2007년도 대한전기학회 하계학술대회 논문집 2007. 7. 18 - 20

통계적 파라미터 불확실성을 고려한 사교사영 기반 선형 강인 칼만필터 설계

나원상, 황익호
국방과학연구소, 유도조종기법팀

Stochastic Robust Kalman Filter using Recursive Oblique Projections

Ra Won-Sang and Whang Ick-Ho
Guidance and Control Department, Agency for Defense Development

Abstract - 본 논문에서는 통계적 파라미터 불확실성을 포함한 시변 선형 불확정 시스템에 대한 강인 칼만필터링 문제를 고려한다. 최소자승 관점에서 정의된 공칭 칼만필터링 문제의 목적함수를 파라미터 불확실성의 통계적 특성을 이용하여 가용한 측정행렬의 함수로 표현하고, 이로부터 근사화된 선형공간 위로의 사교사영으로 해를 도출할 수 있음을 보인다. 최종적으로 벡터 최소자승 추정기법을 동일하게 적용하여, 순환 강인 칼만필터식을 유도하고, 유도된 강인 칼만필터 식이 최근 제안된 강인 최소자승 추정식에 공정잡음 및 측정잡음 분산을 반영한 보완된 형태임을 확인한다.

1. 서 론

확률-통계적 관점이나 최소자승 추정 관점 등의 다양한 상태추정기 설계 관점에서 볼 때, 칼만필터는 선형 동적 시스템의 상태추정 문제에 대한 최적해를 제공한다[1-2]. 칼만필터가 최적 상태추정치를 제공하기 위해서는 주어진 시스템 모델에 파라미터 불확실성이 존재하지 않고, 외부 잡음의 통계적 특성이 정확히 알려져 있다는 기본 가정을 필요로 한다. 하지만, 실제 시스템에 대한 제어 및 신호처리 관련 문제에 있어서 이러한 가정이 만족되는 상황은 극히 드물다. 필터 설계를 위해 주어진 시스템 모델이 파라미터 불확실성을 포함하고 있는 경우, 추정오차가 증가하거나 심지어는 필터가 발산할 수도 있다[3-6].

파라미터 불확실성에 의한 문제를 해결하기 위해, 지난 십여 년간 다양한 형태의 강인 칼만필터링 기법들이 개발되어왔다. 이들은 대부분 시스템 모델 내에 포함된 파라미터 불확실성이 존재하는 범위의 상한을 생각하고, 이를 필터링을 위한 목적함수를 재설정하는 데 사용하였다. 즉, 불확실성에 의한 영향을 고려하여 목적함수의 상한을 설정하고, 이의 최소화 문제를 고려하는 방법을 고안하였다[3,4]. 하지만, 이러한 방법은 넓은 영역의 파라미터 불확실성을 고려함으로써 강인성 확보에 치중한 나머지 지나치게 보수적인 추정성능을 제공한다는 한계를 지니고 있다. 최근에는 이러한 문제를 해결하기 위해 파라미터 불확실성의 통계적 특성을 활용한 강인 최소자승 추정기법[6]이 제안된 바 있다. 파라미터 불확실성이 존재하는 경우, 공칭 최소자승 추정치에 환산계수오차(scale- factor error)가 포함된다는 사실을 밝혀내고, 이를 통계적으로 근사하여 보상함으로써 강인 상태추정치를 획득하는 방법이 도입되었다. 강인 최소자승 추정기법은 정상상태에서 우수한 추정성능을 제공함에도 불구하고, 공정잡음과 측정잡음 분산을 필터링 식에 반영하지 못함으로써 과도상태에서의 필터의 수렴특성을 설계자가 조정할 수 없다는 한계를 지니고 있었다.

