\ &\quad \times ((A_{ik} + B_{ik}F_{im}C_i)x_i(t) + \sum_{j=1, j \neq i}^N A_{ijk}x_j(t)) \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_i(t+1) &= \sum_{k=1}^L \sum_{m=1}^L \mu_k(z_i(t))\mu_m(z_i(t)) \\ &\quad \times ((G_{ik} + H_{ik}F_{im}C_i)x_i(t) + \sum_{j=1, j \neq i}^N G_{ijk}x_j(t)) \quad (8) \end{aligned}$$

1. 서 론

일반적으로 시스템에 대한 제어는 하나의 시스템에 대해서만 이뤄졌다. 몇 개의 시스템이 존재하여도 그것을 하나의 시스템이라 상정한 후, 제어기를 설계하는 것이 대부분이었다. 하지만 이럴 경우, 시스템을 분석하기도 힘들뿐더러 제어기의 이득값이 존재하지 않을 경우도 많아진다. 이러한 문제는 상호 결합 시스템으로 해결할 수 있다. 상호 결합 시스템이란 몇 개의 시스템을 각각의 독립적인 하위 시스템이라 상정하고 그 하위 시스템들에 대해 모두 제어기를 설계하는 것이다. 또한 각 시스템 사이의 상호 영향 속에서도 제어가 가능하기 때문에 복잡한 시스템이나 몇 개의 시스템이 묶여 있을 경우 편리하게 사용할 수 있다. 이러한 상호 결합 시스템에 대한 연구는 여러 연구가에 의해서 진행되어 왔다[1-4]. Tseng는 비선형 상호 결합 시스템에 대한 퍼지 모델링을 통한 제어를 시도하였다[1]. Yan는 정적 출력 제한 제어를 통한 일반적인 상호 결합 시스템의 제어를 시도하였다[2]. 이에 본 논문에서는 아직까지 연구되지 않았던 연속 시간과 이산 시간의 비선형 상호 결합 시스템에 대한 분산 정적 출력 제한 제어기의 설계에 대해 연구한다.

제어기를 설계하기 위해서 먼저 비선형 상호 결합 시스템을 Takagi-Sugeno(T-S)퍼지 모델을 통하여 모델링한다. 모델링된 시스템의 각각의 하위 시스템에 대해서 병렬 분산 보상(PDC)기법을 이용하여 정적 출력 제한 제어기를 설계한다. 각 하위 시스템들을 안정화시키는 제어기의 이득값을 선형 행렬 부등식(LMI)을 통하여 구한다. 하위 시스템들이 안정화되면 전체 상호 결합 시스템이 안정화됨을 보이고 이를 모의실험을 통하여 증명한다.

2. 본 론

2.1 상호 결합 시스템에 대한 정적 출력 제한 제어기 설계

연속시간과 이산시간에서의 비선형 상호 결합 시스템은 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다:

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_i(t)) + g_i(u_i(t)) + h_i(x(t)), \quad y_i(t) = C_i x_i(t) \quad (1)$$

$$x_i(t+1) = f_i(x_i(t)) + g_i(u_i(t)) + h_i(x(t)), \quad y_i(t) = C_i x_i(t) \quad (2)$$

여기서 $f_i(\cdot)$ 와 $g_i(\cdot)$ 는 각각 i 번째 하위 시스템의 상태변수와 입력으로 이루어진 비선형 함수이고, $h_i(\cdot)$ 는 상호 결합 시스템의 전체 상태변수로 이루어진 비선형 함수이다. 출력은 일반적으로 상태변수의 한 부분을 관찰하므로 C_i 는 선형이라고 가정하고 계산상의 편의를 위해 선형계수라고 가정한다. N 개의 하위 시스템으로 상호 결합 시스템이 이루어졌다고 가정했을 때 전체 시스템의 상태 변수 x 는 다음과 같이 나타낼 수 있다:

$$x = [x_1^T \ x_2^T \ \dots \ x_N^T]^T \quad (3)$$

주어진 연속시간과 이산시간에서의 비선형 상호 결합 시스템을 T-S퍼

2.2 이득값을 구하기 위한 선형 행렬 부등식 유도

정적 출력 제한 제어기를 이용하여 연속 시간과 이산 시간의 비선형 상호 결합 시스템을 안정화 시키는 제어기 이득값을 구하기 위해서는 선형 행렬 부등식(LMI)을 유도해야 한다. 선형 행렬 부등식을 유도하기 위해서 적절한 Lyapunov 함수를 정의해야 한다:

$$V(t, x) = \sum_{i=1}^N V_i(t, x_i) \quad (9)$$

$$V_i(t, x_i) = \begin{bmatrix} x_i(t) \\ x_i^c(t) \end{bmatrix}^T P_i \begin{bmatrix} x_i(t) \\ x_i^c(t) \end{bmatrix} \quad (1 \leq i \leq N) \quad (10)$$

여기서 P_i 는 양한정 행렬로 하위 시스템의 Lyapunov 함수의 합을 통해 전체 시스템의 Lyapunov 함수를 구하게 된다.

