# 확률영역에서 시스템 출력만을 이용한 시스템 규명

## System Identification in Stochastic Domain using Output only

박성만†·여운경*·이동희*·채교순*·허 훈**

Key Words : System Identification(시스템 규명), Stochastic Domain(확률영역), F-P-K (Fokker-Planck-Kolmogorov) equation (F-P-K 방정식)

ABSTRACT

일반적으로 알려진 시스템 규명은 시스템의 입/출력 관계를 이용하여 시스템을 규명하고 그 파라미터를 구하고 있다. 그러나 많은 경우에 시스템이 불규칙한 외란에 노출된 경우에는 알려져 있는 시스템의 규명방법이 없다. 이에 그 특성이 알려져 있지 않은 미지의 시스템이 미지의 불규칙한 외란에 노출되었을 때에 그 시스템을 규명하는 방법을 연구 개발하였다. 여기서는 시스템의 출력이 정상적(Stationary)일 때만 이를 확률영역에서 고려하였다. 확률 영역에서 시스템의 응답은 시스템 파라미터의 영향을 크게 받는바 시스템모멘트응답을 시스템 파라미터와의 관계로 구성할 수 있다. 이로부터 시스템의 출력만을 이용하여 시스템 파라미터의 규명이 가능하게 되었다. 본 연구에서는 실 물리영역에서의 출력을 확률영역에서의 모멘트 응답으로 변환시킨 후 역변환 개념으로 미지의 불규칙 외란에 노출되어진 미지의 2차 선형 확률시스템의 파라메타를 성공적으로 규명하였다.

## 기 호 설 명

$a_i(X,t)$ 부유계수
$b_{ij}(X,t)$ 확산계수
$A^{-1}(\underline{m}\,,\,\dot{\underline{m}})$ 역변환함수

## 1. 서 론

블랙 박스 타입의 시스템 규명에는 시간영역에서 입/출력 데이터로부터 두 데이터의 상관관계를 확인하여 시스템을 규명을 하는 것이 일반적인 시스템 규명 방법이다. 그러나 현재 많은 시스템의 경우는 불규칙한 교란에 노출되어져 있다. 이러한 불규칙한 외란이 시스템에 입력으로 작용한다면 시간과 물리영역에서의 입력을 해석을 할 때보다 확률영역에서 불규칙한 외란에 대한 해석이 PSD(Power Spectral Density) 상수로 나타내어지므로 더 용이하게 외란의 영향을 효율적으로 사용할 수 있다.

이러한 점에서 본 논문에서는 아래의 개념도의 과정에 의하여 시스템 규명을 하게 된다. 먼저 시스템의 출력을 F-P-K (Fokker-Planck- Kolmogorov) 방정식을 이용하여 모멘트응답 시스템으로 변환을 한다. 이후에 모멘트 응답시스템을 역변환 하여 시스템의 파라미터를 규명하는 것이다.

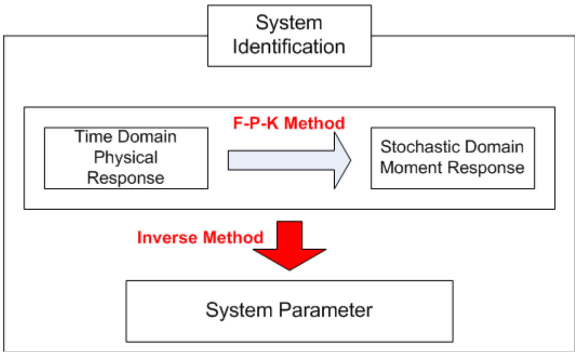


그림 1 시스템 규명 개념도.

† 박성만, 고려대학교 제어계측공학과
E-mail : yamjun99@korea.ac.kr
Tel : (02) 3290-3995, Fax : (02) 929-7808

* 고려대학교 대학원 제어계측공학과

** 고려대학교 제어계측공학과 교수

본 논문에서는 수치 모의 실험을 통하여 이상을 확인 하였다.

## 2. 시스템 규명 기법

### 2.1 확률영역에서의 시스템 모델링

먼저 알려져 있지 않은 파라메타로 구성된 2차선형계가 미지의 외란에 노출되었을 때에 그 출력만을 사용하여 시스템의 파라메타를 규명하는 방법을 연구하였다. 이에 다음의 식[2-1]와 같은 미지의 시스템파라메타 $\omega_{n,}\ \zeta$를 갖는 미분방정식시스템을 고려하였다.

$$\ddot{x}+2\zeta\omega_n\dot{x}+\omega_n^2 x=f(t) \qquad [2-1]$$

여기서 불규칙한 외란에-노출된 시스템의 파라미터 값 $\omega_{n,}\ \zeta$을 구하고자 한다.

