韓國數學敎育學會
<全國數學敎育硏究大會 프로시딩>
제 37회. 2006. 10. 163-172

Korea Soc. Math. Ed.
Proceedings of National Meeting of Math. Ed.
The 37th. Oct. 2006. 163-172

「미분」 단원에서의 산술-기하부등식을 활용한 문제 해결 탐구

김 대 의 (경남체육고등학교)
정 의 창 (신반정보고등학교)

1. 서 론

일반적으로 대부분의 중등 교육과정상의 수학 문제들은 문제의 조건 즉, 문제로부터 주어지는 정보의 수와 문제의 해 즉, 문제가 요구하는 정보량이 일치하는 경우가 대부분이고 본질적으로 이러한 문제는 연립방정식의 풀이에 귀착되는 경우가 많다. 그런데 문제로부터 주어지는 조건(정보)의 수는 적고 문제가 요구하는 해(정보량)가 많은 경우에 사용할 수 있는 문제해결전략은 주어진 상황에서 항등식을 찾거나 부등식의 등호 조건을 생각할 수 있다.

본 연구에서는 주어진 문제를 푸는 데 필요한 정보가 비교적 적고 문제에서 요구하는 정보가 큰 경우에 부등식의 등호 조건을 활용하여 정보의 격차를 극복하는 한 방법으로 산술-기하부등식에 대하여 탐구하고 등호 조건을 적용하여 창의적으로 문제를 해결한다.

본 연구에서는 산술-기하부등식의 정의와 그에 따른 정리들을 간단하게 소개하고 중등교육과정 「수학10-나」에 처음으로 소개되는 산술-기하부등식의 관계를 문제해결전략으로 하여 다양한 문제를 풀어보고, 중등교육과정 「미분과 적분」의 미분 단원에 소개되는 여러 문제들을 미분을 이용해서 푸는 방법과 수학적 패턴의 한 양식으로 접근한 산술-기하부등식의 관계를 활용하여 문제를 해결할 수 있음을 알아본다.

일반적으로 어떤 함수의 최대·최소값을 구하는 문제를 자연스럽게 미분을 이용해서 접근할 수 있는데, 이것은 미분까지의 배경지식이 있는 경우에는 아주 자연스러운 접근 방법이라 할 수 있다. 그래서 대다수의 교사나 학생은 미분의 배경지식을 이용하여 증가·감소와 극대·극소를 증감표를 작성하여 파악하고 최대·최소값을 구한다는 것을 일반적인 풀이방법으로 알고 있다. 그러나 이러한 문제해결전략은 문제해결에 대한 사고의 폭을 현저히 축소시키는 것이다. 문제의 해결은 항상 주어진 문제를 독립적으로 두고 분석을 통해 해결과정을 찾아야 할 것이다. 그러면 그 문제에 대한 다양한 풀이도 얻을 수 있고 사고의 다양성 또한 획득할 수 있을 것이다. 이것이 곧 문제해결이 갖는 가장 큰 의미일 것이다.

또한, 미분을 이용한 문제해결은 수많은 수학적 배경지식을 요구하지만 산술-기하부등식을 이용한 문제해결은 수학적 배경지식이 깊지 않더라도 활용할 수 있을 뿐만 아니라 창의적인 식의 변형, 패턴의 인식이라는 관점에서 수학 교수학적 의미를 가진다.

2. 산술-기하부등식

일반적으로, $a_1,\cdots,a_n$을 양수라 하자. 이때, 수

$$A=\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$$

를 이들의 **산술평균**이라 하고, 수

$$G=\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}$$

을 **기하평균**이라 한다. 1821년에 Cauchy는 부등식 $A \geqq G$을 증명하였다. Cauchy는 증명을 위해 수학적 귀납법을 사용했지만, 평범한 방법은 아니었다. 우선, 만약 명제가 $n=2^m$에 대해 성립한다면, 명제가 $n=2^{m+1}$에 대해 성립한다는 것을 증명하였다. 그리고 나서, 만약 명제가 n에 대해 성립한다면, 명제가 $n-1$에 대해 성립한다는 것을 증명하였다.[1]

정리1 . $a_1 \geq 0,\ a_2 \geq 0,\ a_3 \geq 0$일 때, $\dfrac{a_1+a_2+a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1a_2a_3}$.

정리2. $a_i \geq 0(i = 1, 2, 3, 4)$일 때, $\dfrac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} \geq \sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}$

정리3. 임의의 양수 $a_1,\ a_2,\ \cdots, a_n$에 대해, 다음 부등식이 $n=k$일 때 성립하면, 이 부등식은 $n=2k$일 때도 성립한다는 것을 증명하여라.