2.2.1 연속 시간 시스템에 대한 선형 행렬 부등식

식(9)와 (10)을 이용하여 연속 시간에서의 비선형 상호 결합 시스템의 안정성을 만족하는 선형 행렬 부등식을 구할 수 있다:

정리 1. Q_i 와 K_{im} 을 변수로 가지는 다음의 선형 행렬 부등식이 만족하면 정적 출력 제한 제어기가 있는 연속 시간 비선형 상호 결합 시스템은 점근적으로 안정하게 된다:

$$\begin{bmatrix} A_{ik}Q_i + Q_iA_{ik}^T + B_{ik}K_{im}C_i + C_i^TK_{im}^TB_{ik}^T & A_{ijk} \\ A_{ijk}^T & 0 \end{bmatrix} < 0, \quad (11)$$

그리고

$$C_iQ_i = M_iC_i \quad (12)$$

여기서 $K_{im} = F_{im}M_i$.

2.2.2 이산 시간 시스템에 대한 선형 행렬 부등식

정리 1과 같이 식(9)와 (10)을 이용하여 이산 시간에서의 비선형 상호 결합 시스템의 안정성을 만족하는 선형 행렬 부등식을 구할 수 있다:

정리 2. Q_i 와 K_{im} 을 변수로 가지는 다음의 선형 행렬 부등식이 만족하면 정적 출력 제한 제어기가 있는 이산 시간 비선형 상호 결합 시스템은 점근적으로 안정하게 된다:

$$\begin{bmatrix} -2Q_i & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ (G_{ik} + G_{im})Q_i + H_{ik}K_{im}C_i + H_{im}K_{ik}C_i & 0 & -Q_i & * \\ Q_i & G_{ijk} & 0 & -Q_i \end{bmatrix} < 0, \quad (13)$$

그리고,

$$C_i Q_i = M_i C_i \quad (14)$$

여기서 $K_{im} = F_{im}M_i$.

3. 모의실험

본 논문에서 제시된 두 가지의 방법을 증명하기 위해서 Lorenz 시스템을 이용한 예제를 제시한다[5]. 주어진 Lorenz 시스템은 다음과 같다:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma x + \sigma y \\ rx - y - xz \\ xy - bz \end{bmatrix} \quad (14)$$

여기서 $\sigma = 10$, $r = 28$, $b = \frac{8}{3}$, $[x(0) \ y(0) \ z(0)] = [10 \ -10 \ -10]$ 이다.

3.1 연속 시간 시스템에 대한 모의실험

연속 시간일 때 위의 Lorenz 시스템을 T-S 퍼지 모델링을 통한 후, 상호 결합 시스템의 형태로 나타내면 다음과 같다:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} -10 & 10 \\ 28 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} -10 & 10 \\ 28 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_{121} = \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \end{bmatrix}, \quad A_{122} = \begin{bmatrix} 0 \\ -30 \end{bmatrix},$$

$$B_{11} = B_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_1 = [1 \ 1].$$

그리고 이때의 소속함수는

$$\mu_{11}(x(t)) = \frac{-x + M_2}{M_2 - M_1}, \quad \mu_{12}(x(t)) = \frac{x - M_1}{M_2 - M_1} \quad \text{이다. 그리고 두 번째}$$

하위 시스템은 다음과 같다:

$$A_{21} = A_{22} = -\frac{8}{3}, \quad A_{211} = [0 \ -20], \quad A_{212} = [0 \ 30],$$

$$B_{21} = B_{22} = 1, \quad C_2 = 1, \quad M_1 = -20, \quad M_2 = 30.$$

이때 소속함수는 첫 번째 하위 시스템의 소속함수와 동일하다. 모델링한 시스템을 바탕으로 선형 행렬 부등식을 통하여 이득값을 구하면 $F_{11} = -43.1190$, $F_{12} = -29.5011$, $F_{21} = -0.2132$, $F_{22} = -0.0985$.

그림 1은 모의 실험의 결과를 나타내고 있다. 상태 변수들이 모두 0으로 수렴하고 있는 것을 볼 수 있다. 즉, 연속 시간 비선형 상호 결합 시스템이 안정화되었다는 것을 볼 수 있다.