식 [2-1]은 다음과 같이 F-P-K방법에 의해서 확률영역에서의 모멘트 방정식으로 변환 된다.

다음과 같은 좌표변환을 이용하여 실 물리영역에서의 지배 방정식은 Ito의 미분방정식의 형태로 구할 수 있겠다. (1)

$$x = X_1 \qquad \dot{x} = X_2$$

$$\begin{aligned} &\dot{X}_1 = d\frac{X_1}{dt} \\ &\rightarrow dX_1 = \dot{X}_1\,dt = X_2\,dt \\ &\dot{X}_2 = d\frac{X_2}{dt} \\ &\rightarrow dX_2 = \left\{-\omega_n^2 X_1 - 2\zeta\omega_n X_2 + f(t)\right\}dt \end{aligned} \qquad [2-2]$$

F-P-K 과정은 내·외부 및 상호 영향적인 불규칙 교란에 노출되는 계의 확률밀도 함수의 거동을 해석하는 방법 중의 하나이다. 이러한 F-P-K 방정식의 해는 계 응답의 확률적인 거동을 제공해준다. F-P-K 방정식을 유도하는데 는 두 가지의 기본적인 가정이 필요하다. (1)

첫째, 교란되는 움직임이 불규칙 변동의 1차 미소값의 중첩으로 연속적인 궤적의 형태로 표현될 수 있도록 불규칙 입력은 항상 충분히 작아야한다. 두 번째로 랜덤과정은 과거에 영향을 받지 않는 마코프 과정이어야 한다. 부유(1차증분모멘트)계수와 확산(2차증분모멘트)계수로 구성된 일반적인 형태의 F-P-K 방정식은 식[2-3]과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}p(\boldsymbol{X},t) = &-\sum_{i=1}^{n} a_i(\boldsymbol{X},t)\frac{\partial}{\partial X_i}p(\boldsymbol{X},t) \\ &+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(\boldsymbol{X},t)\frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_j}p(\boldsymbol{X},t) \end{aligned} \qquad [2-3]$$

$$\begin{aligned} a_i(\boldsymbol{X},t) &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}E[x_i(t+\Delta t)-x_i(t)] \\ b_{ij}(\boldsymbol{X},t) &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}E[x_i(t+\Delta t)-x_i(t)\} \\ &\qquad \{x_j(t+\Delta t)-x_j(t)] \end{aligned} \qquad [2-4]$$

F-P-K 방정식은 정상 백색잡음 형태의 불규칙 가진의 경우에만 사용할 수 있으며, 방정식의 해는 계 응답의 확률론적인 거동을 나타내어준다. (1)

위의 과정을 통한 시스템 출력을 모멘트 응답으로 변환을 시킬 수 있다.

### 2.2 확률영역에서의 시스템 모멘트 응답

F-P-K 방정식을 통한 모멘트 응답으로 변환을 시키면 확률 영역에서의 모멘트응답의 시스템 행렬 [2-5]로 표현이 된다.

$$A_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\zeta\omega_n-\omega_n^2 & 1 & \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\omega_n^2 & 0 & -4\zeta\omega_n \end{bmatrix} \qquad [2-5]$$

실 물리영역에서의 불규칙 외란과 달리 확률영역에서의 불규칙 외란은 PSD (Power Spectral Density)가 상수로 나타난다. 입력과 출력사이의 상관관계를 사용하는 일반적인 시스템 규명방법과는 달리 이러한 특성을 이용하여 시스템의 모멘트 출력만을 사용한 역변환 기법을 이용을 할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \dot{m}_{11} \\ \dot{m}_{20} \\ \dot{m}_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\zeta\omega_n-\omega_n^2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2\omega_n^2 & 0 & -4\zeta\omega_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{20} \\ m_{02} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ D_z \end{bmatrix} \qquad [2-6]$$

시스템 규명을 하기 위하여 우리는 시스템 모멘트응

답에서 1차모멘트를 제외한 2차모멘트만을 이용한 다음의 식[2-6]과같이 구성된 모멘트시스템을 사용하여 역변환 기법을 사용된다.

### 2.3 확률영역에서 시스템 규명

확률영역에서의 시스템 규명을 하기 위해서 다음과 같은 역변환 기법을 사용하며 기존의 규명 방법과 달리 용이하게 시스템 출력의 모멘트 응답으로 역변환 시켜서 할 수 있다.

