

변단면률의 변화에 대한 개구부를 갖는 판의 진동해석

Vibration Analysis of Plates with Opening about Variation Ratio

김 일 중¹⁾
Il Jung Kim

Key Words : Tapered ratio(변단면률), Opening(개구부), Vibration(진동)

ABSTRACT

This paper has the objects of deciding dynamic instability regions of thick plates by finite element method and providing kinematic design data for mats and slabs of building structures.

In this paper, dynamic stability analysis of tapered opening thick plate is done by use of Serendipity finite element with 8 nodes considering shearing strain of plate. To verify this finite element method, buckling stress and natural frequencies of thick plate with or without in-plane stress are compared with existing solutions.

The results are as follow that this finite element solutions with 4×4 meshes are shown the error of maximum 0.56% about existing solutions, and obtained dynamic instability graph according with variation of opening positions.

1. 서 론

본 연구는 개구부를 갖는 변단면 판의 안정에 대한 해석으로 판의 지지조건은 4변 단순지지판으로 해석하였다. 개구부의 크기와 위치는 각각 3곳에 작용하는 것으로 고려하여 각 위치에서의 진동수 변화를 파악하였다. 그리고 판의 두께에 대한 진동수의 변화를 알아보기 위하여 판의 두께가 판의 길이에 따라 선형적으로 변화하는 변단면으로 고려하였다. 따라서 본 연구는 기계진동이나 외부 진동 요인에 의해 영향을 받는 판의 진동에 의한 특성을 파악하여 안정성 확보를 위한 설계의 기초자료로 활용하는데 목적이 있다. 1984년 P.A.A. Laura와 R. H. Guterrez⁽³⁾는 Rayleigh-Ritz 법을 이용하여 비균질 지반에 지지된 판의 동적 해석을 행하였으며, 같은 해 J. A. G. Horenberg 와 J. G. M. Kerstens⁽⁴⁾는 Modal Constraint법을 이용하여 판의 동적 해석을 행하였다. P.A.A. Laura⁽³⁾와 K.H.Low^(6,7)는 집중 질량을 받는 판의 진동 특성에 대해 1993년 발표하였다.

2. 본 론

2.1 동적 안정 방정식의 구성

식(1)은 유한요소법을 활용하여 판요소에 대한 강성행렬을 구하고 전체 판에 대해 적용할 고유치 방정식은 다음과 같다.

$$[K_E]\{\delta\} - \sigma [K_G]\{\delta\} = 0 \quad (1)$$

이 때, $|[K_E] - \sigma [K_G]| = 0$ 를 만족하는 가장 작은 σ 가 좌굴응력이 된다.

동적안정문제를 다룰 경우 σ 는 정응력 부분과 동응력 부분의 합으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma = \alpha \sigma_{cr} + \beta \sigma_{cr} \cos \bar{\omega} t = \sigma_0 + \sigma_t \cos \bar{\omega} t \quad (2)$$

여기서 α : 좌굴응력에 대한 정응력비

β : 좌굴응력에 대한 동응력비

$\bar{\omega}$: 동응력의 진동수

σ_{cr} : 정적 좌굴응력

σ_0 : 평균응력

σ_t : 응력진폭

† 정회원, 전북과학대학 건축·토목 계열 부교수

Email: platepro@jbsc.ac.kr

Tel: (063)530-9212, Fax: (063)530-9212

식(2)에서 $\alpha\sigma_{cr}$ 은 정적응력, $\beta\sigma_{cr}\cos\bar{\omega}t$ 는 동적응력 부분이 된다.

식(2)을 식(1)에 대입함으로써 다음 행렬 형태의 Mathieu - Hill 방정식을 얻는다.

$$[K_M]\{\delta\} + \{[K_E] - \alpha\sigma_{cr}[K_{GS}] - \beta\sigma_{cr}[K_{GI}]\cos\bar{\omega}t\}\{\delta\} = 0 \quad (3)$$

여기서

$[K_{GS}]$: 평균응력 σ_0 의 영향을 나타내는 기하강성행렬

$[K_{GI}]$: 주기응력 진폭 σ_t 의 영향을 나타내는 기하강성행렬

식(3)의 Mathieu - Hill 방정식은 주기 $2T(= \frac{4\pi}{\omega})$ 인해

$\delta(t) = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} (a_k \sin \frac{k\bar{\omega}}{2} t + b_k \cos \frac{k\bar{\omega}}{2} t)$ 로 가정할 수 있으므로 이 해를 식(3)에 대입하고 a_k 에 대해 정리하면 다음과 같다.

