

외부 음향과 구조의 연동 현상 고려한 근사 모델

Approximation Models for Structure-External Acoustic Interaction

이문석† · 박윤식* · 박영진** · 박광춘***

Moonseok Lee, Youn-sik Park, Youngjin Park and K. C. Park

Key Words : structural-acoustic interaction, Kirchhoff's formula, retarded and advanced potentials.

ABSTRACT

Many approximate models for interaction between a flexible structure and an infinite external acoustic medium have been developed for a long time. Among them, Doubly Asymptotic Approximations (DAAs) are very well known approximations. But, it has shortcomings in intermediate frequency range and can't fully describe the acoustic medium. So, this paper presents the modified approximation by applying the retarded and advanced potentials to Kirchhoff's formula. It describes the external acoustic medium more in detail and shows a good result in early time transient responses when it was applied to a spherical shell. Through a spherical shell interacting with external acoustic medium, the transient responses for the proposed model is compared to Huang's exact solution and DAA2.

기호설명

- a : radius of a sphere
 c/c_s : sound speed in fluid/structure
 E : Young's modulus of structure
 h : thickness of a spherical shell
 P_n : n^{th} order Legendre polynomial
 n : Legendre polynomial order
 p^s / p^0 : scatterd/incident pressure
 u^s / u^0 : scatterd/incident velocity
 R_{PQ} : Distance from P to Q
 t_R : $t - R_{PQ} / c$
 n : normal vector at Q
 v/w : meridional/radial displacement
 ρ / ρ_s : density of fluid/structure
 κ_n : n^{th} order spherical bessel function
 of the 3rd kind
 ν : Possion's ratio
 $4\pi\varepsilon$: solid angle

1. 서론

구조와 외부 유체와의 연동 현상은 매우 복잡한 문제로 이제까지 많은 연구가 진행되어 왔다. 하지만 그 복잡성 때문에 구체와 실린더와 같이

간단한 문제에만 그 정해가 존재하였다. 그 결과 유체에 의한 이런 연동 현상을 무시하거나 연동되는 현상을 가상 질량(Added mass)을 이용해 대략적으로 고려하여 해석하였다. 그래서 일반적인 공학적 문제를 좀더 엄밀하게 접근하기 위해 많은 근사 모델들이 연구되어 왔다. 이 중 Geers[1]에 의 Doubly Asymptotic Approximations (DAAs)는 가장 많이 알려진 structure-fluid interaction 을 위한 근사모델로 물 속 구조물의 충격 해석에 많이 사용되며, 구조물의 과도 응답을 잘 예측한다. 하지만, 극한의 저주파와 고주파의 정해에 접근하는 미분 방정식으로 중간대역 주파수의 응답의 정확성이 떨어지며, 음향관점의 음압을 정확히 예측하지 못한다. 본 논문에선 wave equation 의 또 다른 해인 Kirchhoff's formula 에 retarded potential 과 advanced potential 의 선형 조합을 사용하여, early time 과 late time approximation 을 만들고, 이를 통해 2 차의 미분 방정식 근사 모델을 제안한다. 본 모델은 free parameter 를 가지고 있으며, 이를 통해 중간 주파수 대역의 response 를 DAAs 에 비해 좀더 잘 추정할 것이라 예상되며, wave equation 에 의해 지배되는 음장을 좀더 잘 표현한다.

2 장에선 Kirchhoff's formula 와 제안된 근사 모델의 유도과정에 대해서 설명하고, 3 장에서는 외부 음장과 연동하는 구체의 과도 응답을 Haung's solution[2]과 2 차 DAA 의 결과와 비교하여 제안된 근사모델의 특징을 살펴본다.

