전단변형을 고려한 회전 가능한 지점을 갖는 원호 아치의 자유진동

Free Vibrations of Shear Deformable Circular Arches with Rotationally Flexible Supports

오상진† · 윤희민* · 박광규**

Sang Jin Oh, Hee Min Yoon and Kwang Kyou Park

Key Words: Circular Arch(원호 아치), Free Vibration(자유진동), Rotationally Flexible Support (회전 가능 지점), Axial Deformation(축변형), Rotatory Inertia(회전관성), Shear Deformation(전단변형)

ABSTRACT

The differential equations governing free, in-plane vibrations of linearly elastic circular arches with rotationally flexible supports, including the effects of rotatory inertia, shear deformation and axial deformation, are solved numerically using the corresponding boundary conditions. The lowest four natural frequencies and the corresponding mode shapes are obtained over a range of non-dimensional system parameters: the subtended angle, the slenderness ratio, and the rotational spring stiffness.

1. 서 론

아치는 여러 구조물에서 단위구조로 이용되기 때문에 연구자들에 의해 다양한 조건을 갖는 아치의 동적 거동 특히 자유진동에 관한 많은 연구가 진행되어 왔다.

이들 연구들(1-4)에서는 주로 이상적인 단부조건(고정, 회전, 자유)을 갖는 아치를 연구대상으로 하고 있다. 그러나 실제 구조물에서 이와 같이 이상적인 단부조건을 실현하는 것은 어렵다. 따라서 일반적인 단부조건 즉 단부가 병진스프링 및 회전스프링으로 지지된 구조부재의 거동 특성을 규명하는 것은 매우 실제적인 연구라 할 수 있다.(5,6)

이에 본 연구에서는 단부가 힌지와 회전스프링으로 지지된 원호 아치의 고유진동수 및 진동형을 산출하고자 한다. 이를 위해 축변형, 회전관성 및 전단변형 효과를 고려한 대상구조의 자유진동에 대한 지배 미분방정식을 대응하는 단부조건을 적용하여 수치해석한다.

해석결과로서 아치의 중심각, 세장비 및 단부의 회전스프링상수 변화에 따른 고유진동수 및 진동형 변화를 고찰한다.

2. 수학적 모형

Fig. 1은 단부가 힌지와 회전스프링으로 지지된 원호 아치를 나타낸 것이다. 이 그림에서 α와 a는 각각 아치 중심각(subtended angle)과 반경이며, ϕ는 아치축상 임의점의 위치를 나타내는 각도이다. 그리고 w 및 v는 각각 아치축상 임의점 ϕ에서의 곡률중심방향과 접선방향 변위이며, ψ와 β는 각각 순수 휨에 의한 단면회전각 및 전단변형률이다. 또한 K_{ra}와 K_{rb}는 각각 좌, 우단의 회전스프링 강성을 나타내는 상수이다.

Fig. 1에 보인 아치가 면내에서 진동하는 경우 아치 미소요소에 작용하는 합응력과 관성력의 동적평형방정식은 식 (1)~(3)과 같다.

$$N' + Q - aP_t = 0\,,\quad Q' - N - aP_r = 0 \qquad (1, 2)$$

$$a^{-1}M' - Q + T = 0 \qquad (3)$$

여기서 N, Q 및 M은 각각 축방향력, 전단력 및 휨모멘트, P_r, P_t 및 T는 각각 곡률중심방향 관성력, 접선방향 관성력 및 회전관성우력이며, $(\,'\,) = d/d\phi$이다.