본 논문에서는 기존 강인 최소자승 필터의 한계를 극복하기 위하여 기하학적 관점에서 강인 칼만필터 문제를 고려한다. 일반적인 공칭 칼만필터식이 측정행렬의 열공간 위로의 정사영을 이용해 해를 도출하는 것임에 착안하여, 동일한 기하학적 개념을 강인 칼만필터식을 유도하는데 적용하도록 한다. 다만, 측정행렬에 포함된 통계적 파라미터 불확실성이 왜곡된 열공간을 형성하게 하므로, 이에 의한 추정오차를 보상하는 방안을 고려하여야 한다. 추정오차의 보상 개념은 기본적으로 기존의 강인 최소자승 필터와 유사하나, 접근 방법에 있어서는 다소간의 차이가 있다. 우선, 공칭 칼만필터의 목적함수를 오차를 포함하고 있는 측정행렬과 통계적 파라미터 불확실성으로 재구성하고, 이를 통계적으로 근사하여 새로운 목적함수를 정의한다. 유도된 강인 칼만필터 목적함수의 형태로부터 오차가 포함되지 않은 측정행렬의 열공간을 근사적으로 재구성 하는 방법을 생각한다. 즉, 오차가 포함된 측정행렬 열공간 위로의 정사영 대신, 추정된 측정행렬 열공간 위로의 사교사영으로 강인 칼만필터링 문제의 해를 정의한다. 최종적으로, 반복 사교사영을 통해 유도된 순환 강인 칼만필터가 기존의 강인 최소자승 추정기와 동일한 오차보상 개념을 포함하고 있으며, 공정잡음 및 측정잡음 분산을 필터식에 반영함으로써 필터 설계변수 조정을 통해 효과적으로 과도상태 응답특성을 결정할 수 있는 형태로 확장되었음을 확인하도록 한다.

2. 정사영을 이용한 순환 공칭 칼만필터

2.1 벡터 최소자승 추정문제

일반적인 정규 최소자승 벡터추정 문제는 다음과 같은 목적함수의 최적화문제로 귀결된다.

$$\min_x \left[x^T Qx+(Ax-b)^T W(Ax-b)\right] \tag{1}$$

여기서, x^TQx는 정규화를 위해 추가된 항이며, 계수행렬 Q는 양한정 대칭행렬로, 계수행렬 W는 반양한정 대칭행렬로 가정한다. x는 추정하고자 하는 벡터이고, 측정행렬 A와 측정치벡터 b는 상태추정을 위해 주어진 값이다.

식 (1)의 최소화문제의 해, 즉 정사영에 의해 계산되는 최소자승 상태추정치는 다음과 같이 정의된다.

$$\hat{x}=(Q+A^TWA)^{-1}A^TWb \tag{2}$$

2.2 최소자승 관점에서 유도된 순환 공칭 칼만필터

순환식 형태의 공칭 칼만필터는 이노베이션 시퀀스의 직교성과 유일성을 이용하여 손쉽게 유도할 수 있다. 이는 기하학적인 개념에 근간한 최소자승 관점에서 볼 때, 측정행렬에 의해 특정되어지는 열공간 위로의 정사영을 반복적으로 계산하는 것과 동일한 개념이다. 위의 벡터 최소자승 개념은 선형 확률 동적 시스템에도 동일하게 적용되어 공칭칼만필터를 유도하는데 유용하게 사용할 수 있다. 우선, 다음과 같은 선형 확률 동적 시스템을 고려하자.

$$\begin{cases} x_{k+1} = F_k x_k + G_k u_k \\ y_k \; = H_k x_k + v_k \end{cases} \tag{3}$$

여기서 외부에서 유입되는 잡음 u_k와 v_k는 상호상관성이 없는 영평균 백색잡음으로 분산이 각각 Q_k, R_k라고 가정한다.