2. 근사 모델

2.1 Kirchhoff's formula

음장은 Wave equation 에 의해 지배되는 영역이다. 이 음장은 Helmholtz' integral equation 으로 표현되는데, 이는 임의의 형태의 경계조건에도 적용 가능한 wave equation 의 해이다. 하지만, 특정 입사파에만 적용가능하며, 주파수마다 해석해야 하는 문제점을 가지고 있다. 반면, Kirchhoff's formula[3], Eq(1)는 Helmholtz's integral equation 의 또 다른 표현으로 retarded potential 을 적용하여, 주파수에 영향 받는 부분을 제거하였다. 그래서 어떠한 입사파에서도 해석할 수 있는 장점을 가지고 있다. 하지만, retarded value 도 필요하기 때문에 많은 용량을 필요로 하고 있으며, 계산이 복잡하다.

$$4\pi\epsilon p(P,t) = \int_S \left\{ \frac{\rho}{R_{PQ}} \dot{u}(Q,t_R) - \frac{1}{R_{PQ}^2} \frac{\partial R_{PQ}}{\partial n} [p(Q,t_R) + c^{-1} R_{PQ} \dot{p}(Q,t_R)] \right\} dS_Q \quad (1)$$

(1) Advanced 와 retarded potential

Advanced potential 은 wave equation 의 해 중 in-coming wave 에 해당하며, retarded potential 은 out-going wave 에 해당한다. 이를 좀더 쉽게 표현하기 위해 Laplace 변환을 하게 되면

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \phi(Q,t - R_{PQ}/c) dt = e^{-sR_{PQ}/c} \bar{\phi}(Q,s) \quad (2)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \phi(Q,t + R_{PQ}/c) dt = e^{sR_{PQ}/c} \bar{\phi}(Q,s)$$

과 같다.

2.2 Kirchhoff's formula 의 근사식

2.2.1 Kirchhoff's formula 의 Laplace 변환
Laplace 변환한 Kirchhoff's formula 에 식(2)의 선형 조합인

$$\beta \phi(Q,t - R_{PQ}/c) + (1 - \beta) \phi(Q,t + R_{PQ}/c),$$

$$0 \leq \beta \leq 1$$

† KAIST Mechanical Engineering Novic
E-mail : esteban@kaist.ac.kr
Tel : (042) 869-3076, Fax : (042) 869-8220

* KAIST Mechanical Engineering Novic

** KAIST Mechanical Engineering Novic

** University of Colorado, Dept of Aerospace

(3)

을 식 (1)에 대입하면,

$$4\pi\epsilon p(P,s) = \iint_S \left(\beta e^{-R_{PQ}s/c} + (1 - \beta) e^{R_{PQ}s/c} \right) \left\{ -\bar{p} \frac{\partial R_{PQ}}{\partial n} \frac{1}{R_{PQ}^2} - s\bar{p} \frac{\partial R_{PQ}}{\partial n} \frac{1}{R_{PQ}} + s\bar{u} \frac{1}{R_{PQ}} \right\} ds \quad (4)$$

와 같다.

하지만 이는 $e^{\pm R_{PQ}s/c}$ 의 비선형적인 부분 때문에 여전히 풀기에 복잡하다. 이를 위해 exponential term 을 Talyor series 전개하면

$$\beta e^{-\mu} + (1 - \beta) e^{\mu}$$

$$= \beta(1 - \mu + O(\mu^2)) + (1 - \beta)(1 + \mu + O(\mu^2)) \quad (5)$$

$$\approx 1 + \alpha\mu, \mu = R_{PQ}s/c, \alpha = 1 - 2\beta$$

로 근사화되며, 이를 위해선 $R_{PQ}s/c < 1$ 여야 한다. 이를 식 (4)에 대입하여, $(R_{PQ}s/c)^2$,

$$R_{PQ}s/c, 1$$

부분만을 남기면,

$$\alpha B s^2 \bar{p} + (1 + \alpha) c s B_1 \bar{p} + c^2 B_2 \bar{p}$$

$$= \alpha \rho c s^2 A \bar{u} + \rho c^2 s A_1 \bar{u} \quad (6)$$

되고, 여기서 B, B_1, B_2, A, A_1 은 다음과 같이 정의되는 경계적분식이다.

$$Bq(t) = \int_S \frac{\partial R_{PQ}}{\partial n} q(Q,t) dS_Q, \quad B_1q(t) = \int_S \frac{1}{R_{PQ}} \frac{\partial R_{PQ}}{\partial n} q(Q,t) dS_Q \quad (7)$$

$$B_2q(t) = \int_S \frac{1}{R_{PQ}^2} \frac{\partial R_{PQ}}{\partial n} q(Q,t) dS_Q + 4\pi\delta(P - Q) \quad (8)$$

$$Aq(t) = \int_S q(Q,t) dS_Q, \quad A_1q(t) = \int_S \frac{1}{R_{PQ}} q(Q,t) dS_Q \quad (9)$$