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

정리4. 임의의 양수 $a_1,\ a_2,\ \cdots, a_n$에 대해, 다음 부등식을 증명하여라.

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

(증명) 만약, n이 2의 거듭제곱 수라면, 앞에서 증명한 바와 같이 그러한 n에 대해서 부등식은 성립한다.

만약, n이 2의 거듭제곱이 아니라면, 우리는 n에 q를 더해, $n+q$가 2의 거듭제곱이 되게 할 수 있다. 가령, $n+q=2^l$이라 하자. 앞에서 증명한 바와 같이, $n+q$에 대해, 주어진 부등식이 성립한다. 즉, 임의의 양수 $a_1,\ a_2,\cdots, a_{n+q}$에 대해,

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots+a_{n+q}}{n+q} \geq \sqrt[n+q]{a_1a_2\cdots a_n\cdots a_{n+q}} \quad \cdots ①$$

1) Prasolov V.V. 지음, 한인기 옮김. 대수 · · 기초해석 · 조합의 탐구문제들(상)(2006), p150, 서울:(주)교우사.

$a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots, a_{n+q}$는 임의의 선택이므로, 다음과 같이 놓을 수 있다.

$$a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = a_{n+q} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

이처럼, a_{n+1}, a_{n+2}, $\cdots$, a_{n+q}을 잡으면, 부등식 ①은 다음과 같다.

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \cdot q}{n+q} \geq \sqrt[n+q]{a_1 a_2 \cdots a_n \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^q}$$

이로부터,

$$\frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)n + (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)q}{n(n+q)} \geq \sqrt[n+q]{a_1 a_2 \cdots a_n \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^q}$$

그래서, $\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n+q]{a_1 a_2 \cdots a_n \left(\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^q}$

마지막 부등식의 양변을 $n+q$ 제곱을 하면,

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^{n+q} \geq a_1 a_2 \cdots a_n \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^q$$

이로부터, $\left(\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^n \geq a_1 a_2 \cdots a_n$

그러므로, $\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$

위 부등식의 등식이 성립할 필요충분조건은 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$이다. ▣

3. 문제해결전략으로 산술-기하부등식을 이용한 문제들

문제2. x, y, z가 양이고 $x+y+z=6$일 때 xyz의 최대값을 구하여라.

(풀이) $\dfrac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$에 $x+y+z=6$을 대입하면 $\dfrac{6}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$

양변을 세제곱하면, $xyz \leq 8$이므로 xyz의 최대값은 8이다.

또, 이 때의 x, y, z의 값은 등호가 성립하는 경우이므로 $x=y=z=2$이다. ▣

미지수는 세 개이고 구체적인 정보는 $x+y+z=6$ 하나뿐이지만 x, y, z가 양이라는 비구체적인 정보를 이용하여 $\dfrac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.

문제4. 다음은 a, b, c가 양수일 때, $\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{c}\right)\left(c+\dfrac{9}{c}\right)$의 최소값은?

(풀이) $a+\dfrac{1}{b}\geq 2\sqrt{\dfrac{a}{b}}$, $b+\dfrac{4}{c}\geq 4\sqrt{\dfrac{b}{c}}$,$c+\dfrac{9}{c}\geq 6\sqrt{\dfrac{c}{a}}$

$$\therefore \left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{c}\right)\left(c+\frac{9}{c}\right)\geq 2\cdot 4\cdot 6\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}}=48$$

이 때, 등호는 $ab=1, bc=4, ca=9$일 때, 성립한다. ▣

a,b,c가 양수라는 것 외에는 구체적인 조건의 제시가 없다. 산술-기하부등식의 관계를 이용하면 아주 간단하지만 다른 방법으로 해결한다는 것은 쉽지 않다.

문제6. 방정식 $3x^3+ax^2+bx-2=0$의 세 근 α,β,γ에 대하여 $\alpha+\dfrac{\beta}{3}+\dfrac{\gamma}{6}=1$이 성립할 때, α,β,γ를 각각 구하시오. (단, α,β,γ는 모두 양수이다).