최소자승 관점에서 칼만필터를 유도하기 위해, 특정 시점에서 사후추정치 $\hat{x}_{k|k}$와 사후 추정치의 오차 공분산 행렬 $P_{k|k}$이 주어져 있다고 가정하자. 이제, 새로운 측정치 y_{k+1}이 필터링을 위해 주어진 상황에서 상태추정치 x_k를 추정하는 문제를 고려하자. 이를 정규 최소자승 추정문제로 기술하면 다음과 같다.

$$\min_{x_k, u_k}\left[\, \|x_k-\hat{x}_{k|k}\|^2_{P_{k|k}^{-1}}+\|u_k\|^2_{Q_k^{-1}}+\|y_{k+1}-H_{k+1}x_{k+1}\|^2_{R_{k+1}^{-1}}\right] \tag{4}$$

식 (4)의 최소화 문제는 주어진 사후추정치 $\hat{x}_{k|k}$가 포함하고 있는 추정오차를 새로운 측정치 y_{k+1}을 이용해 줄이기 위한 과정으로 해석할 수 있다. 오차 개선은 정규화된 잔류치(residual)의 놈의 제곱을 최소화 함으로써 이루어진다. 식 (1)의 벡터 추정문제와 최소자승 추정치 (2)의 형태를 이용하여 식 (4)의 선형 확률 동적 시스템에 대한 상태추정 문제의 해를 얻을 수 있다. 식 (1)과 (4)를 비교하면 다음과 같은 대응관계가 존재함을 알 수 있다.

$$x \mapsto \begin{bmatrix} x_k-\hat{x}_{k|k} \\ u_k \end{bmatrix},\; b \mapsto y_{k+1}-H_{k+1}F_k\hat{x}_{k|k},\; Q \mapsto \begin{bmatrix} P_{k|k}^{-1} & 0 \\ 0 & Q_k^{-1} \end{bmatrix}, \tag{5}$$
$$A \mapsto H_{k+1}\left[F_k,\;\; G_k\right],\; W \mapsto R_{k+1}^{-1}$$

따라서, 최소자승 추정치 (2)로부터 다음 결과를 얻는다.

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{k|k+1}-\hat{x}_{k|k} \\ \hat{u}_{k|k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{k|k}F_k^TH_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} \\ Q_kG_k^TH_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} \end{bmatrix}(y_{k+1}-H_{k+1}\hat{x}_{k+1|k+1}) \tag{6}$$

$k+1$ 시점에서의 사후추정치는 $\hat{x}_{k+1|k+1} \equiv F_k\hat{x}_{k|k+1}+G_k\hat{u}_{k|k+1}$로 정의하였다. 식 (6)을 다시 쓰면,

$$\hat{x}_{k+1|k+1} = F_k\hat{x}_{k|k}+(F_kP_{k|k}F_k^T+G_kQ_kG_k^T)\times \tag{7}$$
$$H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1}(y_{k+1}-H_{k+1}\hat{x}_{k+1|k+1})$$

식 (7)에서 사후추정치 $\hat{x}_{k|k}$와 오차공분산 행렬 $P_{k|k}$가 각각 다음과 같은 시간 전파식(time update equation)을 만족한다고 하면,

$$\hat{x}_{k+1|k} = F_k \hat{x}_{k|k}, \quad P_{k+1|k} = F_k P_{k|k} F_k^T + G_k Q_k G_k^T \tag{8}$$

식 (7)의 필터식은 식 (9)로 다시 쓸 수 있다.

$$\hat{x}_{k+1|k+1} = (I + P_{k+1|k} H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} H_{k+1})^{-1} \times (\hat{x}_{k+1|k} + P_{k+1|k} H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} y_{k+1}) \tag{9}$$

행렬반전정리(matrix inversion lemma)를 적용하여 위의 식을 정리하면,

$$\hat{x}_{k+1|k+1} = \hat{x}_{k+1|k} + (P_{k+1|k}^{-1} + H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} H_{k+1})^{-1} \times H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} (y_{k+1} - H_{k+1} \hat{x}_{k+1|k}) \tag{10}$$

