



## 반경비 및 각속도의 변화에 따른 Taylor 유동에 관한 연구

배강열,<sup>\*1</sup> 김형범, 정희택<sup>2</sup>

### A STUDY ON TAYLOR FLOW ACCORDING TO RADIUS RATION AND ANGULAR VELOCITY

K.Y. Bae,<sup>\*1</sup> H. B. Kim and H. T. Chung<sup>2</sup>

*This paper represents the numerical study on Taylor flow according to the radius ratio and the angular velocity for flow between tow cylinder. The numerical model is consisted of two cylinder which inner cylinder is rotating and outer cylinder is fix, and the axial direction is used the cyclic condition because of the length for axial direction is assumed infinite. The diameter of inner cylinder is assumed 86.8 mm, the numerical parameters are angular velocity and radius ratio. The numerical method is compared with the experimental results by Wereley, and the results are very good agreement. The critical Taylor number is calculated by theoretical and numerical analysis, and the results is showed the difference about  $\pm 10\%$ . As  $Re/Re_c$  is increased, Taylor vortex is changed to wavy vortex, and then the wave number for azimuthal direction is increased. Azimuthal wave according to the radius ratio is showed high amplitude and low frequency in case of small radius ratio, and is showed low amplitude and high frequency in case of large radius ratio.*

**Key Words :** 임계테일러수(Critical Taylor Number), 내부회전실린더(Rotating inner cylinder), 각속도(Angular velocity), 반경비(Radius ratio), 레이놀즈수(Reynolds number), 테일러와류(Taylor vortex), 파동와류(Wavy vortex)

## 1. 서 론

내부 실린더는 회전하고 외부 실린더는 고정되어 있는 동심환형관내의 유동은 산업현장에서 흔히 볼 수 있는 유동으로서 베어링, 열교환기, 드릴링 머신, 전자기기의 냉각시스템 등에서 쉽게 발견되며 유체역학적 측면에서 매우 중요한 요소이다. 이러한 유동은 1923년 G. I. Taylor에 의해 무차원수인 Taylor 수가 일정한 값을 넘게 되면 유동의 불안전성으로 인해 유동방향으로 축을 갖는 와류가 발생한다는 사실을 실험과 이론을 통하여 보고한 후 많은 연구자들에 의해 실험 및 수치해석적으로 다양한 연구가 진행되어 오고 있다[1-8]. 많은 연구자들의 실험과 수치해석을 통한 선행연구에서는 내부 실린더의 각속도변화에 대하여 실린더내의 축방향 단면에서 유동의 변화에 대한 연구와 축방향으로 일정한 유동을 가지고 내부 실린더가 회전하는 경우 및 내부와 외부 실린더의 온도차에 대한 축 방향 단면에서 유동현상을 규명하고자 하

였다. 또한, 수치해석적으로 동심환형관내의 유동 불안정성을 규명하고자 많은 연구자들에 의하여 해석되어 실험결과와 매우 일치한 결과들을 도출하여 수치해석적 연구의 타당성을 입증하였으며 다양한 분야에 대한 연구를 진행 중이다.

그러나, 서두에 언급한 이러한 연구들은 Taylor Vortex가 생성될 수 있는 조건, 예를 들어 내부 실린더와 외부 실린더는 일정한 반경비( $\eta=0.83$ )의 경우에 대한 연구가 대부분이다. 이에 본 연구에서는 이러한 유동에 대하여 실험과 수치해석의 타당성을 검증하고 이전의 수치해석적 연구에서 언급되지 않았던 내부 실린더를 가진 동심환형관에서 각속도 및 반경비의 변화에 대해서 수치해석적 연구를 진행함으로써 다양한 변수에 대한 Taylor Vortex의 변화에 대하여 규명하여 유동불안정성을 발생시키는 않는 유동장의 설계기초를 마련하고자 한다.