(풀이) $\alpha+\dfrac{\beta}{3}+\dfrac{\gamma}{6}\geq 3\cdot\sqrt[3]{\dfrac{\alpha\beta\gamma}{18}}=3\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{27}}=1$

이므로 산술-기하평균 부등식의 등호 조건으로 부터 $\alpha=\dfrac{\beta}{3}=\dfrac{\gamma}{6}$이 성립하고

$$\therefore\ \alpha=\frac{1}{3}, \beta=1, \gamma=2$$

이다. ▣

먼저 이 문제를 풀기 전에 문제를 분석해 보면 미지수 α,β,γ에 대하여 주어진 '구체적 정보'는 두 개 뿐이다. 즉,

$$\alpha+\frac{\beta}{3}+\frac{\gamma}{6}=1,\quad \alpha\beta\gamma=\frac{2}{3}.$$

아울러 '비 구체적 정보'로서 $\alpha,\beta,\gamma>0$가 주어져 있다. 이 경우는 세 수의 합과 곱이 주어져 있는 형태이고 $\alpha,\beta,\gamma>0$이므로 산술-기하평균의 관계를 생각해 볼 수 있다.

문제8. $0\leq\theta\leq 2\pi$일 때, $\dfrac{1}{3+4\sin^2\theta}+\dfrac{1}{3+4\cos^2\theta}$의 최소값을 구하여라.

(풀이) $3+4\sin^2\theta+3+4\cos^2\theta=6+4(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=10$이므로 a,b가 양수일 때, 산술평균-조화평균 부등식에 의하여

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 2^2=4$$

가 성립하므로

$$\left(\frac{1}{3+4\sin^2\theta}+\frac{1}{3+4\cos^2\theta}\right)(3+4\sin^2\theta+3+4\cos^2\theta)\geq 4$$

이다. 따라서 구하는 최소값은 $\dfrac{2}{5}$이다. ▣

이 문제의 경우에 두 항의 분모의 합이 10으로서 일정하다는 정보를 적극적으로 활용하여 산술-기하부등식을 이용하여 문제를 해결한다. 일반적으로 이 문제를 해결하는 방법으로

$\frac{1}{3+4\sin^2\theta}+\frac{1}{3+4\cos^2\theta}=f(\theta)$라고 하면

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \frac{1}{3+2(1-\cos 2\theta)}+\frac{1}{3+2(1+\cos 2\theta)} \\ &= \frac{1}{5-\cos 2\theta}+\frac{1}{5+\cos 2\theta} \\ &= \frac{10}{25-4\cos^2 2\theta} \end{aligned}$$

$f(\theta)$는 분모가 최대일 때 최소값을 가지므로 $\cos 2\theta=0$일 때 최소값은 $\frac{10}{25}=\frac{2}{5}$이다.

4. [미분]단원에 소개된 문제를 산술-기하부등식을 활용한 문제 해결

문제3. $x>0$일 때, 다음 분수식의 최소값을 구하여라.

$$y=x+\frac{1}{x}+\frac{4x}{x^2+1}$$

(풀이1) $y=x+\frac{1}{x}+\frac{4x}{x^2+1}$에서

$$\begin{aligned} y' &= 1-\frac{1}{x^2}+\frac{4(x^2+1)-4x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{x^2-1}{x^2}+\frac{-4(x^2-1)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{(x^2-1)^3}{x^2(x^2+1)^2}=\frac{(x+1)^3(x-1)^3}{x^2(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

$x>0$에서 $x=1$일 때 $y'=0$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$+\infty$
y'		+	0	+	
y	$+\infty$	↘	4(극소)	↗	$+\infty$

위의 증감표에 의하여 최소값은 4이다. ▣

(풀이2) $y=\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{4x}{x^2+1}=\frac{x^2+1}{x}+\frac{4x}{x^2+1}$ 에서 $\frac{x^2+1}{x}=t$ 로 놓으면 $t\geq 2$이고,

$$y=t+\frac{4}{t}\geq 2\sqrt{t\cdot\frac{4}{t}}=4$$

(이 때 y를 최소로 되게 하는 t의 값은 $t=2$이다.) ▣

문제4. 둘레가 80 cm인 부채꼴에서 그 넓이가 최대일 때, 반지름 및 최대의 넓이를 구하여라.

(풀이1) 반지름의 길이를 r, 넓이를 S라 하면, 호의 길이는 $80-2r$이므로

$$S=\frac{1}{2}r(80-2r)=\frac{1}{4}2r(80-2r).$$
$$=-r^2+40r=-(r-20)^2+400 \leqq 400$$

따라서, $r=20$일 때, S의 최대값은 400이다. ▣

(풀이2) $S=\frac{1}{2}r(80-2r)=\frac{1}{4}2r(80-2r)$이고, $2r$와 $80-2r$의 합은 항상 80으로 일정하다. 또한, r은 반지름이고 $80-2r$은 호의 길이이므로 $2r>0$와 $80-2r>0$이다.