2.2.2 Early time approximation

Early time approximation 은 $t \rightarrow 0$ 일 때의 정해를 추정해 가는 근사 방법으로 high frequency approximation($s \rightarrow \infty$)이라고도 한다. 또는 early time 에 source 에서 $R(<ct)$ 의 반경 내에서만 영향을 미치므로 spatially local approximation 이라고도 한다. 식(5)를 만족하기 위해 R_{PQ} 는 ct 보다 작아야 하며, 이를 식 (2)에 적용하여, 식(6)의 왼쪽과 오른쪽의 고차항들을 남기면

$$\alpha B s \bar{p} + (1 + \alpha_{ETA}) c b_1 \bar{p} = \alpha \rho c s A \bar{u} \quad (10)$$

$$b_1 q(t) = \int_s \frac{1}{R_{PQ}} \frac{\partial R_{PQ}}{\partial n} q(Q, t) dS_p \quad (11)$$

이 된다. 여기서 early time approximation 중 기본적인 1 차의 plane wave approximation[4]을 만족시키기 위해, B 의 $\partial R_{PQ} / \partial n$ 을 1 이라고 가정한다. 그러면, 식 (11)은

$$\alpha s A \bar{p}(P, s) + (1 + \alpha_{ETA}) c b_1 \bar{p}(P, s) = \alpha \rho c s A \bar{u}(P, s) \quad (12)$$

로 정리되며, P 지점에서의 spatially local approximation 이 된다.

2.2.3 Late time approximation

Late time approximation 은 early time approximation 의 반대로 $t \rightarrow \infty$ 일 때의 정해를 추정해 가는 근사 방법으로 low frequency approximation ($s \rightarrow 0$) 라고도 한다. 식 (6)은 $R_{PQ} s / c < 1$ 일 때의 식 (4)의 late time approximation 이라 할 수 있다. 이 중 저차항을 남기면,

$$(1 + \alpha_{LTA}) s B_1 \bar{p} + c B_2 \bar{p} = \rho c s A_1 \bar{u} \quad (13)$$

이 된다.

2.2.4 2 차 근사 모델

앞에서 구한 early time approximation 과 late time approximation 은 극한의 고주파와 저주파에만 적용 가능한 식이다. 그래서 전 주파수 영역에 적용할 수 있는 2 차의 근사 모델의 형태를

$$[s^2 + csP_1 + c^2 P_0] \bar{p}(P, s) = \rho c s (s + U_0) \bar{u}(P, s) \quad (14)$$

과 같이 잡고, 식 (12)과 식 (13)을 고주파와 저주파에서 impedance matching 하게 되면,

$$\begin{aligned} x &= [A_1^{-1} B_2 - A^{-1} (1 + \alpha_{ETA}) b_1] \\ & [I - (1 + \alpha_{LTA}) A_1^{-1} B_2]^{-1} \\ s^2 \bar{p} + cs (A^{-1} (1 + \alpha_{ETA}) b_1 + x) \bar{p} + c^2 x A_1^{-1} B_2 \bar{p} \\ &= \rho c s^2 \bar{u} + \rho c^2 s x \bar{u} \end{aligned} \quad (15)$$

로 정리된다. 여기서 early time 에는 advanced potential 을, late time 에는 retarded potential 을 선택하면, 식 (15)는

$$\begin{aligned} s^2 \bar{p} + cs A_1^{-1} B_2 \bar{p} + c^2 [A_1^{-1} B_2 - A^{-1} 2b_1] A_1^{-1} B_2 \bar{p} \\ = \rho c s^2 \bar{u} + \rho c^2 s [A_1^{-1} B_2 - A^{-1} 2b_1] \bar{u} \end{aligned} \quad (16)$$

으로 간략히 정리된다.