## 2. 수치해석

### 2.1 해석모델 및 경계조건

본 수치해석에서 사용된 모델은 Fig. 1과 같이 두 개의 실

1 정회원, 경상대학교 항공기부품기술연구소

2 정회원, 경상대학교 기계항공공학부

\* Corresponding author, E-mail: kybae@gnu.ac.kr

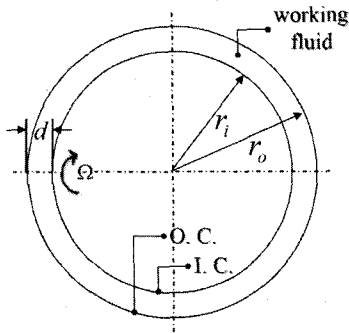


Fig. 1 Schematic diagram for numerical analysis

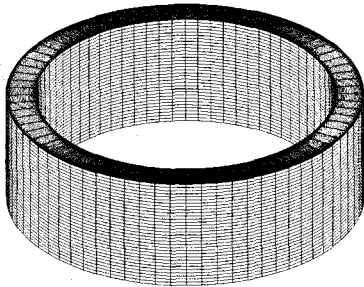


Fig. 2 Grid system for numerical model

린더로 구성되었으며, 내부 실린더(I.C.)는 시계방향으로 일정한 각속도( $\Omega$ )로 회전하고 있고 외부 실린더(O.C.)는 고정되어 있다. 축 방향은 무한한 길이를 가정하기 위해서 주기조건(cyclic condition)을 부과하였으며, 실린더 표면에는 점착조건(no slip condition)을 사용하였다.

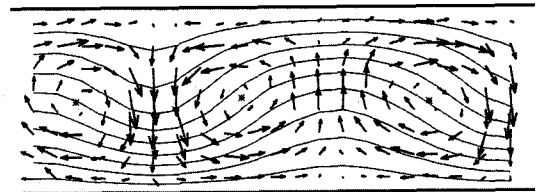
Table 1은 실험과 수치해석을 비교하기 위한 형상 및 무차원 변수에 대하여 나타낸 것이다.

본 연구에서 수치해석의 타당성을 검증하기 위해서 S. T. Wereley & R. M. Lueptow[1]의 실험결과를 선택하였다. 이러한 이유는 타 실험결과와 비교하여 Taylor couette flow에 대하여 정량적인 값이 명확하게 나타나 있기 때문이다. 실험과 수치해석에서 다른 조건들은 동일하나 실린더사이의 간격에 대한 길이의 비인  $\Gamma$ 의 값은 실험에서는 47.7을 사용하였으나 수치해석에서는 3.92의 값을 사용하였다.

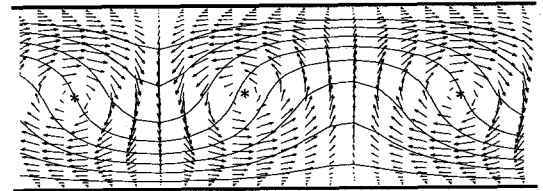
수치해석에서  $\Gamma$ 의 값을 3.92를 사용한 이유는 J.A. Cole[3]의 연구결과에서  $d/r_i$ 가 작은 경우에는  $\Gamma$ 의 값이 60이상에

Table 1 Geometry & Reynolds number for experimental and numerical analysis

	$r_o$ (mm)	$r_i$ (mm)	$d$ (mm)	$\eta(\frac{r_i}{r_o})$	$\Gamma(\frac{z}{d})$	$Re$
exp.	52.3	43.4	8.9	0.83	47.7	$r_i \Omega d$
num.					3.92	$\nu$



(a) experimental result



(b) numerical result

그림 5

Fig. 3 Comparison between the experimental and the numerical result for radial-axial velocity vectors and contours at  $Re=124$

서 Taylor vortex와 Wavy vortex를 결정하는 임계값이 일정하며, 60이하에서는 Wavy vortex를 결정하는 임계값이 증가하는 결과를 보여주었다. 그러나  $d/r_i$ 가 0.119로 증가한 경우에는  $\Gamma$ 가 40이상의 영역에서는 일정한 임계값을 분포를 보이고 있어 실제 Wereley의 실험형상에 대한  $d/r_i$ 는 0.17로서 Cole의 실험값보다 크기 때문에  $\Gamma$ 가 47.7에서는 축 방향에 대한 벽면의 효과가 임계값들에 영향을 주지 않기 때문에 수치해석에서는 무한한 길이를 가정하여 2쌍의 Vortex가 생성될 수 있는  $\Gamma$ 의 값을 사용한 것이다.

Table 2는 수치해석에 사용된 변수를 나타낸 것이며, 내부 실린더의 반경은 동일한 값인 43.4 mm를 사용하였다.