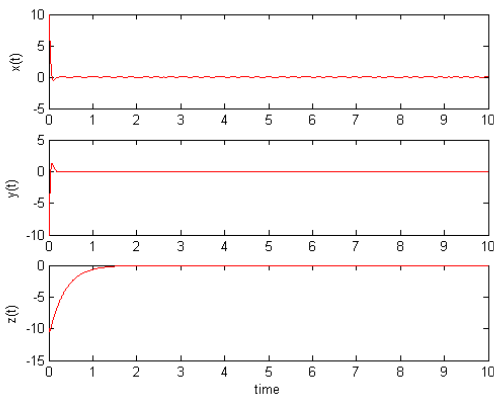


그림 1. 연속 시간 비선형 상호 결합 시스템의 상태변수

3.2 이산 시간 시스템에 대한 모의실험

샘플링 시간이 0.002인 이산 시간일 때의 모델링된 첫 번째 상호 결합 시스템은 다음과 같다:

$$G_{11} = G_{12} = \begin{bmatrix} 0.98 & 0.02 \\ 0.056 & 0.998 \end{bmatrix}, \quad G_{121} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.04 \end{bmatrix}, \quad G_{122} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.06 \end{bmatrix},$$

$$B_{11} = B_{12} = \begin{bmatrix} 0.002 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_1 = [1 \ 1].$$

그리고 이때의 소속함수는

$$\mu_{11}(x(t)) = \frac{-x + M_2}{M_2 - M_1}, \quad \mu_{12}(x(t)) = \frac{x - M_1}{M_2 - M_1} \quad \text{이다. 그리고 두 번째}$$

하위 시스템은 다음과 같다:

$$A_{21} = A_{22} = 0.9947, \quad A_{211} = [0 \ -0.04], \quad A_{212} = [0 \ 0.06],$$

$$B_{21} = B_{22} = 0.002, \quad C_2 = 1, \quad M_1 = -20, \quad M_2 = 30.$$

이때 소속함수는 첫 번째 하위 시스템의 소속함수와 동일하다. 모델링한 시스템을 바탕으로 선형 행렬 부등식을 통하여 이득값을 구하면

$$F_{11} = -265.527, \quad F_{12} = -230.7262, \quad F_{21} = F_{22} = -369.3364.$$

그림 2는 모의 실험의 결과를 나타낸 것이다. 상태 변수들이 모두 0으로 수렴하고 있는 것을 통해 이산 시간 비선형 상호 결합 시스템이 안정화되었다는 것을 알 수 있다.

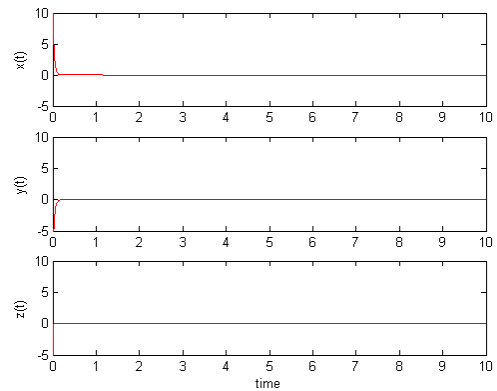


그림 2. 이산 시간 비선형 상호 결합 시스템의 상태변수

4. 결 론

본 논문에서는 연속 시간과 이산 시간의 비선형 상호 결합 시스템의 정적 출력 제한 제어기를 소개하였다. 연속 시간과 이산 시간에서 모두 제어가 가능하다는 것을 제시하였고, 이에 대한 제어기의 설계 문제를 제약 조건이 있는 선형 행렬 부등식을 통하여 해결하였다. 또한 선형 행렬 부등식의 해가 존재할 경우, 비선형 상호 결합 시스템을 안정화시키는 제어기의 이득값을 구할 수 있다는 점을 증명하였다. 결국 연속 시간, 이산 시간 모두 정적 출력 제한 제어기를 통하여 비선형 상호 결합 시스템을 제어할 수 있다는 점을 보였고, 이를 모의 실험을 통하여 증명하였다. 앞으로 더욱 일반적인 조건에서의 상호 결합 시스템에 대한 제어기 설계를 연구하는 것이 의미가 있다고 생각된다.

감사의 글 : 이 논문은 2007년도 두뇌한국21사업에 의하여 지원되었음

[참 고 문 헌]

- [1] C. S. Tseng, "H_∞ Decentralized Fuzzy Model Reference Tracking Control Design for Nonlinear Interconnected Systems", IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol. 9, No. 6, pp. 795-809, 2001.
- [2] X. G. Yan, "Decentralized Robust Sliding Mode for a Class of Nonlinear Interconnected Systems by Static Output Feedback", Automatica, Vol. 40, pp. 613-620, 2004.
- [3] X. G. Yan, "Decentralized Output Feedback Robust Stabilization for a Class of Nonlinear Interconnected Systems with Similarity", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 43, No. 2, pp. 294-299, 1998.
- [4] C. W. Chen, "Stability Analysis of T-S Fuzzy Models for Nonlinear Multiple Time-delay Interconnected Systems", Mathematics and Computers in Simulation, Vol. 66, pp. 523-537, 2004.
- [5] H. J. Lee, J. B. Park, Y. H. Joo, "Robust Fuzzy Control of Nonlinear Systems with Parametric Uncertainties," IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol. 9, No. 2, pp. 369-379, 2001.