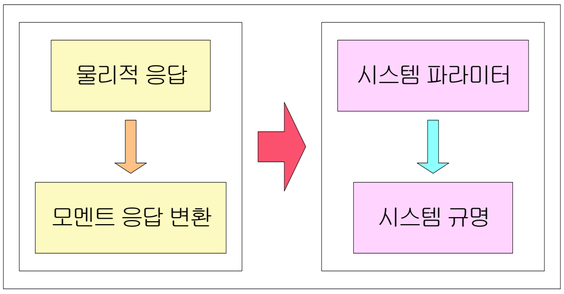


그림 2. 확률영역에서 시스템 규명 개략도

즉 식 [2-6]을 식 [2-7]과 같은 역변환 기법을 거쳐서 식 [2-8]의 시스템 파라미터를 규명할 수 있다.

$$[\omega_n, \zeta] = A^{-1}(\underline{m}\ ,\ \underline{\dot{m}}) \qquad [2\text{-}7]$$

$$\omega_n = \sqrt{-\frac{\dot{m}_{02}m_{11} - 2\dot{m}_{11}m_{02} + 2m_{02}^2}{2(m_{11}^2 - m_{20}m_{02})}}$$
$$\zeta = -\frac{2\dot{m}_{11}m_{11} - \dot{m}_{02}m_{20} + 2m_{11}m_{02}}{4\omega_n(m_{11}^2 - m_{20}m_{02})} \qquad [2\text{-}8]$$

## 3. 수치 모의실험

제안된 시스템 규명의 성능을 확인하기 위하여 일반적인 m, c, k의 시스템을 가정하여 수치 모의실험을 수행하였다.

### 3.1 수치 모의실험

확률 영역에서의 시스템 규명을 하기 위하여 일반적인 m, c, k를 $\omega_n$과 $\zeta$의 시스템 파라미터로 변환하여 다음의 조건을 가지는 시스템을 수치 모의실험으로 확인하였다.

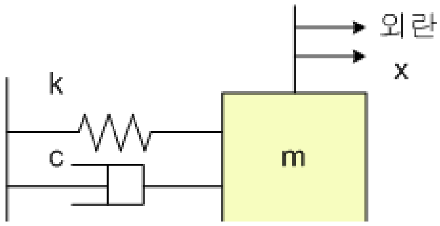


그림 3. 수치 모의실험 모델

| Parameter | Value |
|---|---|
| Natural Frequency $\omega_n$ | 4 |
| Damping Ratio Coefficient $\zeta$ | 0.3 |
| Power Spectral Density $D_z$ | 0.01 |

표 1. 모델의 시스템 파라메타

위와 같은 파라미터를 가지는 시스템의 불규칙 외란을 Power Spectral Density $D_z$가 0.01의 크기를 가진 입력을 줄 경우 시스템 출력을 F-P-K 방정식을 이용하여 모멘트 응답으로 변환하며 다음과 같은 모멘트 응답이 나온다.

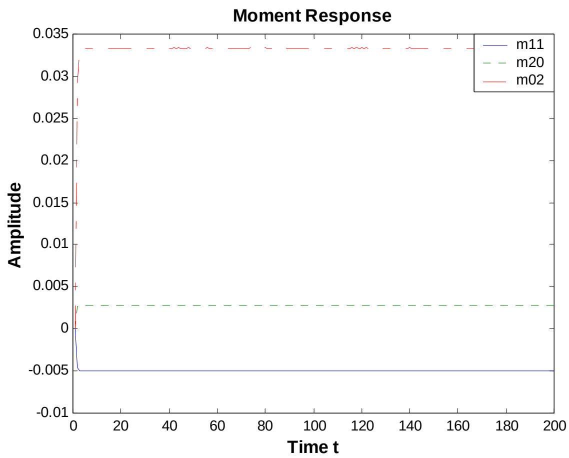


그림 4. 모멘트 응답

모멘트 응답을 식 [2-7]의 역변환 기법을 사용하여 다음과 같이 만족할 만하게 시스템의 고유 파라미터를 얻을 수 있다. 그림 5는 시스템 파라미터 가운데 고유 진동수$\omega_{n,}$을 나타내는 것이다 확률계의 모멘트 응답이 일정 범위에 수렴을 하는 정상(Stationary) 응답이 되는 구간에서 역변환이 가능한바 이를 사용하여 얻어지는 시스템의 파라메타$\omega_{n,}$ 역시 정상적(Stationary)하게 일정한 값 4근처에서 평균적으로 수

렴하며 fluctuating하는 것을 그림4.에서 볼 수가 있다.