3. Numerical Examples

정해가 알려진 Fluid- structure interaction problem 은 구체, 실린더 그리고 평판 문제가 있다. 이 중 구체는 간단하면서도 많은 사람들로 부터 다루어지고 있는 문제이다. 본 논문에선 구체에 대한 근사모델, 식 (16)을 정해와 2nd order Doubly Asymptotic Approximation(DAA2)과 비교하며, 외부 음장과 연동하는 구체의 과도응답을 보여준다. 여기서, 식 전개에 명료성을 위해 이후의 변수와 식은 t 는 a/c , p 는 ρc^2 로 정형화되어 사용한다.

3.1 구체의 임피던스

구체에서 산란파의 압력과 반경 방향의 속도는 Legendre polynomial series 로 전개되며, 각 Legendre polynomial order 별 산란파의 압력과 속도의 관계는 Huang[2]에 의해

$$\bar{p}_n = \frac{\kappa_n(s)}{\kappa_n'(s)} \bar{u}_n(s) \quad (17)$$

과 같이 계산되었다. 또한 DAA2[1]는

$$\bar{p}_n = \frac{s^2 + (n+1)s}{s^2 + (n+1)s + (n+1)^2} \bar{u}_n(s) \quad (18)$$

과 같다.

반면, 식 (16)의 근사모델은

$$\bar{p}_n = \frac{s^2 + (n+1)s}{s^2 + (n+1)s + n(n+1)} \bar{u}_n(s) \quad (18)$$

과 같이 정리된다. 이는 curved wave approximation 을 사용한 DAA2[5]과 sphere 예선 같게 표현된다. Fig.1 은 차수별 정해와 DAA2 그리고 제안된 근사모델의 임피던스 pole 을 보여준다.

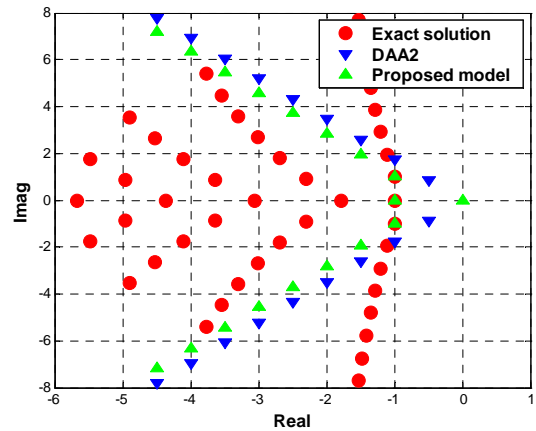


Fig. 1 구체에서의 임피던스 pole 의 위치

자세히 살펴보면, 제안된 근사모델의 경우, 0th order와 1st order의 정해를 정확히 추정해 가지만,

DAA2의 경우, 각 차수별 주된 pole의 허수 값은 어느 정도 쫓아가지면, 저 차에서는 제안된 모델보다 정확하지 못하다.

3.2 외부 음장과 연동하는 구체

Fig.2와 같은 물 속에서의 구체는 주변의 음장과 연동되어 움직인다. 물성치는 $h/a = 0.01$, $\rho_s/\rho = 7.7$, $c/c_s = 3.8$ 이다.

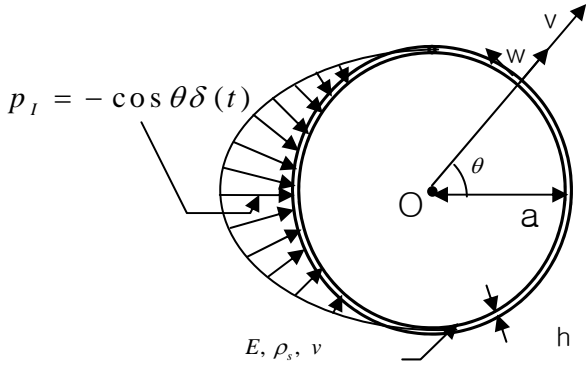


Fig. 2 cosine 형태의 충격을 받는 구체

구체의 변수는 Legendre polynomial로 전개되며, Legendre polynomial로 전개된 구체의 운동방정식은 [5]