그러므로 산술-기하 부등식에 의하여

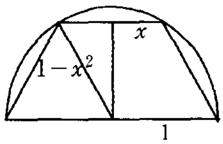
$$2\sqrt{2r(80-2r)} \leqq 2r+(80-2r)=80$$
$$r(80-2r) \leqq 800$$

이므로 $S=\frac{1}{2}r(80-2r)=400$이다.

따라서, 최대값은 400이다.(등호는 $2r=80-2r$ 즉, $r=20$일 때) ▣

문제7. 반지름의 길이가 1인 반원의 지름을 밑변으로 하고 그 반원에 내접하는 사다리꼴의 넓이의 최대값을 구하여라.

(풀이1) 오른쪽 그림에서 사다리꼴의 넓이를 $f(x)$라고 하면



$$f(x)=(1+x)\sqrt{1-x^2} \qquad (\text{단, } 0<x<1)$$
$$f'(x)=\frac{-2x^2-x+1}{\sqrt{1-x^2}}\text{이므로}$$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		+	0	+	
$f(x)$		↗	극대	↘	

$f(x)$는 $x=\frac{1}{2}$에서 극대이고 최대값을 가지므로 최대값은 $f(\frac{1}{2})=\frac{3\sqrt{3}}{4}$이다. ▣

(풀이2) $f(x)=(1+x)\sqrt{1-x^2} \qquad (\text{단, } 0<x<1)$

$$=\sqrt{(1+x)^3(1-x)}$$

이므로 제곱하면,

$$(1+x)^3(1-x)=27(\frac{1+x}{3})^3(1-x)$$

$$\leqq 27\left(\frac{\frac{1+x}{3}+\frac{1+x}{3}+\frac{1+x}{3}+1-x}{4}\right)^4$$
$$=27\times\left(\frac{1}{2}\right)^4$$

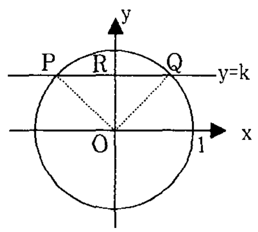
이므로 $f(x)$의 최소값은 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ (등호는 $\frac{1+x}{3}=1-x$ 즉, $x=\frac{1}{2}$) ▣

문제11. 원 $x^2+y^2=1$과 직선 $y=k$ $(0<k<1)$ 가 서로 다른 두 점 P, Q에서 만난다. 단, O는 원점을 나타낸다. [수학의 정석-수학Ⅱ, 홍성대, 성지출판(주),p133]

(1) △OPQ의 넓이 S의 최대값과 이 때의 k의 값을 구하여라.

(2) △OPQ를 y축 둘레로 회전시켜 생기는 입체의 부피 V의 최대값과 이 때 k의 값을 구하여라.

(풀이1) (1) $P(-\sqrt{1-k^2},k)$, $R(0,k)$라 하면,



$S=\frac{1}{2}(2PR)\cdot OR=k\sqrt{1-k^2}$

$\therefore\ S^2=k^2(1-k^2)$

$\therefore\ \frac{d}{dk}(S^2)=2k(1-k^2)+k^2(-2k)=-k(2k^2-1)$

$0<k<1$에서 증감을 조사하면 $k=\frac{1}{\sqrt{2}}$일 때 S^2은 최대하고 이 때 S도 최대이다.

따라서, $k=\frac{1}{\sqrt{2}}$일 때 최대값 $\frac{1}{2}$

(2) $V=\frac{1}{3}\pi\cdot PR^2\cdot OR=\frac{\pi}{3}k(1-k^2)$

$\therefore\ \frac{d}{dk}V=\frac{\pi}{3}(1-3k^2)$

$0<k<1$에서 증감을 조사하면 $k=\frac{1}{\sqrt{3}}$일 때 V는 최대이고 최대값 $\frac{2\sqrt{3}}{27}\pi$ ▣

(풀이2) (1)$S=\frac{1}{2}(2PR)\cdot OR=k\sqrt{1-k^2}=\sqrt{k^2(1-k^2)}$ (단,$0<k<1$)에서 k^2과 $1-k^2$의 합이 일정하므로 산술평균-기하평균 부등식에 의하여

$$\frac{k^2+(1-k^2)}{2}\geqq\sqrt{k^2(1-k^2)}$$
$$\frac{1}{2}\geqq\sqrt{k^2(1-k^2)}=S$$