### 2.2 지배방정식 및 격자계

수치해석은 상용 프로그램인 Star-cd를 이용하였으며, 시간에 따른 유동현상을 고려하기 위하여 3차원 비정상상태로 가정하였다. 선행연구결과  $Re$ 는 반경비에 따라 차이는 있지만 대략  $Re_c$ 의 18배 이상부터 난류영역으로 천이하기 때문에 본 연구의 범위에 대해서는 층류유동을 가정하였으며, 지배방정식은 아래와 같다.

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \tag{1}$$

Table 2 Main parameters for numerical analysis

$Re/Re_c$	1, 1.114, 1.4					
$r_i$ (mm)	43.4					
$\eta$	0.75	0.8	0.83	0.85	0.90	0.95
$d$ (mm)	14.47	10.85	8.9	7.66	4.82	2.28
$\Gamma$	3.8d					

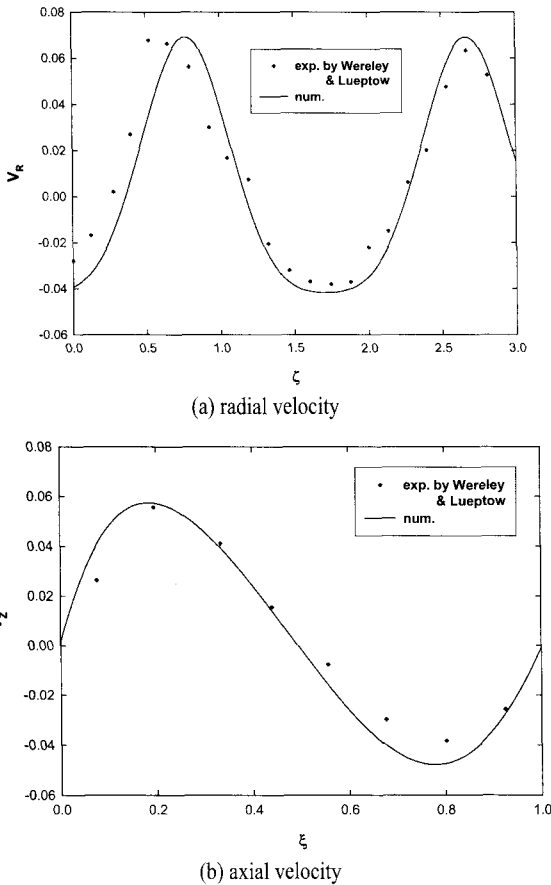


Fig. 4 Comparison between the numerical and the experimental results at Re=124

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\nabla \cdot \vec{V}) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \vec{V} + \frac{1}{3} \nu \nabla (\nabla \cdot \vec{V}) \quad (2)$$

시간항은 완전음해법(Fully Implicit Method)을, 압력보간방법으로는 PISO 알고리즘을 사용하였다.

Fig. 2는 수치해석에 사용된 격자를 보여주고 있다. 격자는  $r \times \theta \times z = 32 \times 72 \times 32$ 로 73,728개가 사용되었으며, 실린더 벽면에서의 유동장을 고려하기 위하여 격자를 벽면에 조밀하게 분포시켰다.

### 3. 결과 및 고찰

Fig. 3은 수치해석을 검증하기 위하여 S. T Wereley & R. M. Lueptow[1]의 실험결과와 반경과 축 방향에 대한 속도벡터를 비교한 결과를 나타내고 있다. 여기에서 실선으로 표시된

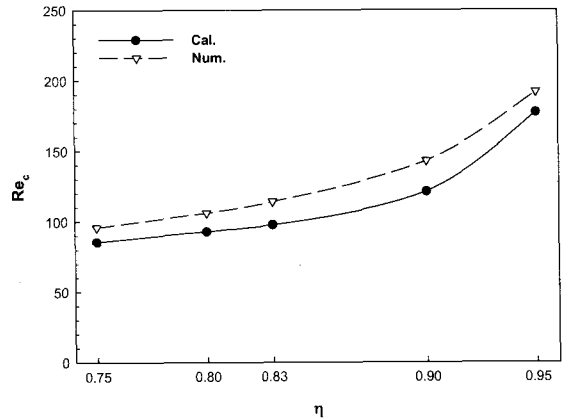


Fig. 5  $Re_c$  comparison between the experimental and the numerical result

contour는 회전방향 속도의 크기를 나타내고 위 경계는 내부 실린더를 아래 경계는 외부 실린더를 나타내고 있다. 실험 및 수치해석의 결과는 비교적 잘 일치하고 있으며, 양쪽의 결과에서 vortex의 크기가 중앙부분보다 양쪽에 위치하고 있는 vortex가 큰 것을 확인할 수 있는 데 이것은  $Re=124$ 인 경우 wavy vortex가 생기는 영역이기 때문에 vortex가 비대칭의 형태를 보여주는 것이다.