$$w(\theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n P_n(\cos \theta), \quad v(\theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \frac{\partial}{\partial \theta} P_n(\cos \theta) \quad (19)$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_n s^2 + A_n^{vv} & A_n^{vw} & 0 \\ A_n^{vw} & s^2 + A_n^{ww} & \mu \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} v_n \\ w_n \\ p_n^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\mu p_n^0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A_n^{vv} &= \lambda_n(1 + \beta)\xi_n\gamma_0 \\ A_n^{vw} &= \lambda_n(1 + \nu + \beta\xi_n)\gamma_0 \\ A_n^{ww} &= [2(1 + \nu) + \lambda_n\beta\xi_n]\gamma_0 \end{aligned} \quad (20)$$

$$\mu = (\rho/\rho_s)(a/h), \quad \gamma_0 = c_0^2/c^2$$

$$\beta = (h/a)^2/12, \quad \xi_n = \lambda_n - 1 + \nu$$

로 표현된다.

이 때 구체 표면에서의 압력과 속도는

$$p = p^s + p^0 \quad (21)$$

$$\dot{w} = u^s + u^0 \quad (22)$$

과 같은 조건을 만족하며, 이를 이용하여 식 (17)을 식 (20)에 더하면, 구체의 fluid와 structure가 결합식을 얻을 수 있다.

결합식을 이용하여 Fig. 2와 같은 충격이 구체에 가해졌을 때 구체의 과도 응답을 구해보면 다

음과 같다.

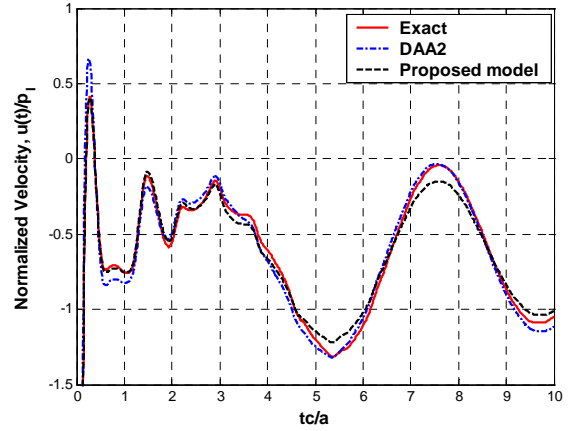


Fig. 3 Velocity response at $\theta = 180^\circ$

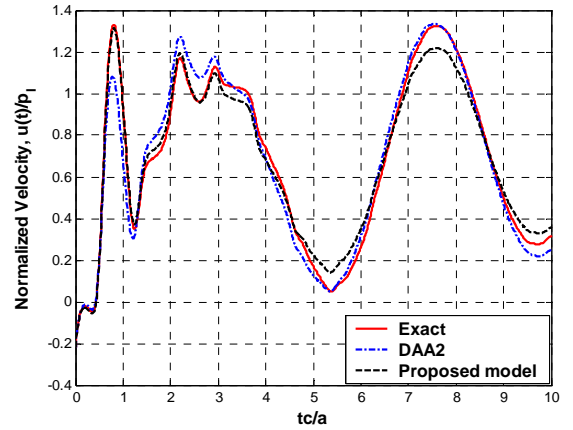


Fig. 4 Velocity response at $\theta = 0^\circ$

Fig 3과 4는 충격을 직접적으로 받은 구체의 정면부분과 반대부분에서의 반경 방향의 속도를 보여주고 있다. 정해와 비교해 보면, DAA2와 제안된 근사모델 모두 약간의 오차를 가지고 있지만, 잘 추정해 가는 것을 볼 수 있다. 좀더 자세히 살펴보면, 제안된 근사모델의 경우, 5초 이전의 응답은 거의 정확하게 추정해 가는 것을 볼 수 있지만, 5초 이후론 약간의 오차를 보여주고 있다. 반면, DAA2의 경우, 초기에 응답의 peak 점에서 많은 오차를 보여주고 있으며, 시간이 지날수록 오차들이 줄어드는 것을 볼 수 있다. Fig. 5와 6는 DAA2와 제안된 모델의 정해에 대한 오차를 보여준다.

위와 같은 형태의 오차를 보이는 이유는 제안된 모델의 경우, Fig 1에서 보여지듯, 제안된 근사식의 pole이 damping 값이 크면서 초기 응답에 영향을 끼치는 정해의 pole을 좀더 추정하기 때문이다. 하지만, DAA2는 이를 잘 추정하지 못하고 있다.

