韓國數學敎育學會
<全國數學敎育硏究大會 프로시딩>
제 37회. 2006. 10. 129-145

Korea Soc. Math. Ed.
Proceedings of National Meeting of Math. Ed.
The 37th. Oct. 2006. 129-145

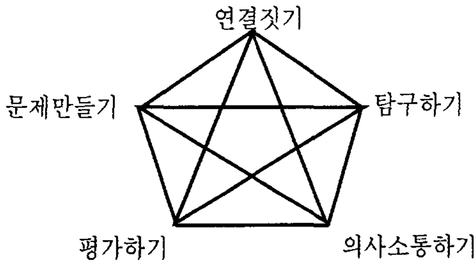
# 호박고누놀이와 정렬문제

강 병 련 (충남대학교)

## I. 서 론

수학-과학 분야의 영재교육의 궁극적 목표는 과학기술분야를 선도하는 과학자의 양성이다. 영재란 학교 교육만으로는 지적호기심이 채워지지 않는 우수한 학생들을 의미하기로 한다. 사교육의 덕분으로 영재교육원의 재원생들을 포함하여 이런 많은 학생들이 굉장히 많은 선행학습을 하고 있다. 적절한 선행학습은 우수한 학생들에게는 자연스럽게 깨달아 가는 과정이지만 과도한 양의 수학 문제 풀이와 학생들의 지적 탐구과정을 앞서가는 선행교육은 학생들의 창의력을 해칠 위험이 크다. 따라서 학생들의 창의력을 파악할 수 있고 또 키워주는 적절한 교육내용의 연구가 필요하다.

Shefield(2006)는 수학적 가능성 및 창의성 개발이라는 논문에서 강력하고 창조적인 수학자가 되기 위하여 수학이란 추론하고 전략을 개발하고 문제를 해결하는 인간의 활동-수학화를 권장하는 활동, 창의적인 수학적 사고를 수반하는 과정-임을 인식해야만 한다고 하였다. 또 학생들이 창의적이고 탐구적인 수학자와 같이 생각하도록 하는데 사용되어질 수 있는 발견술로 아래 모형을 제시하였다.




<그림 1>

적절한 수준의 게임이 주어지면 학생들은 게임을 하면서 문제를 단순화하여 해결하고(문제만들기, 탐구하기) 자신이 찾은 승리 전략을 다른 사람의 전략과 비교하고(의사소통하기) 그들 사이의 역학관계를 파악하려고 노력(연결짓기)하는 과정에서 자신의 전략을 평가, 수정하여(평가하기) 본게임이 조금씩 단순화된 특별한 경우로 가는 경로를 찾고(문제만들기, 연결하기) 그 타당성을 연구하는 등 Shefield의 모형에 제시된 활동들을 반복적으로 함으로써 작지만 수학자가 하는 수학화의 과정을 경험할 수 있다.

박문자(2005)는 젓가락 게임을 활용한 창의성 신장 방안 연구에서 신현용 · 한인기 · 이종욱(2000)이 제시한 창의성을 신장시킬 수 있는 학습프로그램을 위한 여섯 가지 기준을 소개하고 있다.

첫째, 학습자에게 흥미, 관심, 의욕을 불러일으킬 수 있는 주제를 선정한다.

둘째, 다양한 전략이나 해결방법을 가지는 학습 문제를 선정한다.

셋째, 자기 주도적 학습이 이루어지는 학습 문제를 선정해야 한다.

넷째, 학습문제는 단계적으로 구성되어야 한다.

다섯째, 다양한 활동으로 이루어진 학습문제를 설정한다.

여섯째, 협동과 경쟁학습이 이루어질 수 있는 학습문제를 설정한다.

대부분의 게임은 위의 첫째, 둘째, 세째와 여섯째 조건을 쉽게 만족한다. 넷째와 다섯째의 조건을 만족시키기 위하여 게임의 이해와 학생의 수준에 맞는 수업지도안의 작성이 필요하고 지도강사가 노력해야 할 부분이다. 이를 위한 게임의 분석이 필요함을 여러 문헌에서 다루고 있으며 이는 정문자(2005)을 참고하기 바란다.

여름철 나무지게를 내려놓고 시원한 나무그늘 밑에서 잠시 손을 쉬면서 땅바닥에 선을 긋고 조그만 돌멩이를 주워 놀이하는 모습을 단원 김홍도의 한 풍속도에서 볼 수 있다. 고누놀이의 가장 간단한 형태는 LHS(200)에도 소개되어 있는 우물고누(LHS에는 Ou-moul-go-no라고 소개)이며 호박고누놀이와 규칙은 거의 같으나 훨씬 간단한 놀이이므로 호박고누놀이의 전 단계로써 해 볼 수 있다. 우물고누 놀이는 초등학교 6학년들도 경우를 나누어 게임의 분석을 완전히 할 수 있었다.

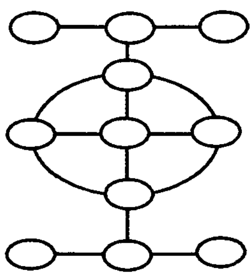
호박고누는 II장 (1.1)의 호박고누판에 주어진 규칙에 따라 말을 놓고 움직이면서 상대방의 말을 움직이지 못하게 만들면 이기는 놀이이다. 이 논문에서는 고누놀이의 하나인 호박고누놀이를 분석하여 규칙을 적절히 보안하고 승리전략을 찾아본다. 규칙의 보안에는 2005년과 2006년도의 초등수학 심화반 학생들이 참여하였다.

# II 호박고누

## 1. 놀이의 시작

### (1.1) 호박고누판과 놀이방법

(1.1.1) 준비물. 호박고누판과 두 종류의 말을 네 개씩 준비한다. <그림 2>에 둥글게 표시되어 있는 부분이 마굿간이다.