$k=1$ 일 경우

$$\{[K_E] - \alpha\sigma_{cr}[K_{GS}] - \frac{1}{4}\bar{\omega}^2[K_M]\}a_1 - \frac{1}{2}\beta\sigma_{cr}[K_{GI}]a_3 = 0 \quad (4)$$

$k=3, 5, 7, \dots$ 일 경우

$$\{[K_E] - \alpha\sigma_{cr}[K_{GS}] - \frac{1}{4}\bar{\omega}^2 k^2 [K_M]\}a_k - \frac{1}{2}\beta\sigma_{cr}[K_{GI}](a_{k-2} + a_{k+2}) = 0 \quad (5)$$

b_k 에 관한 항을 정리하면

$k=1$ 일 경우

$$\{[K_E] - \alpha\sigma_{cr}[K_{GS}] - \frac{1}{2}\beta\sigma_{cr}[K_{GI}] - \frac{1}{4}\bar{\omega}^2[K_M]\}b_1 - \frac{1}{2}\beta\sigma_{cr}[K_{GI}]b_3 = 0 \quad (6)$$

$k=3, 5, 7, \dots$ 일 경우

$$\{[K_E] - \alpha\sigma_{cr}[K_{GS}] - \frac{1}{4}k^2\bar{\omega}^2[K_M]\}b_k - \frac{1}{2}\beta\sigma_{cr}[K_{GI}](b_{k-2} + b_{k+2}) = 0 \quad (7)$$

임의의 a_k 와 b_k 에 대해 식(4)~(7)가 만족하려면 차원이 $k \times k$ 인 행렬식이 0이 되어야 한다.

위 $k \times k$ 행렬식을 일차 근사화하면 다음식이 된다.

평균응력과 응력진폭의 영향을 동일하게 취하여 $[K_{GS}] = [K_{GI}] = [K_G]$ 로 하면은 다음과 같다.

$$\{[K_E] - (\alpha \pm \frac{1}{2}\beta)\sigma_{cr}[K_G] - \frac{\bar{\omega}^2}{4}[K_M]\} = 0 \quad (8)$$

식(8)에서 정적응력 계수비 α 와 동적응력계수비 β 값에 따른 판의 진동수비 ($\frac{\bar{\omega}}{\omega} = \frac{\text{면내응력의 진동수}}{\text{판의 고유진동수}}$)를 구하여 동적안정의 영역을 얻을 수 있다.

$$\{[K_E] - \alpha\sigma_{cr}[K_{GS}] \pm \frac{1}{2}\beta\sigma_{cr}[K_{GI}] - \frac{\bar{\omega}^2}{4}[K_M]\} = 0$$

2.2. 해석프로그램 흐름도

프로그램 흐름도에서 TYPE1은 좌굴응력, TYPE2는 고유진동수 계산루트이며, TYPE3는 동적안정영역을 결정하는 루틴이다.

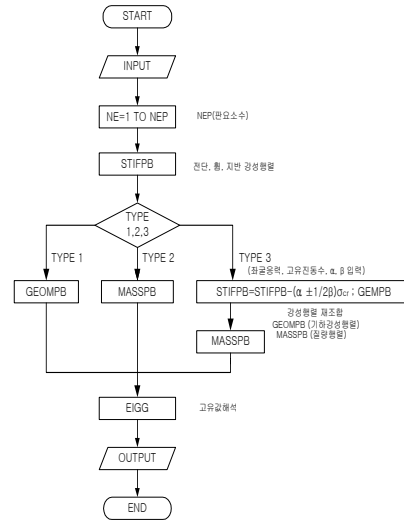


fig 1. flow chart

3. 실행 및 비교분석

3.1 비교분석

유한요소 해석 프로그램을 개발하고 기존 이론해와 비교하여 해석의 정확성을 검토하였다.

table 1. comparison with natural frequency of tapered thick plate ($\lambda^2 = \omega a^2 \sqrt{\rho/D_0}$)

Taper Ratio	Reference ⁽⁵⁾	This Study	Error(%)
0.2	21.59	21.59	0.01
0.4	23.51	23.45	0.19
0.6	25.38	25.29	0.33
0.8	27.23	27.08	0.56