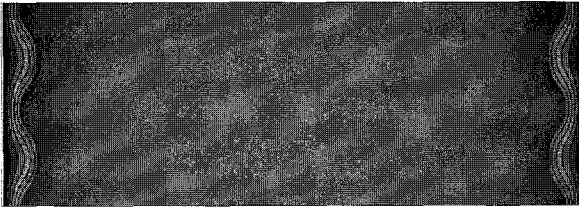
Fig. 4는  $Re$  수가 124인 경우에 대하여 단면에 대한 반경 및 축방향의 속도분포를 Wereley의 실험결과와 비교한 그림이다. 여기에서 사용된  $V_R, V_Z, \zeta$  및  $\xi$ 는 다음과 같다.

$$V_R = \frac{v_r}{r_i \Omega}, V_Z = \frac{v_z}{r_i \Omega} \quad (3)$$

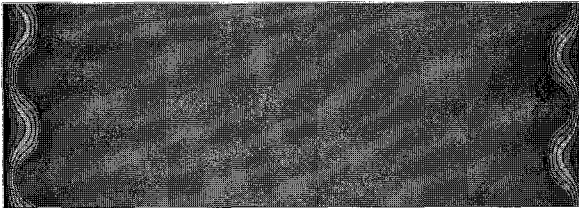
$$\zeta = \frac{z}{d}, \xi = \frac{(r-r_i)}{d} \quad (4)$$

반경방향의 속도의 경우 실험결과와 비교하여 최대값에서 실험보다 약간 높은 값을 나타내고 있으나, 전체적으로 매우 잘 일치 하고 있음을 확인할 수 있다. 또한, 축 방향 속도의 경우에도 실험결과와 매우 잘 일치하고 있음을 알 수 있어 수치해석이 실험을 매우 잘 재현하고 있음을 확인할 수 있다.

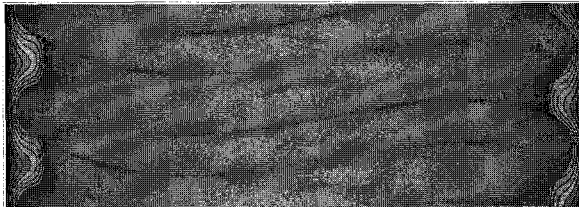
Fig. 5는 테일러 와류를 발생시키는 임계 레이놀즈수에 대한 이론과 수치해석의 값을 나타낸 것이다. 그림에서 보면 이론과 수치해석 모두 반경비의 증가에 따라 임계 레이놀즈수도 비례적으로 증가하고 있는 경향을 확인할 수 있다. 테일러 와류는 원심불안정성의 영향으로 생기기 시작하지만 낮은 레이놀즈수에서는 점성의 영향으로 원심불안정성이 사라지게 된다. 또한 반경비가 증가하게 되면 상대적으로 점성의 영향



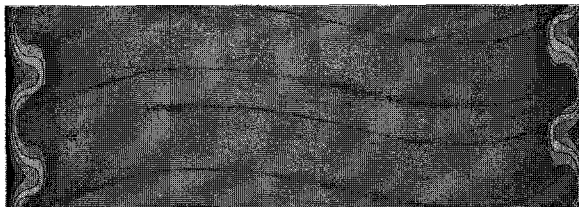
(a)  $Re/Re_c=1(m=0)$



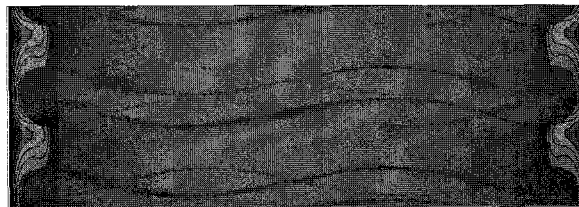
(b)  $Re/Re_c=1.114(m=1)$



(c)  $Re/Re_c=1.4(m=2)$



(d)  $Re/Re_c=1.842(m=3)$



(e)  $Re/Re_c=2.22(m=4)$

Fig. 6 Iso-surface for v-velocity at  $\eta=0.83$

이 크게 작용하게 되어 반경비가 증가할수록 임계 레이놀즈수도 증가하게 된다. 수치해석의 값이 이론보다 조금 높은 값을 나타내고 있지만 약 10%내외의 오차를 보이고 있다.