<그림 2 : 호박고누판>

(1.1.2) 호박고누 놀이규칙 :

| | |
|---|---|
| <호박 1> | 두 사람이 하는 놀이로서 상대방의 말 색깔과 다른 색으로 같은 색깔의 말을 각각 네 개씩 준비하여 게임말판위에 한사람은 위의 네 자리에 나머지 사람은 아래 네 자리에 네 개의 말을 각각 놓는다. |
| <호박 2> | 차례를 정하여 돌아가면서 말을 한 칸씩 움직여 상대방의 말을 움직이지 못하게 하면 이긴다. |

**(1.2) 용어의 약속**

놀이판을 아래의 표로 간단히 표시하고 말을 놓을 수 있는 11개의 자리를 <표 1>과 같이 번호를 붙인다. 원숫자로 각 방을 표시하거나 그 방에 있는 말을 표시한다. 예를 들어 ⑪은 11번 방을 의미하거나 11번 방에 있는 말을 의미한다. ②번 말을 ④번으로 보내면 ②->④로 표현한다. ②에 있던 A의 말을 ④로 보내면 A:②->④로 표현한다. 상대방의 입구는 ④나 ⑧을 의미한다.

①-④에 말을 놓고 시작하는 팀을 A라 하고 ⑧-⑪에 말을 놓는 팀을 B라 하고 A와 B의 말들도 혼란이 일어나지 않으면 각각 A와 B로 표시한다. 또, ①②③은 A방, ⑨⑩⑪은 B방, 나머지 가운데 방은 공동방이라고 부른다. <표 2>는 게임시작 때의 말의 배열이다.

다음 (1.3)의 <표 3>에서 알 수 있듯이 A가 ① 혹은 ③을 ②으로 보내지 않거나 혹은 B가 ⑨ 혹은 ⑪을 ⑩으로 보내지 않으면 이 게임은 영원히 승부가 나지 않는다. A가 ① 혹은 ③을 ②로 보내는 것을 A가 공격한다, B가 ⑨ 혹은 ⑪을 ⑩으로 보내는 것을 B가 공격한다고 표현한다.

A와 B의 관계는 대칭이므로 정리를 기술할 때 특별히 혼동을 초래하지 않는 경우, A 혹은 B를 지정하여 기술할 수도 있으나 이 때 A와 B가 바뀌어도 여전히 성립한다.

<표 1>

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| | 4 | |
| 5 | 6 | 7 |
| | 8 | |
| 9 | 10 | 11 |

<표 2>

| | | |
|---|---|---|
| A | A | A |
| | A | |
| | | |
| | B | |
| B | B | B |

**(1.3) 놀이규칙의 보안**

(1.3.1) 놀이가 계속 되는 경우. (1.2)의 규칙을 따르면 다음과 같은 배열이 되었을 땐 호박고누놀이는 끝나지 않는다. <표 3> - <표 7>에서 A나 B로 표현되지 않은 나머지 말들은 *표시가 된 방 중에 있다. <표 3>에서는 *로 표시된 방에 있는 두 말이 중앙과 양 옆을 왕복할 수 있고, <표 4>에서 공동방의 두 말이 계속 움직이거나, 또 <표 5>, <표 6>과 <표 7>에서도 A나 B가 *에 있는 말들만 *로 표시된 방안에서만 말들만 움직이면 경기는 끝나지 않는다.

<표 3>

| | | |
|---|---|---|
| A | | A |
| | B | |
| * | * | * |
| | A | |
| B | | B |

<표 4>

| | | |
|---|---|---|
| A | B | A |
| | * | |
| * | * | * |
| | * | |
| B | A | B |

<표 5>

| | | |
|---|---|---|
| A | A | |
| | B | |
| * | * | * |
| | * | |
| B | | B |

<표 6>

| | | |
|---|---|---|
| A | B | A |
| | * | |
| * | * | * |
| | * | |
| | A | B |

<표 7>

| | | |
|---|---|---|
| A | | A |
| | * | |
| * | * | * |
| | * | |
| B | | B |

**(1.3.2) 호박고누놀이 규칙의 보안**. (1.3)과 비슷한 현상들을 방지하기 위하여 <호박 1>과 <호박 2> 외에 다음 두 규칙을 더한다.

| | |
|---|---|
| <호박 3> | 자기 방에서 뒤(중앙에서 왼쪽과 오른쪽으로)로 물러날 수 없다. |
| <호박 4> | 같은 말을 다섯 번 이상 계속 움직일 수 없다. |

**(1.4)** (1.3.2)에서 첨가한 두 규칙이 아주 적절함을 보이자.

<표 4>의 배열이 만들어질 때는 먼저 상대방의 방에 말을 넣은 쪽이 진다. 왜냐하면 중앙의 A가 뒤에 상대방의 방에 말을 넣는다면 호박4 규칙에 의하여 B가 먼저 자신의 말을 ④로 꺼내야 한다. A가 ③->②로 공격을 하면 B는 이제 ④는 움직일 수 없으므로 남은 한 개의 말을 공동방의 A의 말이 계속 따라 움직이면 결국 B는 더 이상 못 움직이거나 ④를 움직여야만 한다.

<표 5>에서는 B가 계속 공격을 안 하는 경우 A가 ⑩에 들어가게 되면 A가 이긴다. 왜냐하면 중앙 가로선에 있던 두 말이 BABABABA 순서로 움직이게 되는데 호박4 규칙에 따라 B는 더 이상 못 움직이거나 ④를 움직여야만 한다.

규칙 <호박 3>은 <표 3의> 경우를, <호박 4>는 <표 5>와 <표 6>의 경우를 막아 적극적인 공격을 유도한다. <표 7>의 경우는 (2.9)를 참고하면 된다. 공격을 할 때는 말의 배열이 중요하므로 네 번까지 돌리면서 자신에게 이로운 배열을 찾을 수 있는 기회를 주므로 적절한 규칙이다.

따라서 새로운 규칙 <호박 3>과 <호박 4>로부터 다음 정리를 얻는다.