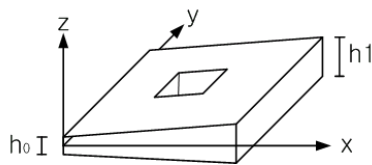
table1.은 지반이 없는 상태에서의 변단면 후판의 Taper Ratio의 변화에 따른 고유진동수를 유한요소 프로그램해와 참고 문헌해와 비교한 것이다. 이 경우 최대 0.56%의 오차를 나타내어 본 연구를 위한 신뢰성을 확인 할 수 있었다.

table2. comparison with natural frequency($\bar{\omega}/\omega$) of tapered thick plate inplane force

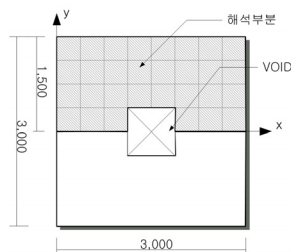
meshes	σ_0/σ_{cr}				
	0	0.2	0.4	0.6	0.8
4×4	1	0.8944	0.7746	0.6324	0.4470
Ref.(8)	1	0.8944	0.7746	0.6325	0.4472

3.2. 해석 예제

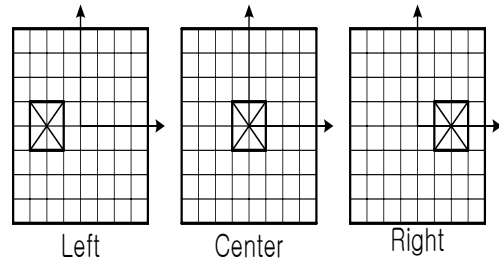
본 연구에서 개발한 프로그램을 이용하여 그림1에서 보는 바와 같이 탄성지반에 지지된 개구부를 갖는 변단면 후판의 동적 안정영역을 결정한다.



(a) the modeling of opening thick plate



(b) the element meshe of plate



(c) opening position of plate

fig2. modeling of tapered thick plates

유한요소법을 적용한 해석을 위한 제원은 다음과 같다.

탄성계수(E) : $2.1 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$

포와송비(ν) : 0.167

판 지지상태 : 4변 단순지지

판의 체적당 질량(ρ) : $2.448 \times 10^{-6} \text{ kg/cm}^3$

판의 크기 : 300cm× 300cm

■ : 동적불안정영역 □ : 동적안정영역

판의 동적안정문제는 좌굴응력과 정응력계수 α , 동응력계수 β 를 적용하고 고유값 문제를 풀므로써 α , β 및 후판의 고유진동수에 대한 비 $\bar{\omega}/\omega_e$ 의 관계를 곡선으로 표시하여 불안정영역의 경계를 나타내게 된다.

fig3~5는 면내응력을 받는 변단면 유공 후판의 동적안정 해석을 한 것으로 그래프내 곡선은 동적안정과 불안정영역의 경계를 나타낸다. 각 그래프에서 5개로 분리된 곡선군은 좌측 수직축으로부터 1차 진동 mode에서 5차 진동 mode를 나타낸 것이다. 판에 면내응력이 가해진 경우 해당되는 변수를 찾아 그래프상의 점의 위치로 후판의 안정상태 혹은 불안정상태를 규명할 수 있다.