Wereley는 실험에서  $\eta=0.83$ 의 경우 레이놀즈수의 증가에 따라 아래의 Table 3과 같은 유동변화를 제시하였으며, 이중 주기를 가지는 파동와류까지는 원주방향으로 4개의 파(wave)

가 생성함을 보여주었다. Fig. 6은 본 수치해석을 통한 파수의 증가를 보여주고 있으며, Wereley의 실험에서와 같은 유동형태를 뚜렷하게 보여주고 있다. 그리고, 초기에 파동와류가 발생할시 1개의 파를 가지는 경우에는 파의 진폭이 최대로 증가하며, 파수가 증가할수록 파의 진폭이 점점 작아지는 경향을 보여주고 있다. Fig. 7은  $Re/Re_c=1.4$ 에서 회전방향의 속도 분포에 대한 Iso-surface를  $\eta$ 의 변화에 대하여 나타낸 그림이다. 동일한 레이놀즈수의 비를 가지지만 반경비가 증가할수록 파수가 증가하는 현상을 보여주고 있는 데, 이것은 실린더사이의 간격이 좁아지면서 원심불안정성이 빠르게 나타나기 때문이다. 또한  $\eta=0.83$ 에서 파수가 증가함에 따라 진폭이 감소하는 현상을 보여주었는데 반경비가 증가하는 경우에 대해서도 동일한 결과를 보여주고 있다.

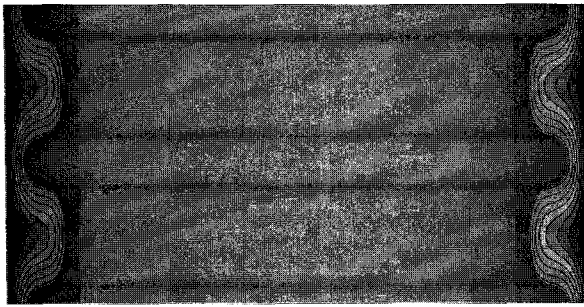
Fig. 8과 9는  $Re/Re_c=1.4$ 에서  $\eta$ 는 0.8과 0.95인 경우 반경축 방향 단면에서 시간에 따른 속도벡터를 나타낸 그림이다. 레이놀즈수가 증가하여 유동이 파동와류로 접어들게 되면 원주방향으로 일정한 주기를 갖는 파가 생성되면서 와류의 형태도 시간에 따라 변하게 된다. 그림은 1주기 동안 와류의 변화를 나타낸 것이다. 하나의 와류는 1주기 동안 인접한 와류와 에너지의 입출이 반복적으로 발생하며,  $\eta=0.95$ 인 경우에는 원주방향으로 6개의 파를 생성하며 와류의 이동거리는  $\eta=0.8$ 보다 작아지게 된다. 하나의 와류가 인접한 와류로 에너지를 방출할 경우 실린더간격이 작은 경우보다 큰 경우에는 와류의 형태가 완전히 사라질 정도까지 에너지를 방출한 후 반주기후 인접한 와류로부터 에너지를 공급받으면서 다시 완전한 와류의 형태를 갖는 것을 확인 할 수 있다.

이러한 파동와류의 이동거리는 파수의 증가에 반비례함을 위의 결과에서 보여주었으며, 파동와류의 정량적인 값을 확인하고자 파동와류의 중심(core)이 이동하는 거리를  $\eta$ 의 변화에 Fig. 10에 나타내었다. Fig. 10에서 이동거리는 각각의 실린더간격인  $d$ 를 이용하여 무차원화 시켰다.  $\eta=0.8$ 과  $0.83$ 에서는  $d$ 보다 이동거리가 크며,  $\eta=0.9$ 와  $0.95$ 는  $d$ 보다 이동거리가 작음을 알 수 있다. 이것은 파수가 작을수록 진폭이 크고 주기가 긴 파를 가지고, 파수가 많을수록 진폭이 작고 주기가 짧은 파를 가짐을 의미한다.