**(1.5) 정리.** 자신의 방에도 말이 두 개 있고 상대방의 방에도 말 두 개가 남아있을 때는 먼저 상대방의 방에 들어가지 않는다.

## 2. 놀이 분석

이 절에서는 호박 1, 호박 2, 호박 3, 호박 4 의 네 규칙을 이용하여 호박고누놀이를 할 때의 승리 전략을 분석한다.

**(2.1) 정리.** 먼저 말 세 개를 공동방으로 내 놓는 사람이 이긴다.

**증명**. A가 먼저 공동방에 말 세 개를 내 보냈다고 하자(즉, ②->④). B의 말이 두 개가 나와 있다면 B는 자기방으로 되돌아가는 길 외엔 움직일 수 없다. B의 말이 하나만 나와 있다면 공동방에서의 말의 배열은 다음과 같다. 처음의 경우는 A가 이긴 걸 바로 알 수 있고 두 번째 경우는 B를 ⑤나 ⑦로 몰아 막을 수 있고 세 번째 경우는 B를 ⑧로 몰아 막을 수 있다. 각 방에서의 좌우 대칭은 경기의 결과가 같으므로 같은 것으로 한다.

| | | |
|---|---|---|
| | A | |
| B | A | |
| | A | |

| | | |
|---|---|---|
| | A | |
| A | A | B |
| | | |

| | | |
|---|---|---|
| | A | |
| A | | B |
| | A | |

**(2.2) 따름정리**. A의 말이 공동방에 두 개 있고 ②에 A가 있으면 B는 반드시 ④로 말을 옮겨 ②가 나오지 않게 막아야 한다.

**(2.3) 정리.** 공동방에 A와 B의 말이 각각 두 개씩 있고② 에 A가, ⑩에 B가 오게 될 때는 상대방의 방을 나중에 ⑤나 ⑦에 있는 자신의 말로 막는 사람이 이긴다. (중앙에 잇는 말로 막으면 안 된다.) 즉, <표 8.과 <표 9>에서 먼저 시작하는 사람이 진다.

**증명.** (2.3)의 가정을 만족하는 경우는 다음 두 가지이다. 이때 (2.1), (2.2)를 지키면서 게임을 하면 먼저 시작하는 사람이 질 수 밖에 없다.

<표 8>

| | | |
|---|---|---|
| A | A | |
| | B | |
| B | A | |
| | A | |
| B | B | |

<표 9>

| | | |
|---|---|---|
| A | A | |
| | B | |
| A | B | |
| | A | |
| B | B | |

정리 (2.3)에 의하여 만약 B가 먼저 A의 ②를 ④에서 막고 있으면 B는 A가 ⑧에 말을 놓기 전에는 공격을 하지 않을 것이다. 단 이 경우에도 중앙이 비어 있으면 B는 공격을 하지 않는다.

**(2.4) 시작전략 -시작은 어떻게 해야 하나?**

A가 먼저 한다고 하자.

A가 ④번 말을 두 번 계속 움직여 ⑧로 보내면 B도 ⑧에 있던 말을 ④로 보내게 되고 A는 ⑧에 있는 말을 치어 주어야 한다. 그러면 B는 ④에 보낸 B의 말은 그대로 두고 ⑩->⑧, ⑪->⑩ 하는 동안 A는 같은 말을 계속 움직일 수밖에 없으므로 호박4규칙에 의하여 A는 질 수 밖에 없다. 혹은 A나 B가 두 번째에 중앙선에 나온 말을 옆으로 옮길 수도 있으나 그렇게 한 사람은 지게 된다. 따라서 경기는 다음과 같이 전개 될 수밖에 없다.

A:④->중앙선, B:⑧->중앙선, A:②->④, B:⑩->⑧

표로 나타내면 다음과 같다.

<표 10>

| | | |
|---|---|---|
| A | | A |
| | A | |
| B | A | |
| | B | |
| B | | B |

<표 11>

| | | |
|---|---|---|
| A | | A |
| | A | |
| A | B | |
| | B | |
| B | | B |

<표 12>

| | | |
|---|---|---|
| A | | A |
| | A | |
| A | | B |
| | B | |
| B | | B |

**(2.5) 정리**. (2.4)의 세 경우에서 먼저 공격하면 진다.

**증명**. <표 10>에서 A와 B의 역할을 바꾸면 <표 11>이 되고 <표 12>는 A와 B의 역할을 바꾸어도 모양이 같으므로 A가 먼저 공격한다고 가정해도 무관하다.

- <표 10>에서 A가 먼저 공격하면 B는 ⑧을 ⑦로 보내 A를 ⑧로 유인한 후 ⑪로 공격한다. 이제 A는 ⑧은 움직일 수 없다.(4.3) 따라서 A는 ④를 6으로 보내게 되고 B가 ⑦를 ④로 보내면 (2.3)에 의해 B가 이긴다.
- <표 11>에서는 A가 먼저 공격하면 B는 ⑧을 ⑦으로 옮겨 A가 ⑤를 ⑧로 옮길 수밖에 없게 하여 앞의 경우와 같이 하면 B가 이긴다.
- <표 12>에서는 A가 공격하면 B는 ⑧을 ⑥으로 옮기면 A④를 ⑧로 유인한다. 이 때 B가 공격을 하면 A는 ④를 비워줄 수밖에 없고 B는 ⑦로 ④를 막으면 (2.3)에 의하여 이긴다.

(2.5)에 의하면 <표 10>, <표 11>, <표 12>에서 먼저 공격하면 지므로 누구든 먼저 공격하지 않고 적당한 기회를 찾기 위하여 공동방에서 말을 돌리게 된다. 호박4에 의하여 누군가 먼저 공격을 할 수 밖에 없다. 다음 절에서는 A와 B의 말이 두 개 나와 있을 때 A가 먼저 공격을 한 후 B가 공격해서 이길 수 있는 경우의 공동방의 배열을 알아본다.