정사영을 이용해 정의되는 최소자승 추정치로부터 유도된 식 (10)으로부터 공칭 칼만필터의 측정치 갱신식(measurement update equation)을 얻을 수 있다.

$$\hat{x}_{k+1|k+1} = \hat{x}_{k+1|k} + P_{k+1|k+1} H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} (y_{k+1} - H_{k+1} \hat{x}_{k+1|k}) \tag{11}$$

$$P_{k+1|k+1} = P_{k+1|k} + H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} H_{k+1} \tag{12}$$

3. 사교사영을 이용한 순환 강인 칼만필터

3.1 강인 칼만필터링 문제 및 기하학적 의미

상태추정을 위해 주어진 선형 확률 동적 시스템 (3)을 다음과 같이 다시 쓸수 있다.

$$\begin{cases} x_{k+1} = F_k x_k + G_k u_k \\ \;\; y_k \;\; = H_k x_k + v_k = [\tilde{H}_k - \Delta H_k] x_k + v_k \end{cases} \tag{13}$$

여기서 H_k는 파라미터 불확실성을 포함하고 있지 않은 미지의 측정행렬, $\tilde{H}_k$는 센서 등에 의해 측정된 측정행렬, ΔH_k는 $\tilde{H}_k$가 포함하고 있는 측정잡음, 즉 통계적 파라미터 불확실성으로 구성된 행렬을 의미한다. ΔH_k는 영평균이며 다음 조건을 만족하는 것으로 가정한다.

$$E\{\Delta H_k R_k^{-1} \Delta H_k^T\} = V_k, \quad E\{\Delta H_k v_k^T\} = 0, \quad E\{\Delta H_k u_k^T\} = 0 \tag{14}$$

통계적 파라미터 불확실성을 포함하고 있는 측정행렬 $\tilde{H}_k$만이 주어져 있는 경우, 최소자승 관점에서 불확실성에 의한 영향을 최소화하는 상태추정치 $\hat{x}_{k|k}$를 찾는 문제를 강인 칼만필터 문제로 정의한다. 정의에 의해 $\tilde{H}_k = H_k + \Delta H_k$이 만족되므로, 공칭 칼만필터링 문제의 목적함수 (3)을 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$J = \left[\left\| \begin{bmatrix} x_k - \hat{x}_{k|k} \\ u_k \end{bmatrix} \right\|^2_{P_{k|k}^{-1} \oplus Q_k^{-1}} + \| y_{k+1} - (\tilde{H}_{k+1} - \Delta H_{k+1}) x_{k+1} \|^2_{R_{k+1}^{-1}} \right] \tag{15}$$

목적함수 (15)는 통계적 파라미터 불확실성 ΔH_k를 포함하고 있으므로, 이를 최소화시키는 최소자승 추정치를 찾는 것은 현실적으로 불가능하다. 따라서 공칭 칼만필터링 문제의 목적함수 J에서 ΔH_k를 포함하는 항을 식 (14)의 통계적 특성을 이용하여 근사한 것을 강인칼만필터링 문제의 목적함수로 고려한다.

$$J_a = \left[\left\| \begin{bmatrix} x_k - \hat{x}_{k|k} \\ u_k \end{bmatrix} \right\|^2_{P_{k|k}^{-1} \oplus Q_k^{-1}} + \left\| \begin{bmatrix} y_{k+1} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{H}_{k+1} \\ I \end{bmatrix} x_{k+1} \right\|^2_{R_{k+1}^{-1} \oplus -V_{k+1}} \right] \tag{16}$$

공칭 칼만필터링 문제의 해가 전술한바와 같이 파라미터 불확실성을 포함하고 있지 않은 행렬 H_k의 열공간 위로의 정사영에 의해 산출되는 반면, 근사화된 목적함수 (16)의 최소화 문제에 대한 해는 행렬 H_k의 열공간을 가용한 측정행렬 $\tilde{H}_k$와 ΔH_k의 통계적 특성을 이용하여 근사한 선형공간 위로의 정사영에 의해 얻어지게 된다. 이는 통계적 파라미터 불확실성 ΔH_k에 의해 유발되는 추정오차를 보상하기 위한 것이다. 기하학적 관점에서 볼 때, 강인 칼만필터식은 식 (16)의 최소화 해를 산출하기 위해 측정행렬 $\tilde{H}_k$의 열공간 위로의 정사영 대신 추정된 선형공간으로의 사교사영을 반복적으로 산출하는 과정으로 해석될 수 있다.