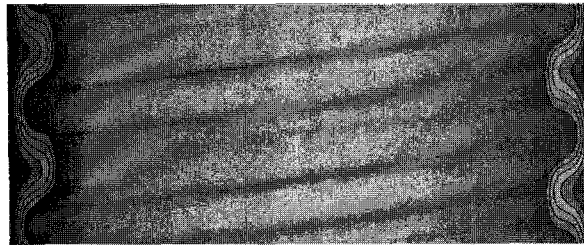
Fig. 10은  $Re/Re_c=1.4$ 일 경우 반경비에 따라 파동와류의 주기성을 확인하기 위한 FFT해석을 나타낸 것이다. 본 연구에서는 파동와류의 1주기를 확인하기 위하여 와류중심의 이동

Table 3 Flow pattern of Wereley's experiment

$Re/Re_c$	1	1.21	1.28	1.98	2.45	2.48	9.09
flow pattern	TVF	TVF→WVF	WVF				
m	0	0→1	2	3	4		



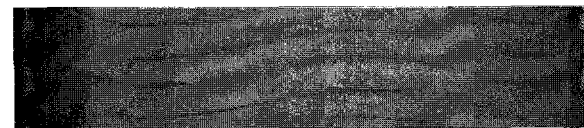
(a)  $\eta=0.75(m=0)$



(b)  $\eta=0.80(m=1)$



(c)  $\eta=0.83(m=2)$



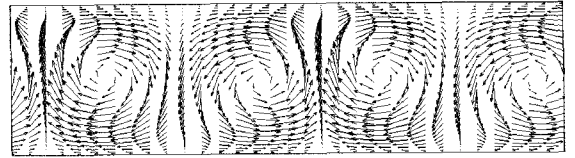
(d)  $\eta=0.9(m=4)$



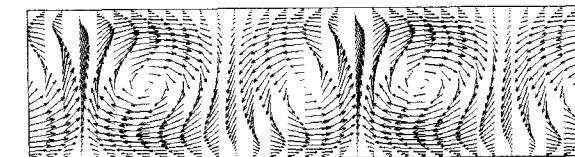
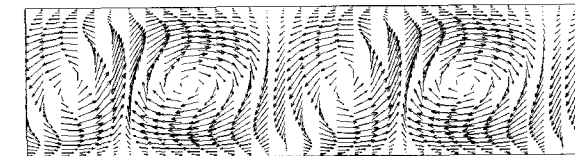
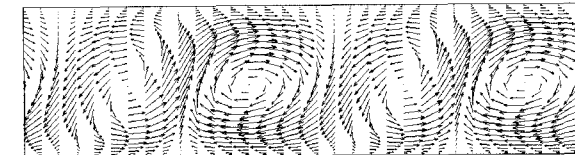
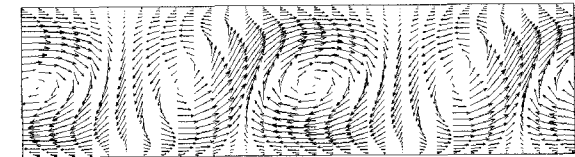
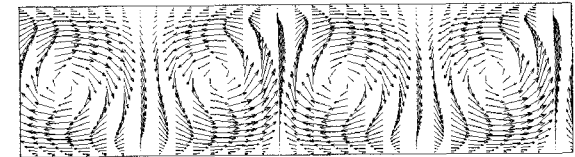
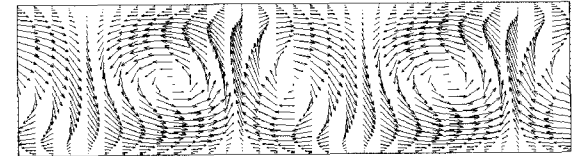
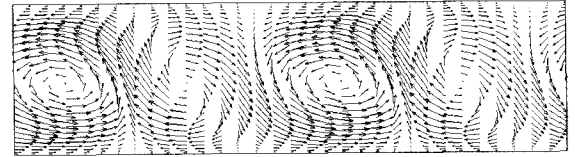
(e)  $\eta=0.95(m=6)$