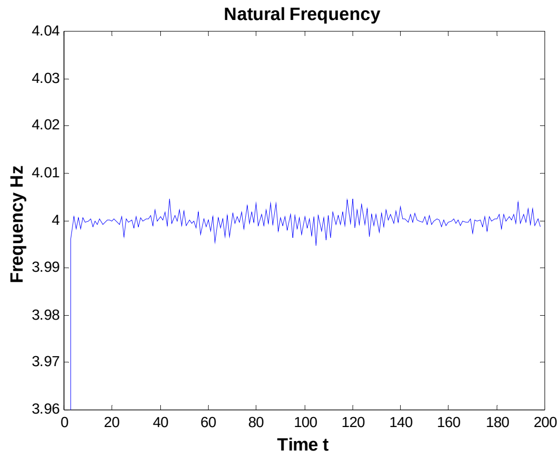


그림 5. Natural Frequency $\omega_n$,

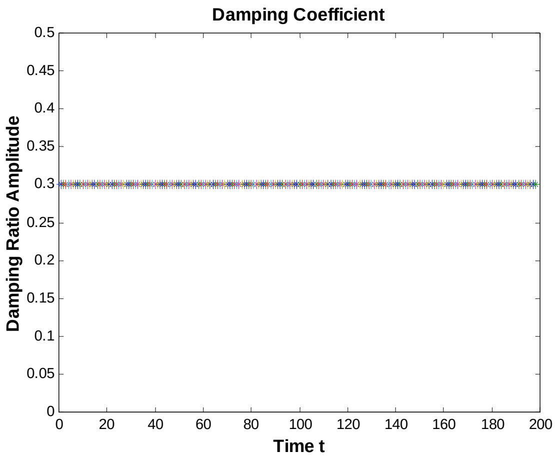


그림 6. Damping Ratio $\zeta$

그림 5는 시스템의 감쇠비 $\zeta$ 가 고유 진동수 $\omega_n$,와는 달리 초기부터 일정한 범위 내에서 fluctuating하면서 0.3의 평균값을 유지하는 것을 확인 할 수 있다.

## 4. 결론

본 연구에서는 불규칙한 외란에 노출된 시스템을 규명하기 위하여 기존의 시스템의 입/출력을 상관관계를 사용하는 일반적인 방법이 아닌 확률영역에서의 시스템 출력만을 사용하여 시스템 파라메타를 규명하는 새로운 방법을 제안하였다.

미지의 시스템파라메타를 갖는 2차 선형시스템이 미지의 크기를 갖는 불규칙한 랜덤가진을 받고 또 시스템이 정상응답을 하는 경우에 시스템 파라메타의 규명이 시스템의 모멘트 출력만을 이용하여 가능함을 보였다.

이는 확률영역에서의 모멘트 응답이 정상응답을 나타낼 때에 역변환 기법을 통하여 시스템 파라미터역시 정상적으로 시스템의 원래 값에 수렴하는 것을 수치모의실험을 통하여 확인을 할 수가 있었다.

그러나 시스템 출력을 모멘트 응답으로 나타나면서 모멘트 응답이 일정한 값으로 수렴할 때에 시스템 파라미터의 정상적인 값으로의 형성에 약간의 시간지연은 있는 것을 문제가 있다.

추가적으로는 시간 지연의 단축문제와 동시에 시스템 Order를 증가된 경우에 대하여 연구와 실험을 수행하고 있다.

## 후 기

## 참 고 문 헌


(1) Hoon Heo, Yun Hyun Cho, Dae Jung Kim, 2003, "Stochastic control of flexible beam in random flutter", Journal of sound and vibration ,Vol 267, pp. 335~354

(2) 이종복, 김홍윤, 안준영, 허 훈, 2005, “확률제어기법을 이용한 진동계의 모델추종 이중제어기 설계”, 한국소음진동공학회 춘계학술대회 논문집, pp. 525~528.

(3) 허훈, 조윤현, 김대중, 2003, “확률 영역에서의 제어기시스템 설계방법”, 특허 제 0327508호

(4) C. Minas, D.J. Inman,, 1990, "Matching Finite Element Models to Modal Data", Transactions of the ASME, J. of Vibration of Acoustics 112(1), pp. 84~92

(5) 정근용, 오용설, 민성준, 오경석, 허 훈, 2004, “미지의 불규칙 외란에 노출된 유연계의 진동제어 및 불규칙 외란의 규명”, 한국소음진동공학회 춘계학술대회논문집, pp. 228~232

(6) 이종복, 조윤현, 장종수, 허 훈, 2005, “다양한 불규칙 잡음하에서 이중제어기 설계”, 대한기계학회 춘계학술대회, pp. 1225~1229