이고 등호는 $k^2=1-k^2$ 즉, $k=\frac{1}{\sqrt{2}}(\because\ 0<k<1)$일 때이므로

따라서, $k=\frac{1}{\sqrt{2}}$일 때 최대값 $\frac{1}{2}$이다. ▣

(2) $V=\frac{1}{3}\pi\cdot PR^2\cdot OR=\frac{\pi}{3}k(1-k^2)$에서

산술평균-기하평균 부등식에 의하여

$$\frac{k+2(1-k)+(1+k)}{3}\geq\sqrt[3]{k\cdot 2(1-k)\cdot(1+k)}$$

$$1\geq 2k(1-k^2)$$

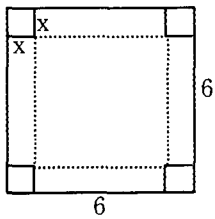
$\frac{\pi}{6}\geq\frac{\pi}{3}k(1-k^2)=V$이므로 V의 최대값은 $\frac{\pi}{6}$이다▣

풀이1의 (2)와 풀이2의 (2)의 V의 최대값이 다르다. 풀이2의 (2)는 산술-기하부등식을 이용한 문제해결전략을 사용하였지만 이것은 잘못된 문제해결전략이다. 왜냐하면, $0<k<1$이므로 $k>0$, $2(1-k)>0$, $1+k>0$가 성립하지만 $k\neq 2(1-k)\neq(1+k)$으로써 등호가 성립하지 않으므로 산술-기하평균 부등식을 이용할 수 없다.

문제13. 한 변의 길이가 6cm인 정사각형 모양의 종이가 있다. 네 모퉁이에서 크기가 같은 정사각형을 잘라내고 남는 부분을 접어서 상자를 만들려고 한다. 이 때, 상자의 부피를 최대로 하려면 잘라내는 부분의 한 변의 길이를 얼마로 하면 되겠는가?

(풀이1) 잘라내는 정사각형의 한 변의 길이를 $x$cm라고 하면

$$0<x<3$$



상자의 부피를 $V\text{cm}^3$라고 하면

$$V=x(6-2x)^2=4x^3-24x^2+36x$$

$$V'=12x^2-48x+36=12(x-1)(x-3)$$

$0<x<3$에서 V의 증감표는 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	16(극대)	↘	

따라서, 잘라내는 정사각형의 한 변의 길이를 1 cm 로 할 때 부피 V는 최대가 된다. ▣

(풀이2) $V=x(6-2x)^2$ (단, $0<x<3$)

$=4x(3-x)^2$

(산술평균)≥(기하평균)의 관계를 이용하면

$$\frac{2x+(3-x)+(3-x)}{3}\geq\sqrt[3]{2x(3-x)(3-x)}$$

$$2\geq\sqrt[3]{2x(3-x)^2}$$

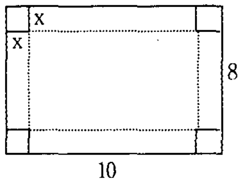
$$16\geq 4x(3-x)^2=V$$

따라서, 등호는 $2x=3-x$ 즉, $x=1$일 때 성립하고, 부피의 최대값 $V=16$이다. ▣

x가 취하는 값의 범위가 $0 < x < 3$이므로 $2x > 0$, $3 - x > 0$이고 $2x + (3 - x) + (3 - x)$의 값이 일정하고 등호는 $2x = 3 - x$에서 성립함으로 산술-기하부등식을 이용하여 문제를 해결할 수 있다.

문제14. 가로의 길이가 10cm, 세로의 길이가 8cm인 직사각형 모양의 종이가 있다. 네 모퉁이에서 크기가 같은 직사각형을 잘라내고 남는 부분을 접어서 상자를 만들려고 한다. 이 때, 상자의 부피를 최대로 하려면 잘라내는 부분의 한 변의 길이를 얼마로 하면 되겠는가?

(풀이1) 잘라내는 직사각형의 한 변의 길이를 x cm라고 하면,



상자의 밑면의 가로는 $10 - 2x$, 세로는 $8 - 2x$이므로

$10 - 2x > 0$, $8 - 2x > 0$이다.

그러므로 $0 < x < 4$이다.