Fig. 7 Iso-surface for v-velocity at  $Re/Re_c=1.4$

궤적을 취하였다. 와류중심은 파동와류가 발생함에 따라 Fig. 8과 9에서처럼 1주기 동안 원주방향으로 형성되는 파의 주기와 동일하게 이동하기 때문에 주기를 손쉽게 확인할 수 있다. 그림에서 가로축은 주파수, 세로축은 파가 가지는 최대 진폭을 나타내었다.  $\eta=0.8$ 에서는 진폭이 0.00434의 큰 진폭과 0.0172 Hz의 낮은 주파수를 가지며,  $\eta=0.95$ 인 경우 진폭이 0.000396, 주파수가 1.3888 Hz로 반경비가 증가할수록 낮은 진폭의 고주파수를 갖는 파동와류가 형성됨을 알 수 있다. 또



(outer cylinder)



(inner cylinder)

Fig. 8 Velocity vectors in a radial-axial plane for wavy vortex at  $\eta=0.8$  and  $Re/Re_c=1.4(m=1)$  (outer cylinder)

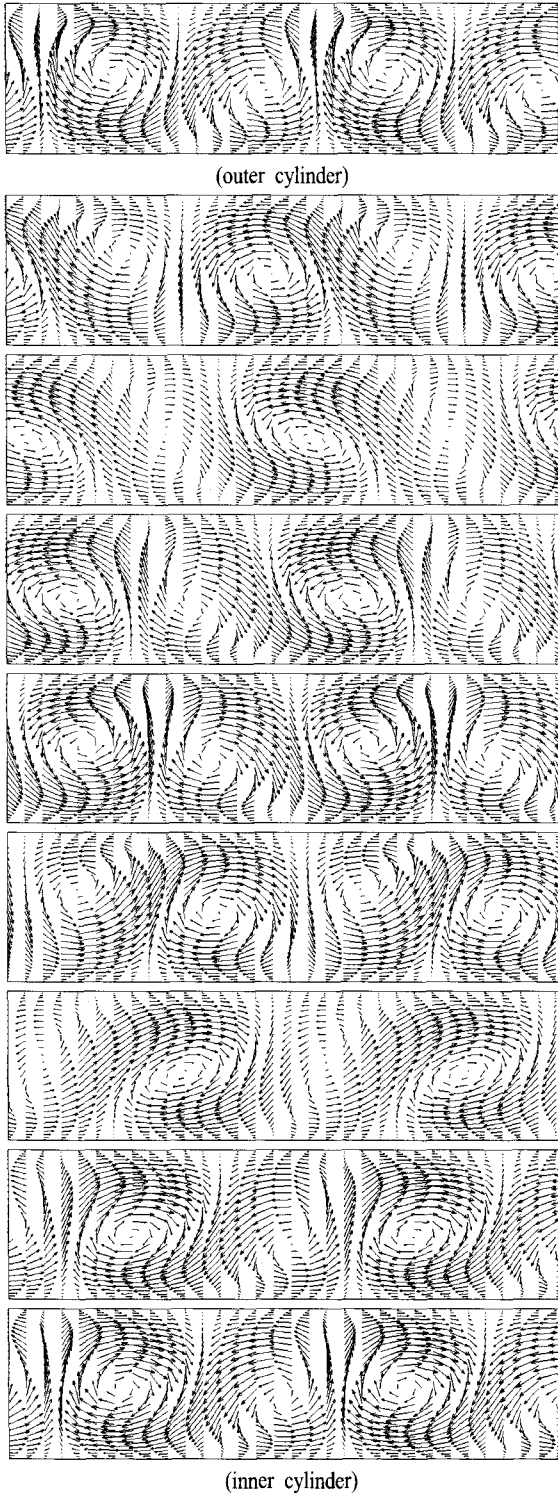


Fig. 9 Velocity vectors in a radial-axial plane for wavy vortex at  $\eta=0.95$  and  $Re/Re_c=1.4$ ( $m=6$ )

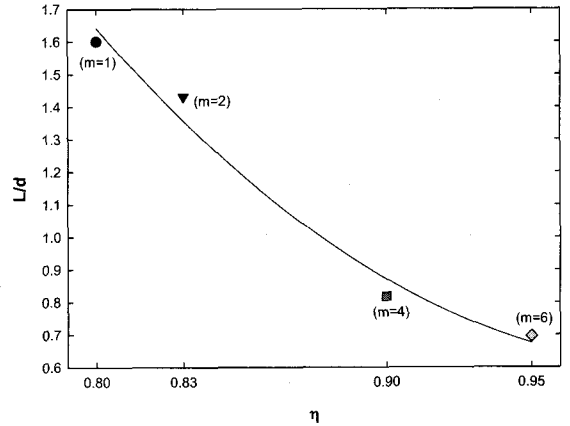


Fig. 10 Dimensionless distance of traveled wavy vortex for axial direction at  $Re/Re_c=1.4$