**(2.6) 보조정리.** A가 적힌 카드가 두 장, B가 적힌 카드가 두 장, E가 적힌 카드가 한 장 있을 때 이 중 세 장를 뽑아 한 줄로 세우는 방법의 수는 다음 18가지이다. 이 때 차례가 다르면 다른 것으로 한다.

**증명**. {AAB}, {AAE}, {ABB}, {BBE}를 뽑는 경우에는 각각 3 가지, {ABE}를 뽑는 경우에는 6 가지이므로 모두 18 가지이다.

공동방에 A 말이 두 개 B 말이 두 개있다고 하자. 빈방을 E라고 표현한다면 공동방의 배열은 AABBE 다섯 개의 카드를 공동방에 배열하는 방법의 수와 같다. 그런데 중앙 세로선에 관하여 대칭인 경우는 말을 놓는 방법도 대칭이므로 이는 AABBE 중 세 개를 골라 중앙 세로선에 나열하는 방법의 수와 같다. (2.6)에 의하여 18가지가 있으며 다음과 같다.

<표 13>

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | A | B | A | A | | A | B | B | A | A | B | B | | | B | B | |
| A | B | A | A | | A | B | A | B | B | | | A | A | B | B | | B |
| B | A | A | | A | A | B | B | A | | B | A | | B | A | | B | B |

표현을 간단히 하기 위하여 공동방의 세로중앙선에 위에서부터 AAB차례로 말이 정렬되어 있으면

| |
|---|
| A |
| A |
| B |

[AAB], 또는 위와 같이 로 표현한다. 즉 다음 두 경우 중의 하나이다.

| | | |
|---|---|---|
| | A | |
| B | A | |
| | B | |

, 혹은

| | | |
|---|---|---|
| | A | |
| | A | B |
| | B | |

**(2.7) 중간전략-먼저 공격해서 이로운 공동방의 말의 배치는 있는가?**

이제 A가 공격을 하여 A의 두 말은 ①과 ③에 B의 두 말은 ⑨와 ⑪에 있고 나머지는 공동방에 있을 때 A가 공격을 하였다고 하자. 이 때 공동방의 말의 배치에 따른 B의 최선의 수를 알아본다.

(2.7.1) B가 ⑪->⑩을 하여 이기는 경우 : [AAB] [ABA] [AAE] [AEA] [ABE] [BAA] [BBA]

(2.7.2) B가 ⑧->⑦(?) 을 하여 이기는 경우 : [ABB] (∵ [ABA]으로 변형됨)

(2.7.3) B가 ⑧->⑥ 을 하여 이기는 경우: [AEB] (∵ [ABA]으로 변형됨 )

(2.74) B가 ⑦->⑧ ⑧->⑥을 하여 이기는 경우 : [BAE], (∵ [BBA]으로 변형됨 )

(2.7.5) B가 ⑦->④ ⑧->⑥을 하여 이기는 경우 : [EAB] (∵ [BBA]으로 변형됨 )

(2.7.6) B가 ⑦->④ 을 하여 이기는 경우 : [EBA] (∵ [BBA]으로 변형됨)

(2.7.7) B가 ⑧->⑥ 을 하여 이기는 경우 : [BEB] (∵ [BBA]으로 변형됨)

(2.7.8) B가 이길 수 없는 경우 : [EAA], [BAB], [BEA] [BBE], [EBB]

특히 간단하고 기억하기 좋은 주요한 관찰을 다음에 정리한다.

**(2.8) 정리.** A는 ④에 A의 말이 있을 때 먼저 공격하면 항상 진다. B는 ⑧에 B의 말이 있을 때 먼저 공격하면 항상 진다.

**(2.9) 정리.** (2.7)과 초기조건이 같을 때 공동방의 말의 배치가 (2.7.8)의 다섯 경우일 때, 또 오직 이 경우에만 A는 먼저 공격하면 이긴다.

**증명.** (2.7)에 의하면 오직 이 경우에만 B가 공격할 기회가 오지 않는다.

- [BAB] 배열일 때 B: ⑧->⑦, A: ⑥->⑧ 이면 [BEA]가 되고 B:⑦->⑥, A:⑧->⑦ 이면 [BBE]. 또 B:⑥->⑧, A:⑤->⑥ 하면 [BAB]로 돌아온다. 이 동안 B는 계속 같은 말을 움직이므로 B는 진다.

- [EAA]이면 B:⑦->④, A:⑥->⑦ 후 [BEA]가 되므로 첫 번째 설명에 의하여 B는 진다.
- [EBB]이면 B:⑥->④, A:⑦->⑥ 후 [BAB]가 되므로 첫 번째 설명에 의하여 B는 진다.

B가 모든 전략을 알고 있다면 (2.9)에 의하여 A가 공격할 기회가 올 것인가? 왜냐하면 [EAA]를 만들기 위하여 A는 [BAA]를 만들어야 하는데 이 때 B는 공격하지 않으면 [EAA]를 만들 수 밖에 없다. [BAB]를 만들기 위하여 A는 [BAE] 혹은 [EAB]를 만들어 놓으면 B는 먼저 공격하지 않으면 [BAB]를 만들 수 밖에 없다. [BEA]는 [BBA]나 [EBA]로부터 만들어지나 B가 [EBA], 혹은 [BBA]를 만들어 A가 공격 못하게 할 수 있다. 마지막으로 A가 [BEB]를 만들면 B는 [EBB], [BBE]를 만들 수 밖에 없어 A의 공격이 가능하다.

**(2.10) 정리.** (i) A는 A의 차례에서 공동방의 배열이 [BAA], [BAE], [EAB], [BEB]가 되도록 하면 A는 그 다음 차례에 먼저 공격하여 이길 수 있다.

B를 중심으로 서술한다면

(ii) B는 A의 차례에서 공동방의 배열이 [BBA], EBA], [ABE], [AEA]가 되도록 하면 B는 그 다음 차례에 먼저 공격하여 이길 수 있다.