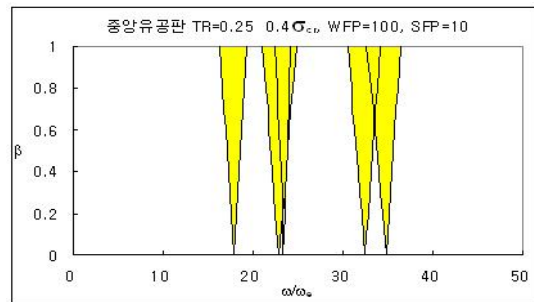


fig3. Dynamic stability of center opening plate

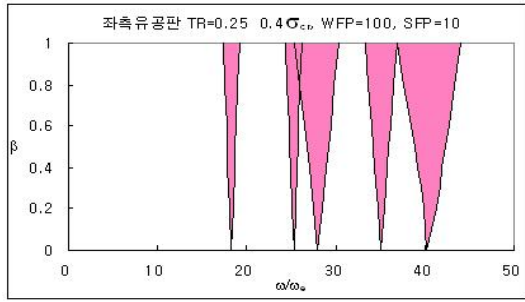


fig4. Dynamic stability of left opening plate

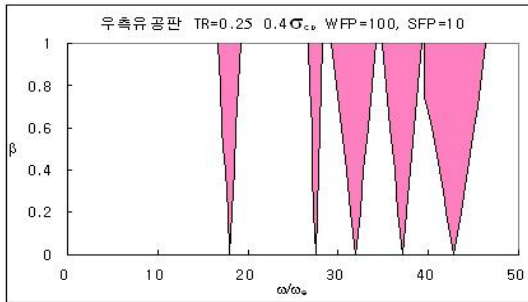


fig5. Dynamic stability of right opening plate

fig3~5는 변단면률이 0.25, 면내응력은 $0.4\sigma_{cr}$,

Winkler 지반 파라미터는 100, 전단 지반 파라미터는 10인 변단면 후판에 개구부의 위치 변화에 따라 각각의 동적안정영역을 표시하였다.

fig3.은 개구부가 정중앙에 위치한 경우이며, fig4.는 개구부가 좌측에 위치한 경우로 개구부가 변단면판의 두께의 얇은 부분에 위치하였다. 개구부의 위치가 중앙에서 판의 두께가 얇은 부위로 이동함에 따라 각 mode의 불안정영역이 세로축에서 멀어졌으며, 각 mode의 불안정영역 또한 확대됨을 볼 수 있다.

fig5.는 개구부가 우측에 위치한 경우로 개구부가 변단면판의 두께가 두꺼운 곳에 위치하였다. 개구부가 중앙에 위치한 경우에 비해 개구부가 변단면판의 두께가 두꺼운 부분에 위치한 경우 각 mode의 불안정영역은 세로축에서 멀어졌으며, 각 mode의 불안정영역이 확대되었고 2차와3차, 4차와 5차 mode 사이의 간격이 더 벌어져 불안정 영역이 확대됨을 볼 수 있다.

4. 결 론

본 연구에서는 탄성지반 위에 놓인 개구부를 갖는 변단면 후판의 개구부 위치 변화에 따라 동적 안정 해석을 통해 변단면판의 불안정영역을 결정하

였다.

그 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 변단면 후판의 좌굴응력, Pasternak 지반에 지지된 평판의 고유진동수, 면내응력이 가해진 경우 고유진동수를 구하여 기존해와 비교해 본 결과 각각 0.56%, 0.25%, 0.05%의 적은 오차를 보여 본 해석을 위한 프로그램의 신뢰성을 얻을 수 있었다.

2. 변단면판에 있는 개구부의 위치가 중앙에서 좌측이나 우측으로 이동할 경우 각 진동 mode는 세로축에서 멀어지고, 각 mode의 불안정영역이 확대됨을 알 수 있다.

참 고 문 헌

- (1) D. Young, "vibration of rectangular plates by the Rayleigh-Ritz method: J. appl. Mech. 17 pp. 448-453, 1950.
- (2) G. B. Warburton, "The vibration of rectangular plates ",Proc . Institute of Mechanical Engineers, pp.371-384, 1953.
- (3) A. W. Leissa, "vibration of plates" NASA SP-160,1969.
- (4) Differential quadrature and Rayleigh-Ritz method to determine The fundamental frequencies of simply supported rectangular plates with linearly varying thickness. J. sound and vibration pp.103-122, 1996
- (5) Vibration of tapered Mindlin plates terms of statics Timoshenko beam functions. J. sound and vibration pp. 693-709, 2003.
- (6) 이병구(1994). "전단층을 갖는 탄성지반위에 놓인 보의 자유진동해석,"한국전산구조공학회논문집 6(3).
- (7) 이용수, 김일중, 오숙경, 김성용(1997). "탄성보에 의해 지지된 등변분포 면내력을 받는 보강판의 좌굴 해석," 대한건축학회 춘계학술발표회 논문집 17(1).
- (8) 이용수, 김일중, 오숙경(2003). "비균질 Pasternak 지반 위에 놓인 면내력을 받는 후판의 진동해석," 한국강구조학회 논문집.
- (9) Hiratoki Matsunaga, "Vibration and Stability of thick plates in elastic foundations", J. Engineering Mechanics, pp27-34, 2004.
- (10) 김일중(2006), "탄성지반에 놓인 집중질량을 갖는 변단면 후판의 진동해석",한국소음진동공학회 논문집, 제16권 제6호