축변형 및 전단변형 효과를 고려하는 경우 아치 단면에 발생하는 단면력은 식 (4)~(6)과 같이 진동변위의 항으로 표현할 수 있다.

$$M = -EIa^{-1}\psi'\,,\quad N = EAa^{-1}(v' + w) + EIa^{-2}\psi' \qquad (4, 5)$$

$$Q = kAG\beta = kAGa^{-1}(w' - v - a\psi) \qquad (6)$$

위의 식들에서 E와 G는 각각 아치 재료의 탄성

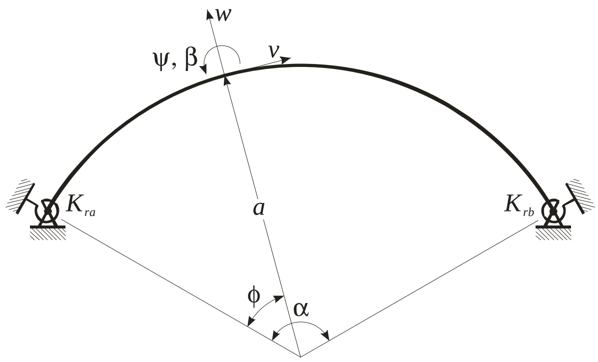

Fig. 1 Circular arch with spring-hinged ends.

† 남도대학 토목환경과
E-mail : sjoh@namdo.ac.kr
Tel : (061) 380-8502, Fax : (061) 380-8679
* 원광대학교 대학원
** 대전대학교 토목공학과

Table 1 Frequency parameter C_i for various stiffness of the rotational springs at both ends (μ =0.3423)

$k_{ra}=k_{rb}$	s	α =60				α =120				α =180			
		i =1	i =2	i =3	i =4	i =1	i =2	i =3	i =4	i =1	i =2	i =3	i =4
0	20	19.41	28.81	60.60	62.56	6.613	14.47	20.88	28.14	2.221	6.566	12.87	17.90
	100	33.38	69.05	101.4	137.6	6.913	17.39	33.51	52.47	2.265	6.908	13.93	22.68
1	20	19.98	29.98	61.55	62.58	7.315	14.62	21.37	28.48	2.691	6.920	13.25	17.90
	100	35.08	69.71	102.3	139.2	7.701	18.05	34.31	53.15	2.757	7.342	14.43	23.16
10	20	22.04	34.57	62.70	65.80	9.329	15.00	23.21	29.68	3.688	7.926	14.52	17.92
	100	42.86	72.67	107.5	149.2	10.10	20.67	38.00	56.56	3.839	8.682	16.27	25.18
100	20	23.52	38.32	62.82	69.90	10.45	15.17	24.51	30.44	4.101	8.464	15.34	17.92
	100	50.97	75.44	115.6	166.0	11.55	22.83	41.61	60.50	4.305	9.471	17.58	26.88
1000	20	23.76	38.98	62.84	70.68	10.61	15.19	24.72	30.55	4.156	8.541	15.47	17.93
	100	52.62	75.95	117.6	170.5	11.77	23.21	42.29	61.33	4.368	9.590	17.79	27.18
10000	20	23.79	39.05	62.84	70.77	10.63	15.20	24.74	30.56	4.162	8.550	15.48	17.93
	100	52.80	76.00	117.9	171.0	11.79	23.25	42.36	61.42	4.374	9.602	17.81	27.21
10^7	20	23.79	39.06	62.84	70.78	10.63	15.20	24.75	30.56	4.163	8.550	15.48	17.93
		(23.75)	(39.05)	(62.38)	(70.71)	(10.61)	(15.19)	(24.72)	(30.47)	(4.151)	(8.542)	(15.46)	(17.91)
	100	52.82	76.01	117.9	171.1	11.79	23.25	42.37	61.43	4.375	9.604	17.81	27.22
		(52.82)	(76.01)	(117.9)	(171.1)	(11.79)	(23.25)	(42.37)	(61.43)	(4.374)	(9.603)	(17.81)	(27.22)

* Values in parentheses are the results for clamped-clamped arches obtained by Irie *et al*. (1983).

계수와 전단탄성계수, A 와 I 는 각각 아치 단면의 단면적 및 단면2차모멘트, k 는 단면형상에 따른 상수이다.

아치가 조화진동을 한다고 가정하면, 아치 미소요소에 발생하는 단위길이당 관성력 및 회전관성우력은 식 (7)~(9)와 같다.

$$P_r = -\gamma A\omega^2 w\,,\ \ P_t = -\gamma A\omega^2 v\,,\ \ T = -\gamma I\omega^2\psi \qquad (7\text{-}9)$$

여기서 γ 는 아치 재료의 밀도, ω 는 고유각진동수이다.