**(2.11) 탐구문제**. 공격을 먼저 하면 유리한 배열이 있으므로 (1.4)의 <표 7>을 방지하기 위한 규칙은 필요하지 않다. 또 먼저 공격할 수 있는 배열이 A와 B에 같은 경우의 수로 존재한다. 그러나, 앞의 전략들을 모두 알 때 다음을 질문할 수 있다. 이의 해는 독자들이나 학생들의 탐구를 위하여 생략한다.

- A와 B는 (2.4)의 시작전략의 수정이 필요한가?
- 공격을 먼저 하기에 유리한 경우는 먼저 할 때와 나중에 할 때 중 언제인가? 자신에게 유리한 경우가 먼저 했을 때인가, 혹은 뒤에 했을 때인가?
- 유리한 경우가 있다면 어느 정도의 확률로 높은가?
- 100% 승리할 방법은 있는가?

## 3. 호박고누놀이와 개방형 과제

다음은 대학부설 과학영재교육원 초등학교 6학년 학생들이 2시간(40분 2회)의 호박고누놀이 후 제출한 보고서의 분석이다. 이 호박고누놀이의 수업모델로 적용하는 경우 도움이 되도록 간단히 소개한다. 이 놀이는 정식 수업시간이 아니라 공동 행사 후 남은 시간을 이용하여 40분간 자유롭게 호박고누놀이시간을 주고 다음 날 발견한 사실들을 적어내게 했으며 다음 날 그 보고서를 바탕으로 규칙을 보안 한 후 먼저 하는 것이 유리하다는 팀과 뒤에 하는 사람이 유리하다는 팀으로 나누어 시합 후 찾은 규칙을 수업 끝나기 전 10분간만 시간을 주어 적어내게 하는 식으로 진행하였다. 개방형 사고력 평가를 위한 시도였다. 자유놀이시간에는 지는 것을 잘 참지 못하는 영재아들의 특성을 고려하여 공동작

업을 강조하고 보고서는 각자 내나 최우수보고서는 팀원과 같이 수상한다는 원칙을 세웠다.

이 학생들은 바둑알 15개를 1행에 3개, 2행에 5개, 3행에 7개씩 놓고 번갈아가며 같은 행에서만 바둑알을 번갈아 가져가면서 마지막으로 다 가져가는 사람이 이기는 NIM 게임(LHS)의 승리전략을 찾아낸 경험이 있는 학생들이다.

다음은 16명의 학생들의 보고서의 내용을 간단히 정리한 것이다. 16명의 학생들이 모두 무승부가 일어나는 경우의 일부를 지적했으며 무승부를 만들지 않는 경우로 호박3이나 호박4와 비슷한 규칙의 필요성을 지적하고 결론을 내리고 있었다.

| | 첫째 날 | 둘째 날 |
|---|---|---|
| 먼저 하는 사람이 유리 | 10 | 14 |
| 뒤에 하는 사람이 유리 | 6 | 1 |
| 항상 이기는 시작방법 발견 | 1 | 1 |

둘째 날 결론을 유보한 학생은 처음 네 번의 수가 결정한다고 의견을 냈다. 대부분의 학생은 먼저 상대방의 방에 남아있는 말을 막고 공격을 먼저 하는 수로 처음에 두었으며 이 경우는 먼저 시작하는 사람이 지는 경우가 많아 뒤에 하는 사람이 유리하다는 결론을 내린다. 그러나 경우를 나누려고 노력하는 경우는 몇 번의 시도 후에 먼저 하는 사람이 상대를 유인하는 수를 먼저 둘 수가 있어 먼저 하는 것이 유리하다는 결론을 내리고 있다. 결론을 내리는 과정에서 일부 학생은 분명히 지적하기도 했지만 대부분 II장의 (2.1), (2.2), (2.3)등의 규칙을 느낌으로 알고 이를 이용하여 자신들의 결론을 유도하려고 하였고 일부학생들은 통합하는 능력의 부족으로 가능한 많이 이기는 경우를 나타내고 있었다. 항상 이기는 시작 방법을 발견한 학생은 끝까지 이기도록 말을 계속 배치할 수도 있었다. 다만 그의 방법이 유일한 지 어떤지는 학생들에게 설명할 수 없었다.

자신들의 결론을 경험적으로 내리고 있으며 자신의 주장을 논리적으로 펴는 능력은 미비하였다. 저자는 학생들의 보고서 및 둘째 날의 경험으로 이 놀이를 이용한 수업모형의 필요성을 느껴 이 놀이를 분석하게 되었다.

실제 수업현장에 적용이 편리하도록 학생활동지의 한 예를 부록2에 소개한다. 부록1은 호박고누판이다.

## III. 결 론

마곳간이 11개 뿐인 비교적 간단한 놀이이지만 II장의 호박고누놀이의 승리전략의 탐구 과정에서 확인 할 수 있듯이 호박고누놀이의 진행에서 일어 날 수 있는 경우의 수는 상당히 많다. 그러나 몇 가지 이길 때의 모습을 확인 한 후 그 이유를 발견하고 이로부터 그 다음 단계의 답을 논리적으로 끌어내는 훈련이 가능하다. 각 단계에서는 나타날 수 있는 모든 경우를 생각하고 각각의 경우의 공통점을 분류하고 경우별로 증명하는 훈련도 가능하다. 사실 이런 단계들은 실제 논문을 쓸 때 수학

자들이 문제에 접근하는 흔한 방법이다. 수학적 사고력이 놀이와 어떻게 연결되는 가를 직접 경험하며 수와 식만이 수학이 아님을 경험할 수 있다. 또 이런 과정에서 학생들은 Shefield(2006)가 제안한 수학화를 경험하며 만족감을 느낄 수 있다. 영재아를 위한 개방형 논리 수업을 위한 콘텐츠를 찾는 교사 및 영재교육 강사들에게 도움이 되기를 기대한다.

## 참 고 문 헌


신현용 · 한인기 · 이종욱 (2000). 초등학교 고학년 수학영재의 창의성 신장을 위한 프로그램, 한국수학교육학회 시리즈 E <수학교육 논문집> **10**, pp.19-30.