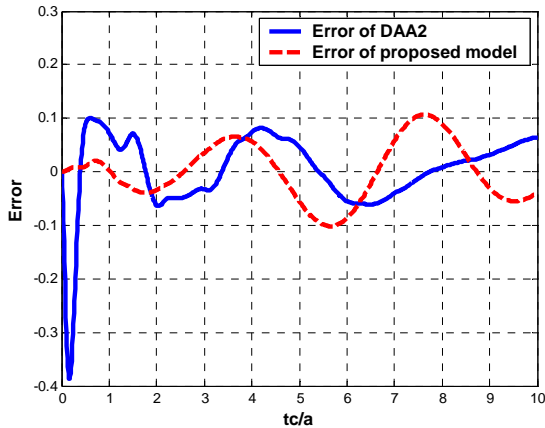


Fig. 5 DAA2 와 제안된 모델의 오차 at $\theta = 180^\circ$

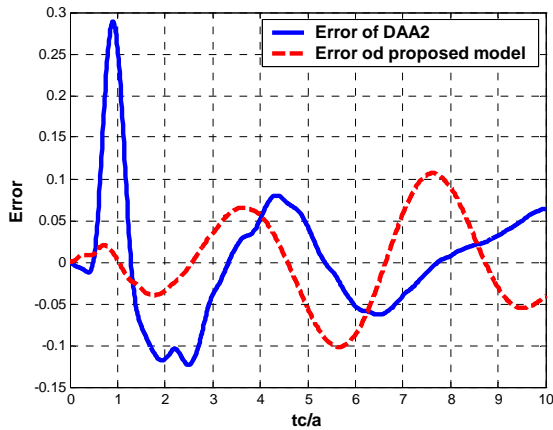


Fig. 6 DAA2 와 제안된 모델의 오차 at $\theta = 0^\circ$

4. 결론

본 연구에선 외부 음장과 연동하는 구조물의 응답을 추정하는 근사 모델을 제안하였다. 제안된 모델은 Kirchhoff's formula 에 advanced 와 retarded potential 의 선형 조합식을 근사화 하였으며, 2 차 미분 방정식 형태를 취하고 있다. 또한 본 연구는 제안된 모델을 물 속에서 외부 음장과 연동하는 구체의 예제를 통해 Huang 의 정해와 DAA2 의 결과와 비교하여 성능을 평가하였다. 이 예제를 통해, 제안된 모델이 외부 음장을 DAA2 보다 좀더 정확히 추정하는 것을 확인할 수 있었으며, 이를 통해 초기 충격 응답을 DAA2 보다 좀더 정확히 예측하는 것을 확인하였다. 이는 실제 물 속 구조물의 충격 응답을 예측하는데, 유용하게 쓰일 수 있게 된다.

후 기

이 논문은 0000 년도 정부(과학기술부)의 재원으로 한국과학재단의 국가지정연구실사업으로 수행된 연구임(M10500000112-05J0000-11210)과 BK 21 의 지원으로 수행되었습니다.

참고문헌

- (1) Geers, T. L. (1978), "Doubly asymptotic approximations for transient motions of submerged structures," *J. Acoust.Soc. Am.*, 64(5) Nov. 1978, 1500-1508..
- (2) H.Huang, "Transient Interaction of Plane Acoustic Wave with a Spherical Elastic Shell",*J.Acoust.Soc.Am.* 45,661-670,1969.
- (3) Baker, B. B. and Copson, E. T. (1949), *The Mathematical Theory of Huygens Principle*, Clarendon Press, Oxford, 23-45.
- (4) Mindlin, R.D., and Bleich, H. H., 1953,"Response of an Elastic Cylindrical Shell to a Transverse, Step Shock Wave," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 20, pp189-195, 1953..
- (5) T.L.Geers, Peizhen Zhang, "Doubly Asymptotic Approximations for Submerged Structures with Internal Fluid Volumes : Evaluation", *Journal of Applied Mechanicals*, Vol 61, pp 900-905, 1994
- (6) M.C.Junger and D.Feit,*Sound, Structures, and Their Interaction*, MIT, Cambridge, MA, 1972