상자의 부피를 $V\text{cm}^3$라고 하면

$$V = x(8 - 2x)(10 - 2x) = 4x^3 - 36x^2 + 80x$$

$$V' = 12x^2 - 72x + 80 = 4(3x^2 - 18x + 20)$$

$0 < x < 4$에서 V의 증감표는 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{9-\sqrt{21}}{3}$	$\cdots$	3
V'		+	0	-	
V		↗	$\frac{4(13+3\sqrt{21})}{3}$ (극대)	↘	

따라서, 잘라내는 직사각형의 한 변의 길이를 $\frac{9-\sqrt{21}}{3}$ cm로 할 때 부피 V는 최대가 된다. ▣

(풀이2) $V = x(8 - 2x)(10 - 2x)$ (단, $0 < x < 4$)

$= 4x(4 - x)(5 - x)$

(산술평균)≥(기하평균)의 관계를 이용하면

$$\frac{2x + (4 - x) + (5 - x)}{3} \geq \sqrt[3]{2x(4 - x)(5 - x)}$$

$$3 \geq \sqrt[3]{2x(4 - x)(5 - x)}$$

$$27 \geq 2x(4 - x)(5 - x)$$

$$54 \geq 4x(4 - x)(5 - x) = V.$$ ▣

풀이2는 산술-기하부등식을 이용하여 문제를 해결했다. 그러나 부피 V의 최대값을 54라고 할 수 없다. 왜냐하면, $2x \neq 4 - x \neq 5 - x$이므로 등호가 성립하지 않으므로 산술-기하평균 부등식을 이용할 수 없다.

5. 결 론

본 연구에서는 산술-기하부등식의 정의와 그에 따른 정리들을 간단하게 소개하고 중등교육과정 「수학10-나」에 처음으로 소개되는 산술-기하부등식을 이용한 여러 문제들을 소개하였으며, 중등교육과정 「미분과 적분」의 미분 단원에 소개되는 여러 문제들을 미분을 이용해서 푸는 방법을 수학적 패턴의 한 양식으로 접근하여 산술-기하부등식을 이용해서 풀 수 있음을 알아보았다. 그런데, 등호의 조건이 성립하지 않는 경우는 산술-기하부등식을 적용할 수 없음을 발견할 수 있었다. 이 또한 매우 흥미로운 발견이라 할 수 있다.

일반적으로 미분단원의 문제는 미분하여 문제를 해결하려는 전략을 사용하는데, 이는 미분까지의 배경지식이 있는 경우에는 아주 자연스러운 접근 방법이라 할 수 있지만, 산술-기하부등식을 이용한 문제해결은 수학적 배경지식이 깊지 않더라도 활용할 수 있을 뿐만 아니라 창의적인 식의 변형, 패턴의 이해라는 관점으로 볼 때, 다양한 수학적 사고를 풍부하게 하며 학생이 문제 해결자가 되고 추상적 사고자가 되도록 도와주고 수학적 패턴을 통하여 수학의 내용들 사이의 관계를 인식하고, 어떤 상황에서도 학생이 자신의 눈으로 볼 수 있는 방법을 모색함으로써 자신의 수학적 아이디어를 개발할 수 있을 것이다. 또한, 고등학교 교사나 학생들이 미분단원의 문제를 미분만을 이용하는 것이 아니라 다른 방법(산술-기하부등식)을 이용하여 해결해 나감으로써 사고의 다양성뿐만 아니라 독립적으로 문제를 분석하는 힘을 기를 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

Prasolov V. V. 지음 · 한인기 옮김 (2006). 대수 · 기초해석 · 조합의 탐구문제들(상), 서울: 교우사.
전북과학고 (2005). 수학영재들의 수학적 재능 향상을 위한 '등식의 탐구' 프로그램 개발, pp13-14.
홍성대 (2003). 수학의 정석[수학10-나], 서울: 성지출판(주).
홍성대 (2003). 수학의 정석[수학II], 서울: 성지출판(주).
홍성대 (2003). 수학의 정석[미분과 적분], 서울: 성지출판(주).
박규홍 외 5명 (2002). 미분과 적분, 서울: 교학사.
박규홍 외 5명 (2002). 미분과 적분 교사용지도서, 서울: 교학사.
최봉대 외 5명 (2002). 미분과 적분, 서울: (주)중앙교육진흥연구소
최봉대 외 5명 (2002). 미분과 적분 교사용지도서, 서울: (주)중앙교육진흥연구소
김택현 (1999). 패턴활동으로 구성된 함수 단원 개발과 적용, 한국교원대 교육대학원 석사학위 논문.