3.2 사교사영 개념을 이용하여 유도된 순환 강인 칼만필터

목적함수 (16)을 최소화하는 해는 2.1절의 벡터 최소자승 추정기법에 의해 손쉽게 계산된다. 식 (1)과 식 (16)을 비교하면, 다음과 같은 대응관계를 얻을 수 있다.

$$x \mapsto \begin{bmatrix} x_k - \hat{x}_{k|k} \\ u_k \end{bmatrix}, \; b \mapsto \begin{bmatrix} y_{k+1} - H_{k+1} F_k \hat{x}_{k|k} \\ -F_k \hat{x}_{k|k} \end{bmatrix}, \; Q \mapsto \begin{bmatrix} P_{k|k}^{-1} & 0 \\ 0 & Q_k^{-1} \end{bmatrix}, \tag{17}$$
$$A \mapsto \begin{bmatrix} H_{k+1} \\ I \end{bmatrix} [F_k, \; G_k], \; W \mapsto \begin{bmatrix} R_{k+1}^{-1} & 0 \\ 0 & -V_{k+1} \end{bmatrix}$$

식 (2)로부터,

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{k|k+1} - \hat{x}_{k|k} \\ \hat{u}_{k|k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{k|k} F_k^T H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} & -P_{k|k} F_k^T V_{k+1} \\ Q_k G_k^T H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} & -Q_k G_k^T V_{k+1} \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} y_{k+1} - H_{k+1} \hat{x}_{k+1|k+1} \\ -\hat{x}_{k+1|k+1} \end{bmatrix} \right) \tag{18}$$

위의 식에서 $k+1$시점에서의 사후 추정치는 다음과 같이 정의하였다.

$$\hat{x}_{k+1|k+1} = F_k \hat{x}_{k|k+1} + G_k \hat{u}_{k|k+1} \tag{19}$$

식 (18)를 식 (18)에 대입하여 정리하면,

$$\hat{x}_{k+1|k+1} = \hat{x}_{k+1|k} + P_{k+1|k} \left(\tilde{H}_{k+1} R_{k+1}^{-1} (y_{k+1} - \tilde{H}_{k+1} \hat{x}_{k+1|k+1}) + V_{k+1} \hat{x}_{k+1|k+1} \right) \tag{20}$$

여기서 공칭 칼만필터식의 경우와 마찬가지로 다음과 같이 시간 전파식을 정의하였다.

$$\hat{x}_{k+1|k} = F_k \hat{x}_{k|k}, \quad P_{k+1|k} = F_k P_{k|k} F_k^T + G_k Q_k G_k^T \tag{21}$$

식 (20)을 $\hat{x}_{k+1|k+1}$에 대해서 재정리한 후

$$\hat{x}_{k+1|k+1} = (I + P_{k+1|k} \tilde{H}_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} \tilde{H}_{k+1} - P_{k+1|k} V_{k+1})^{-1} \times (\hat{x}_{k+1|k} + P_{k+1|k} H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} y_{k+1}) \tag{22}$$

결과식 (22)에 행렬반전정리를 적용하면, 다음과 같이 강인 칼만필터의 측정치 갱신식을 얻을 수 있다.

$$\hat{x}_{k+1|k+1} = (I + P_{k+1|k+1} V_{k+1}) \hat{x}_{k+1|k} + P_{k+1|k+1} \tilde{H}_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} \times (y_{k+1} - \tilde{H}_{k+1} \hat{x}_{k+1|k}) \tag{23}$$