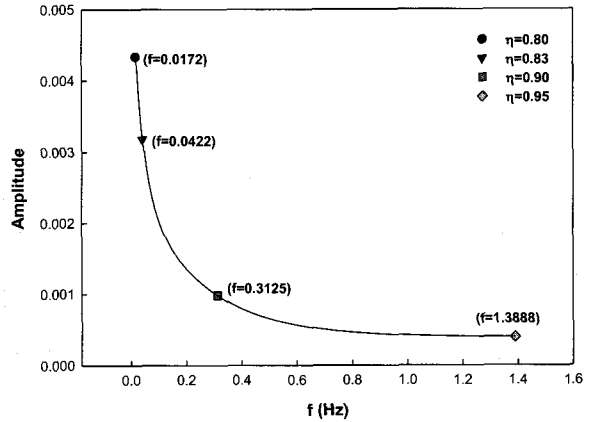


Fig. 11 FFT analysis for wavy vortex at  $Re/Re_c=1.4$

한 이러한 변화는 Fig. 10에서 보듯이 반경비의 증가에 대하여 주파수와 진폭의 상관관계가 지수승으로 감소하는 경향을 보이고 있음을 알 수 있다.

### 5. 결 론

본 연구에서는 비교적 낮은 레이놀즈수에서 반경비의 변화에 대한 Taylor 와류의 변화에 대하여 연구를 진행하였으며, 수치해석의 검증을 위하여 Wereley & Lueptow의 실험결과와 반경방향 및 축방향에 대하여 속도분포를 정량적인 비교결과 매우 일치하는 값을 보여주었기 때문에 수치해석이 실험을 잘 재현하고 있는 결과를 얻었다.  $Re/Re_c$ 가 증가할수록 유동장의 원심불안정성이 가속되면서 원주방향으로 일정한 주기를 갖는 파동와류가 생성됨을 확인할 수 있었고, 이러한 파동와류는 파수가 증가하면서 진폭이 감소하는 경향을 확인하였



다. 실린더사이의 반경비에 커짐에 따라 동일한 레이놀즈수에 대하여 진폭이 급격히 감소하며 높은 주파수의 파가 형성됨을 확인하였으며, 반경비의 증가에 대하여 주파수와 진폭은 지수적으로 감소하는 상관관계를 보여주었다.

## 후 기

본 연구는 학술진흥재단(과제번호 : KRF-2005- 005-J09901) 및 산업자원부 지역산업기술개발사업 의 연구 결과물로서, 이에 관계자 여러분에게 감사드립니다.

## 참고문헌

- [1] 1998, Wereley, S.T. and Lueptow, R.M. "Spatio-temporal character of non-wavy and wavy Taylor-Couette flow," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.364, pp.59-80.
- [2] Kataoka, Kunio, "Taylor vortices and instabilities in circular couette flows," *Fluid Mechanics, Chap.9*, pp.236-274.
- [3] 1976, Cole, J.A., "Taylor-vortex instability and annulus-length effects," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.75, pp.1-15.
- [4] 2004, Czarny, O., Serre, E. and Bontoux, P., "Interaction of wavy cylindrical Couette flow with endwalls," *Physics of Fluids*, Vol.16, No.4, pp.1140-1148.
- [5] 2003, Kim, Y.J. and Hwang, Y.K., "Experimental study on the vortex flow in a concentric annulus with a rotating inner cylinder," *Int. Journal of the KSME*, Vol.17, No.4, pp.562-570.
- [6] 2001, Hwang, J.Y. and Yang, K.S., "Numerical study of wavy Taylor-couette flow," *Trans. of the KSME(B)*, Vol.25, No.5, pp.705-712.
- [7] 2003, Hwang, J.Y. and Yang, K.S., "On the structures of Taylor vortices," *Trans. of the KSME(B)*, Vol.27, No.8, pp.1081-1088.
- [8] 2003, Akonur, A. and Lueptow, R.M., "Three dimensional velocity field for wavy Taylor Couette flow," *Physics of Fluids*, Vol.15, No.4, pp.947-960.