지배방정식을 무차원 형태로 나타내기 위하여 다음의 무차원 변수들을 사용한다.

$$\delta = w/a\,,\ \ \lambda = v/a\,,\ \ s = a\big/\sqrt{I/A}\,,\ \ \mu = kG/E \quad (10\text{-}13)$$

$$C_i = \omega_i a^2\sqrt{\gamma A/(EI)}\,,\ \ i = 1,2,3,4,\cdots \qquad (14)$$

위의 식에서 s 와 μ 는 각각 세장비(slenderness ratio)와 전단계수(shear parameter), C_i 는 무차원 고유진동수(frequency parameter), i 는 모드번호이다.

식 (2)에 식 (5)~(7), 식 (1)에 식 (5), (6), (8), 식 (3)에 식 (4), (6), (9)를 대입하고, 무차원 변수들을 이용하여 정리하면 식 (15)~(17)의 지배 미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\delta'' = \mu^{-1}\left(1 - s^{-2}C_i^2\right)\delta + \left(1 + \mu^{-1}\right)\lambda' + \left(1 + \mu^{-1}s^{-2}\right)\psi' \quad (15)$$

$$\lambda'' = \left(\mu - s^{-2}C_i^2\right)\lambda - (1 + \mu)\delta' - s^{-2}\psi'' + \mu\psi \qquad (16)$$

$$\psi'' = \left(\mu s^2 - s^{-2}C_i^2\right)\psi - \mu s^2\delta' + \mu s^2\lambda \qquad (17)$$

Fig. 1에 보인 바와 같이 아치 단부는 힌지와 회전스프링으로 지지되어 있다. 따라서 좌단($\phi = 0$)에서 휨모멘트는 $-EIa^{-1}\psi' = K_{ra}\psi$, 우단($\phi = \alpha$)에서 휨모멘트는 $-EIa^{-1}\psi' = -K_{rb}\psi$ 로 표현된다. 이를 무차원 변수를 이용하여 표현하면 각각 식 (18), (19)와 같다.

$$\psi' + k_{ra}\psi = 0\,,\ \ \psi' - k_{rb}\psi = 0 \qquad (18,\ 19)$$

식 (18), (19)에서 k_{ra} 와 k_{rb} 는 무차원 스프링상수로서 그 내용은 식 (20), (21)과 같다.

$$k_{ra} = K_{ra}a/(EI)\,,\ \ k_{rb} = K_{rb}a/(EI) \qquad (20,\ 21)$$

한편 양단($\phi = 0$, $\phi = \alpha$)에서는 진동변위 w 와 v 가 발생하지 않으므로 이에 대한 경계조건식은 다음과 같다.

$$\delta = 0\,,\ \ \lambda = 0 \qquad (22,\ 23)$$

3. 수치해석 예 및 고찰

본 연구에서는 식 (15)~(17)의 지배 미분방정식을 6개의 1계 연립 미분방정식으로 변환하여 초기치 문제로 형성한 후 좌단의 경계조건식을 이용하여 Runge-Kutta법으로 수치적분하였으며, 우단의 경계조건식을 만족하는 고유치를 계산하였다. 대상 구조의 무차원 고유진동수를 결정하기 위하여 시행착오적 행렬값 탐사법을 적용하는 과정에서 Regula-Falsi법을 이용하였다. 이 논문에서는 대상구조의 제변수 변화에 따른 최저차 4개의 무차원 고유진동수 및 진동형을 산출하여 그 결과를 Table 1~3과 Fig. 2~7에 수록하였다.