식 (22)로부터 식 (23)을 유도하는 과정에서 사용된 사후추정오차 공분산 갱신식의 정의는 다음과 같다.

$$P_{k+1|k+1}^{-1} = P_{k+1|k}^{-1} + \tilde{H}_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} \tilde{H}_{k+1} - V_{k+1} \tag{24}$$

통계적 파라미터 불확실성에 대한 강인 칼만필터 식 (21), (23), (24)는 공칭 칼만필터식 (8), (11), (12)와 비교했을 때, 시간전파식은 동일한 반면, 측정치 갱신식에는 약간의 수정이 가해졌음을 알 수 있다. 즉, 사후추정치를 산출하기 위한 식 (23)에서는 환산계수오차의 보상항 ($P_{k+1} V_{k+1}$)이 추가되었으며, 사후추정오차 공분산 갱신식 (24)에서는 통계적 파라미터 불확실성 ΔH_{k+1}에 의해 유발되는 오차의 영향 (V_{k+1})만큼 추정오차공분산이 커지는 효과가 반영되었다. 이는 최근 발표된 바 있는 강인 최소자승 추정기 [5]과 동일한 결과이다. 제안된 강인 칼만필터식은 공정잡음 분산과 측정잡음 분산을 필터식에 반영할 수 있다는 측면에서 강인 최소자승 추정기 [5]의 확장된 형태라고 할 수 있다. 즉, 본질적으로 강인 최소자승 추정식과 제안된 강인 칼만필터식은 동일한 결과를 제공하며, 추정오차의 가중 영평균 특성 등도 동일함을 유추할 수 있다.

3. 결 론

측정행렬에 통계적 파라미터 불확실성이 포함된 시변 선형 시스템에 대한 강인 칼만필터링 문제의 해를 제시하였다. 기존의 공칭 칼만필터가 최소자승 해를 산출하기 위해 정사영을 반복적으로 수행한다는 점에 착안하여, 통계적 파라미터 불확실성이 유발하는 추정오차를 반복적인 사교사영을 산출함으로써 보상하도록 하였다. 이를 위해, 공칭 칼만필터의 목적함수를 통계적 파라미터 불확실성의 특성을 고려하여 근사하고, 이를 강인 칼만필터의 새로운 목적함수로 설정하였다. 새로운 목적함수로부터 사교사영을 위한 근사화된 선형공간을 정의할 수 있음을 확인하였다. 최종적으로, 벡터 최소자승 추정개념을 적용하여 순환 강인 칼만필터식을 획득하는 과정과 그 결과를 제시하였다.

[참 고 문 헌]

[1] Lewis, F.L., Optimal Estimation, John Wiely & Sons, 1986.

[2] Genin, Y., "Gaussian estimates and mordern linear discrete filter- ing methods", Revue A, Vol. 13, pp. 70-78, 1968.

[3] Sayed, A.H., "A framework for state-space estimation with uncertain models", IEEE Trans., Automatic Control, Vol. 46, No. 7, pp. 998-1013, 2001.

[4] Ra, W.S., Jin, S.H., and Park, J.B., "Set-valued estimation approach to recursive robust H_∞ filtering", IEE Proc. Control Theory and Applications, Vol 151, No. 6, pp. 773-782, 2004.

[5] Ra, W.S., Whang, I.H., Ahn, J.Y. and Park, J.B., "Recursive robust least squares estimator for time-varying linear systems with a noise corrupted measurement matrix", IET Proc. Control Theory and Applications, Vol 1, No. 1, pp. 104-112, 2007.

[6] Ra, W.S., Whang, I.H., and Ahn, J.Y., "Robust horizontal line-of-sight rate estimator for sea skimming anti-ship missile with two-axis gimballed seeker", IEE Proc. Radar, Sonar and Navigation, Vol 152, No. 1, pp. 9-15, 2005.