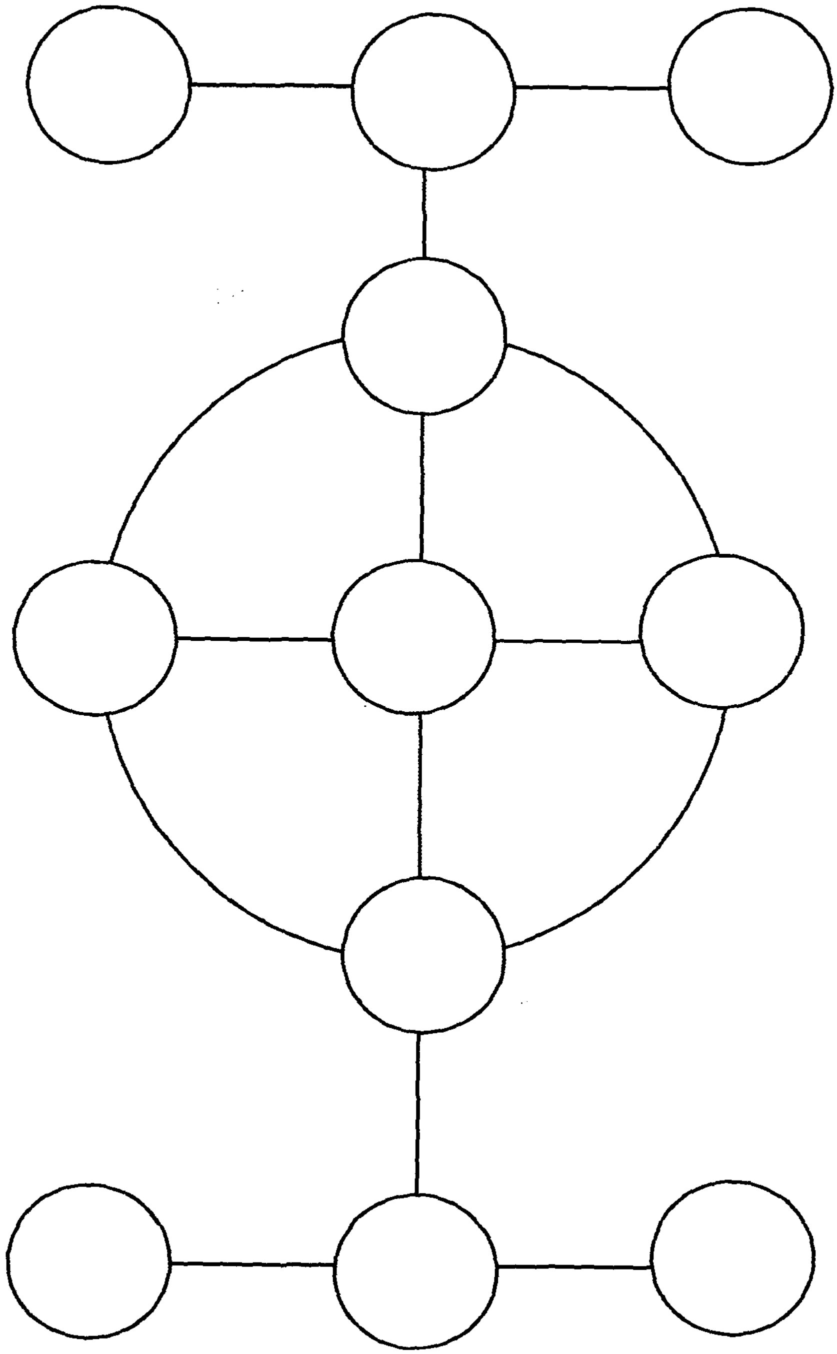
정문자 (2005). 젓가락 게임을 활용한 창의성 신장 방안 연구, 한국수학교육학회 시리즈 E <수학교육 논문집> **19**, pp.503-516

한국민속사전 편찬위원회 엮음 (1991). 한국민속대사전, 민족문화사

LHS (1979). *Math around the world,* Lawrence Hall of Science, University of California at Berkely

Shefield, L. J. (2006), 수학적 가능성 및 창의성 개발, 제 11회 국제수학영재교육세미나 프로시딩, pp.1-8

## <부록 1> 호박고누판



## <부록 2> 호박고누-학생활동지

호박고누놀이를 주제로 실제 수업을 할 수 있도록 II장의 분석을 토대로 호박고누놀이 학생용 활동지를 부록에 수록한다.

이 학생활동지(worksheet)는 한 시간 동안 두 가지의 규칙만으로 자유롭게 호박고누놀이를 하였던 학생들을 대상으로 만들었다. 학생들은 종류는 다르지만 항상 이기는 방법이 있는 게임을 한 경험이 있는 초등학교 6학년 영재반 학생들이며 호박고누 놀이를 시작하기 전 학생들에게 '항상 이갈 수 있는 방법이 있을까', 혹은 '놀이의 순서에 따라 특별히 유리한 경우가 있을까' 등의 발문을 하였다.

놀이의 분석이 처음인 경우는 활동지의 1단원을 좀 더 세분하여 질문하는 것이 적절하리라 생각한다.

비록 저자가 초등학교 영재교육을 맡고 있어 실제 대상을 초등학교 6학년 영재아라고 하였지만 중등 영재반 학생 들 뿐만 아니라 일반 중학교에서도 학기말 시험이 끝난 기간 중에 논리나 명제 수업이나 경우의 수에 관한 보조 수업으로도 유용하게 쓰이기를 희망한다.

아래의 활동지에서 각각의 질문 뒤에는 학생들의 답을 적기 위한 공간의 표시로 가는 표를 그려놓았으며 그 안의 수치는 실제 저자의 수업에서 사용한 표의 대략적인 세로 길이이다(가로는 편집용지의 가로).