Table 1은 $k_{ra} = k_{rb} = 0 \sim 10^7$ (대칭구조), Table 2는 $k_{ra} = 0 \sim 10^7$, $k_{rb} = 0$ (비대칭구조), Table 3은 $k_{ra} = 0 \sim 10^7$, $k_{rb} = 10^7$ (비대칭구조)인 경우 아치 중심각

Table 2 Frequency parameter C_i for various stiffness of the rotational spring at left end ($k_{rb}=0$, μ =0.3423)

k_{ra}	s	α =60				α =120				α =180			
		i =1	i =2	i =3	i =4	i =1	i =2	i =3	i =4	i =1	i =2	i =3	i =4
0	20	19.41	28.81	60.60	62.56	6.613	14.47	20.88	28.14	2.221	6.566	12.87	17.90
	100	33.38	69.05	101.4	137.6	6.913	17.39	33.51	52.47	2.265	6.908	13.93	22.68
1	20	19.68	29.41	61.07	62.58	6.963	14.55	21.12	28.32	2.457	6.746	13.06	17.90
	100	34.23	69.39	101.9	138.4	7.307	17.72	33.91	52.81	2.512	7.127	14.18	22.92
10	20	20.44	31.87	62.41	63.45	7.931	14.80	21.95	29.04	2.935	7.271	13.69	17.91
	100	38.00	71.14	104.1	143.5	8.457	19.05	35.74	54.56	3.025	7.798	15.09	23.93
100	20	20.82	33.88	62.48	65.53	8.426	14.96	22.46	29.60	3.113	7.546	14.08	17.92
	100	41.60	73.27	106.9	151.8	9.079	20.08	37.44	56.57	3.221	8.164	15.70	24.76
1000	20	20.87	34.23	62.48	65.94	8.497	14.98	22.54	29.70	3.136	7.585	14.14	17.92
	100	42.27	73.73	107.5	153.9	9.168	20.25	37.74	56.98	3.246	8.217	15.79	24.90
10000	20	20.87	34.26	62.48	65.98	8.504	14.98	22.55	29.71	3.138	7.589	14.15	17.92
	100	42.35	73.78	107.6	154.2	9.177	20.27	37.78	57.03	3.249	8.222	15.80	24.91
10^7	20	20.88	34.27	62.48	65.99	8.505	14.98	22.55	29.71	3.139	7.590	14.15	17.92
	100	42.36	73.78	107.6	154.2	9.178	20.27	37.78	57.03	3.249	8.223	15.80	24.91

Table 3 Frequency parameter C_i for various stiffness of the rotational spring at left end ($k_{rb}=10^7$, μ =0.3423)

k_{ra}	s	α =60				α =120				α =180			
		i =1	i =2	i =3	i =4	i =1	i =2	i =3	i =4	i =1	i =2	i =3	i =4
0	20	20.88	34.27	62.48	65.99	8.505	14.98	22.55	29.71	3.139	7.590	14.15	17.92
	100	42.35	73.78	107.6	154.2	9.178	20.27	37.78	57.03	3.249	8.223	15.80	24.91
1	20	21.34	34.75	62.55	66.39	8.879	15.01	22.86	29.80	3.383	7.749	14.34	17.92
	100	43.28	73.92	108.3	155.0	9.600	20.59	38.20	57.34	3.509	8.436	16.06	25.15
10	20	22.80	36.84	62.74	68.33	9.960	15.11	23.93	30.18	3.918	8.237	15.00	17.92
	100	47.57	74.70	112.0	159.9	10.91	21.93	40.12	58.99	4.098	9.131	17.02	26.18
100	20	23.65	38.69	62.83	70.34	10.54	15.18	24.63	30.50	4.132	8.507	15.41	17.93
	100	51.88	75.74	116.7	168.5	11.67	23.04	41.99	60.97	4.340	9.537	17.69	27.05
1000	20	23.78	39.02	62.84	70.73	10.62	15.20	24.73	30.55	4.160	8.546	15.47	17.93
	100	52.72	75.98	117.8	170.8	11.78	23.23	42.33	61.38	4.371	9.597	17.80	27.20
10000	20	23.79	39.05	62.84	70.77	10.63	15.20	24.75	30.56	4.162	8.550	15.48	17.93
	100	52.81	76.01	117.9	171.1	11.79	23.25	42.37	61.43	4.375	9.603	17.81	27.22
10^7	20	23.79	39.06	62.84	70.78	10.63	15.20	24.75	30.56	4.163	8.550	15.48	17.93
	100	52.82	76.01	117.9	171.1	11.79	23.25	42.37	61.43	4.375	9.604	17.81	27.22