실제 활동지에는 각각의 질문 뒤에 학생들의 답을 적기 위한 공간을 표나 글상자로 표시하였는데 여기에서는 여백을 줄이기 위해 대괄호 안에 실제 저자의 수업에서 사용한 표의 대략적인 세로 길이를 적어두었다(가로는 편집용지의 가로나 표 옆의 여백). 마지막 두 질문은 별지에 써서 제출하게 하거나 발표하게 한다.

강사는 자석 칠판을 이용할 수 있는 경우는 말로 이용할 자석과 심홍도의 풍속도 사본[부록3]을 준비하길 권한다.

이 수업의 수업목표는 다음과 같다.

- 놀이하는 과정에서 현상을 표현하는 용어 및 간단한 표현법의 필요성을 안다.
- 적절한 용어 및 표현법이 문제 해결을 쉽게, 혹은 풀이를 쉽게 할 수 있음을 안다.
- 간단한 놀이인 호박고누놀이의 다양성을 몇 가지 경우로 분류하는 것을 통하여 경우의 수의 공부를 실제 문제에서 경험한다.
- 특별한 경우의 분석을 전체 경기의 진행에 적용함으로 연역적 사고력을 키운다.
- 호박고누놀이는 놀이에 들어 있는 정렬의 변화를 이해한다.
- 호박고누놀이의 규칙, 놀이의 전개 및 승리전략을 분석한다.
- 협동심을 기른다.
- 정리와 증명 등의 수학용어를 소개한다.

## [호박고누-학생활동지]

### 1. 호박고누놀이

#### (1.1) 호박고누판과 놀이방법

(1.1.1) 준비물. 호박고누판(부록1)과 두 종류의 말을 네 개씩 준비한다. <부록1>에 둥글게 표시되어 있는 부분이 마굿간이다.

(1.1.2) 호박고누 놀이규칙 :

| | |
|---|---|
| <호박 1> | 두 사람이 하는 놀이로서 상대방의 말 색깔과 다른 색으로 같은 색깔의 말을 각각 네 개씩 준비하여 게임말판위에 한사람은 위의 네 자리에 나머지 사람은 아래 네 자리에 네 개의 말을 각각 놓는다. |
| <호박 2> | 차례를 정하여 돌아가면서 말을 한 칸씩 움직여 상대방의 말을 움직이지 못하게 하면 이긴다. |
| <호박 3> | 자기 방에서 뒤(중앙에서 왼쪽과 오른쪽으로)로 물러날 수 없다. |
| <호박 4> | 같은 말을 다섯 번 이상 계속 움직일 수 없다. |

(1.1.3) 표현의 약속. 수학이나 과학 논문에서는 현상을 간단하게 표현할 수 있는 능력도 필요하다(더 간단하고 편리한 표현 추천 환영). 호박고누표를 다음과 같이 표로 표현한다. 각 마굿간에 <표1>처럼 번호를 붙이자. 원숫자로 각 방을 표시하거나 그 방에 있는 말을 표시한다. 예를 들어 ⑪은 11번 방을 의미하거나 11번 방에 있는 말을 의미한다. ②번 말을 ④번으로 보내면 ②->④로 표현한다. ②에 있던 A의 말을 ④로 보내면 A:②->④로 표현한다. 상대방의 입구는 ④나 ⑧을 의미한다.

놀이를 하는 두 사람을 각각 A, B라고 하고 그들의 말들도 혼동이 일어나지 않는다면 A, B라고 표시하자. 그러면 <표 2>는 게임시작 때의 말의 배열이다. ①②③은 A방, ⑨⑩⑪은 B방, 나머지 가운데 방은 공동방이라고 부르자.

<표 1>

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| | 4 | |
| 5 | 6 | 7 |
| | 8 | |
| 9 | 10 | 11 |

<표 2>

| | | |
|---|---|---|
| A | A | A |
| | A | |
| | | |
| | B | |
| B | B | B |

(1.1.4) 호박 1과 호박 2만을 규칙으로 정하면 무승부인 경우가 많이 나온다. <표 3>에서 <표 7>은 호박 1과 호박 2만을 규칙으로 했을 때 무승부가 일어날 수 있는 경우이다. <호박3>과 <호박4>가 여러분이 얻은 무승부 경우를 해결해 주는지, 또 해결하더라도 타당한지를 논의하자.

<표 3>

| | | |
|---|---|---|
| A | | A |
| | B | |
| * | * | * |
| | A | |
| B | | B |

<표 4>

| | | |
|---|---|---|
| A | B | A |
| | * | |
| * | * | * |
| | * | |
| B | A | B |

<표 5>

| | | |
|---|---|---|
| A | A | |
| | B | |
| * | * | * |
| | * | |
| B | | B |

<표 6>

| | | |
|---|---|---|
| A | B | A |
| | * | |
| * | * | * |
| | * | |
| | A | B |

<표 7>

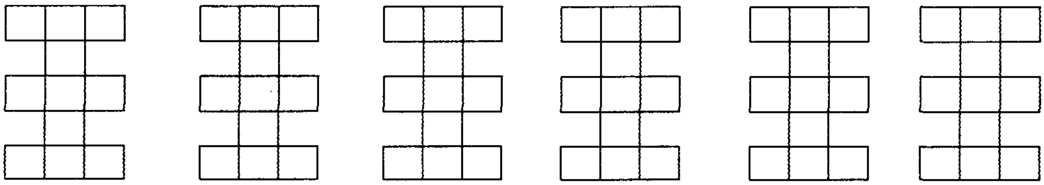
| | | |
|---|---|---|
| A | | A |
| | * | |
| * | * | * |
| | * | |
| B | | B |

여러분의 생각을 아래에 정리하자. [10 cm]

**(1.2)** 자신의 방에도 말이 두 개 있고 상대방의 방에도 말 두 개가 남아있을 때는 먼저 상대방의 방에 들어가면 어떻게 될 지 알아보자. [4 cm]

## 2. 호박고누놀이 분석

**(2.1)** 먼저 말 세 개를 공동방으로 내 놓으면 어떻게 될까? 이 때 공동방의 모든 가능한 경우를 먼저 표에 그려 보고 각 경우의 결과를 알아보자.



7cm

**(2.2)**

(2.2.1) 말이 다음<표 8>과 같고 B차례라면 어떻게 할까? B의 가능성을 얘기하고 그 결과를 알아보자. [4 cm]

<표 8>

| | | |
|---|---|---|
| A | A | |
| | | |
| A | A | B |
| | B | |
| B | | B |

<표 9>

| | | |
|---|---|---|
| A | A | |
| | | |
| | A | B |
| | A | |
| B | B | |

(2.2.2) 말이 다음 <표 9>와 같고 B차례라면 어떻게 할까? B의 가능성을 얘기하고 그 결과를 알아보자. [4 cm]

(2.2)의 두 예를 보고 짐작할 수 있는 사실이 있는가?

**(2.3) 정리.** 공동방에 A와 B의 말이 각각 두 개씩 있고② 에 A가, ⑩에 B가 오게 될 때는 상대방의 방을 나중에 ⑤나 ⑦에 있는 자신의 말로 막는 사람이 이긴다. (중앙에 있는 말로 막으면 안 된다.)

(2.3.1) **(2.3)의 증명.** 6개의 말이 다음과 같고 나머지 말 3개가 *로 표시된 방에 있다고 하자. 모두 몇 가지 다른 경우가 있는가? 즉, *로 표시된 방 들에 말들이 배치될 수 있는 모두 몇 가지 경우가 있는가?

<표 10>

| | | |
|---|---|---|
| A | A | |
| | B | |
| * | * | * |
| | A | |
| B | B | |

증명의 나머지 부분을 각자 완성하자. [7 cm]

**(2,3)의 응용**

(2.3.2) 말이 배치가 다음<표 11>과 같고 A차례라면 어떻게 될까? A의 가능성을 얘기하고 그 결과를 알아보자.

<표 11>

| | | |
|---|---|---|
| A | | A |
| | B | |
| | A | A |
| | B | |
| B | | B |

7cm

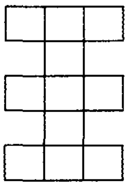
(2.3.3) 말의 배치가 <표 11>과 같고 이제 B차례라면 어떻게 될까? B의 가능성을 얘기하고 그 결과를 알아보자. [7 cm]

(2.3.4) 위의 두 예에서 무엇을 알 수 있었나? [3 cm]

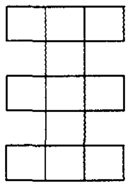
**(2.4) 시작전략 -시작은 어떻게 해야 하나?**

A가 먼저 한다고 하자. (2.3)까지 알아낸 사실을 바탕으로 A와 B가 각각 두 번씩 말을 옮겨야 한다면 어떻게 말을 움직여야 할 지 모든 가능한 경우를 아래 표에 나타내자.

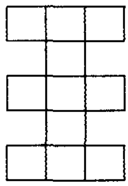
<표 12>



<표 13>



<표 14>



**(2.5)** (2.4)의 세 경우에서 먼저 공격하면 진다. (*먼저 공격한다는 용어의 설명 필요)
(2.5)의 명제는 참인가, 거짓인가? 여러분의 주장을 증명하여라. [8 cm]

**(2.6)**
(2.6.1) A가 적힌 카드가 두 장, B가 적힌 카드가 두 장, E가 적힌 카드가 한 장 있을 때 이 중 세 장를 뽑아 한 줄로 세우는 방법의 수는 모두 몇 가지인가? 모든 가능한 경우를 열(세로)로 배열하여 아래에 나타내자. [4 cm]
(2.6.2) 공동방에 A와 B의 말이 두 개씩 나와 있을 때 공동방에서의 나머지 말 4개의 배열은 모두 몇 가지가 가능할까? 놀이의 전략이 똑 같은 경우는 같은 것으로 한다.
이 문제는 문제 (2,6.1)과 어떤 관계가 있나? [4 cm]

**중간점검.**
- 시작은 어떻게 해야 하나?
- 먼저 공격하는 게 유리한가, 불리한가?
- 먼저 공격하는 게 불리하다면 그 이유는 무엇인가?

**(2.7) 중간전략-먼저 공격해서 이로운 공동방의 말의 배치는 있는가?**

(2.7)에서는 <표 15>와 같이 A의 두 말은 ①과 ③에 B의 두 말은 ⑨와 ⑪에 있고 나머지는 공동방에 있다고 하자.
(2.6.2)의 모든 경우를 팀원끼리 나누어 분석하여라. [9 cm]

<표 15>

| | | |
|---|---|---|
| A | | A |
| | * | |
| * | * | * |
| | * | |
| B | | B |

**(2.8) 중간전략-계속**
**(2.8.a)** A가 먼저 공격해서 불리한 경우 중 기억하기 쉬운 경우를 분류해보자. [4 cm]
**(2.8.b)** B가 먼저 공격해서 불리한 경우 중 기억하기 쉬운 경우를 분류해보자. [2 cm]

**(2.9) 공격**
**(2.9.a) 정리**. A가 먼저 공격해서 이길 수 있는 공동방의 말의 배치는 **다음의 경우**뿐이다. 이 다음

의 경우를 모두 찾아라. [4 cm]

**(2.9.b) 정리**. B가 먼저 공격해서 이길 수 있는 공동방의 말의 배치는 **다음의 경우**뿐이다. 이 다음의 경우를 모두 찾아라. [2 cm]

**(2.10)** 지금까지의 자료를 바탕으로 A와 B는 (2.4)의 시작전략의 수정이 필요한지 분석하여라. [ ]

**(2.11)** 이제 먼저 하는 사람이 유리한 지 뒤에 하는 사람이 유리한지 지금까지의 자료를 바탕으로 분석하여라. 또 항상 이길 수 있는 사람이 있는지도 분석하여라. [ ]

## <부록 3> 김홍도의 풍속도