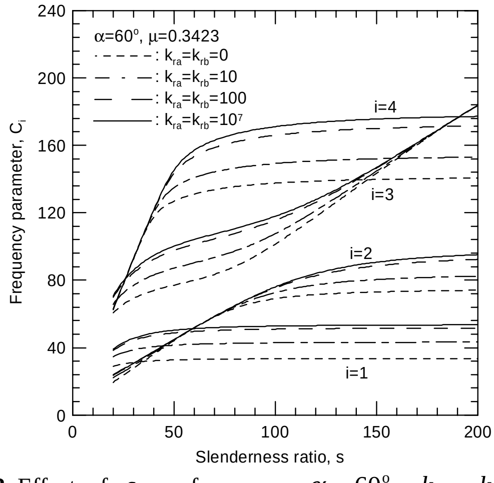

Fig. 2 Effect of s on frequency. $\alpha=60^{\circ}$; $k_{ra}=k_{rb}=0$, 10, 100 and 10^7.

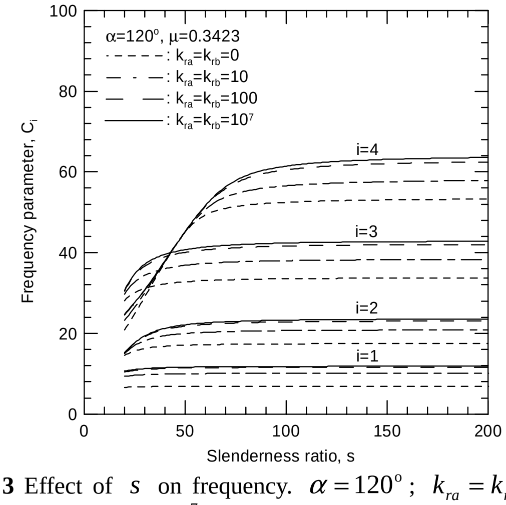

Fig. 3 Effect of s on frequency. $\alpha=120^{\circ}$; $k_{ra}=k_{rb}=0$, 10, 100 and 10^7.

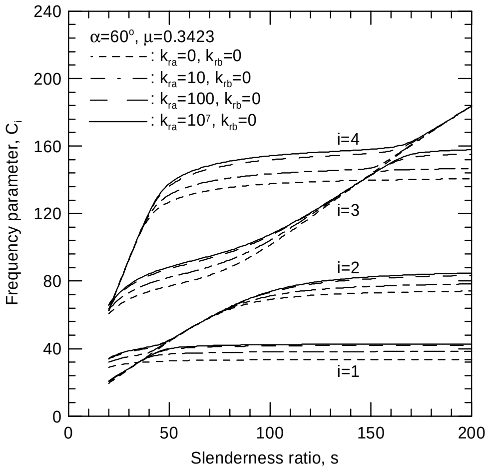

Fig. 4 Effect of s on frequency. $\alpha = 60^{o}$; $k_{rb} = 0$; $k_{ra} = 0$, 10, 100 and 10^{7}.

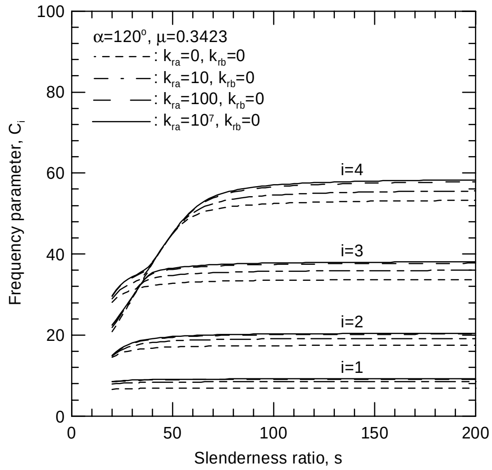

Fig. 5 Effect of s on frequency. $\alpha = 120^{o}$; $k_{rb} = 0$; $k_{ra} = 0$, 10, 100 and 10^{7}.

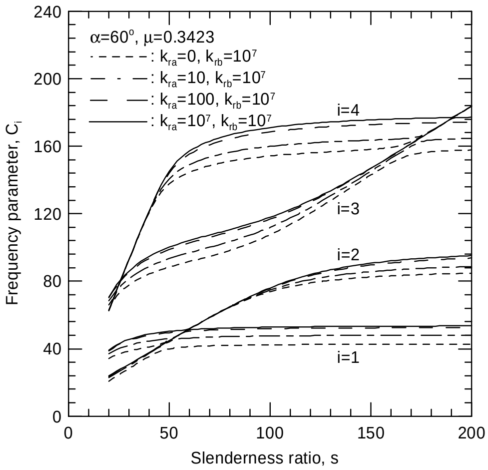

Fig. 6 Effect of s on frequency. $\alpha = 60^{o}$; $k_{rb} = 10^{7}$; $k_{ra} = 0$, 10, 100 and 10^{7}.

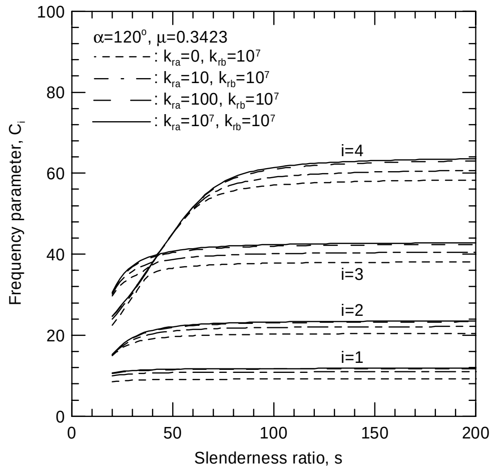

Fig. 7 Effect of s on frequency. $\alpha = 120^{o}$; $k_{rb} = 10^{7}$; $k_{ra} = 0$, 10, 100 and 10^{7}.

및 세장비의 변화에 따른 고유진동수의 변화를 나타낸 것이다.

Fig. 2~7은 ($k_{ra} = k_{rb} = 0 \sim 10^{7}$), ($k_{ra} = 0 \sim 10^{7}$, $k_{rb} = 0$), ($k_{ra} = 0 \sim 10^{7}$, $k_{rb} = 10^{7}$)이고, 중심각이 각각 60^{o} 와 120^{o} 인 아치의 세장비를 변화시키면서 해석한 결과이다.

4. 요 약

이 논문에서는 단부가 힌지와 회전스프링으로 지지된 원호 아치의 면내 자유진동에 대한 지배미분방정식을 수치해석하여 대상 구조에 대한 최저차 4개의 고유진동수 및 진동형을 산출하였다. 축변형, 회전관성 및 전단변형 효과를 고려한 지배방정식을 채택하였으며, 해석결과로서 아치 중심각, 세장비 및 단부의 회전스프링상수 변화에 따른 고유진동수 및 진동형의 변화를 고찰하였다.

참고문헌

(1) Irie, T., Yamada, G. and Tanaka, K., 1983, “Natural Frequencies of In-Plane Vibration of Arcs,” Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol. 50, pp.449-452.

(2) Lee, B. K. and Wilson, J. F., 1989, “Free Vibrations of Arches with Variable Curvature,” Journal of Sound and Vibration, Vol. 136, pp.75-89.

(3) Tseng, Y. P., Huang, C. S. and Lin, C. J., 1997, “Dynamic Stiffness Analysis for In-Plane Vibrations of Arches with Variable Curvature,” Journal of Sound and Vibration, Vol. 207, pp.15-31.

(4) Huang, C. S., Nieh, K. Y. and Yang, M. C., 2003, “In-Plane Free Vibration and Stability of Loaded and Shear-Deformable Circular Arches,” International Journal of Solids and Structures, Vol. 40, pp.5865-5886.

(5) Li, W. L., 2000, “Free Vibrations of Beams with General Boundary Conditions,” Journal of Sound and Vibration, Vol. 237, pp.709-725.

(6) Kim, H. K. and Kim, M. S., 2001, “Vibration of Beams with Generally Restrained Boundary Conditions using Fourier Series,” Journal of Sound and Vibration, Vol. 245, pp.771-784.