韓國數學敎育學會
<全國數學敎育研究大會 프로시딩>
제 37회. 2006. 10. 91-101

Korea Soc. Math. Ed.
Proceedings of National Meeting of Math. Ed.
The 37th. Oct. 2006. 91-101

대칭다항식(symmetric polynomials)의 활용에 관한 연구

권 영 인 (경상대학교)
신 현 국 (김해분성고등학교)
김 문 섭 (창원여자고등학교)

1. 서 론

수학교육과정에서 다항식은 세계 어느 나라를 막론하고 매우 중요한 위치를 차지하고 있다. 우리나라의 경우도 마찬가지로, 중등학교 수학 교육과정을 보면, 다항식은 매우 중요한 부분인 것을 알 수 있으며, 특히 학생들의 계산능력 향상에 중요한 도구가 될 수 있다.

실제로, 중등학교 수학교육 분야에서 대수 영역에 관련된 많은 연구들을 볼 수 있으며, 이 연구들에는 대수부분의 증명의 본질 및 증명능력 신장에 관한 연구들(2001; 한인기, 2004; 권영인 등), 대수분야에서 오류에 대한 연구들(2001; 이대현, 2003: 김기원, 등) 을 비롯한 많은 연구가 있었고, 지금도 많은 전문가들이 다양한 측면에서 대수 분야의 효율적인 교수-학습에 관련된 많은 연구를 수행하고 있다.

그러나, 현재까지 대수분야의 연구들 중에 대칭다항식에 관련된 심도 있는 논의가 이루어진 것은 매우 드물다. 예를 들어 중등학교에서 가장 친숙한 개념 중에 하나인 동차대칭다항식을 기본대칭다항식으로 표현하는 문제에서 2개나 3개의 변수 동차다항식에서 a^2+b^2, a^3+b^3, $a^2+b^2+c^2$, $a^3+b^3+c^3$은 기본대칭다항식으로 쉽게 표현할 수 있으나, 일반적인 형태인 a^n+b^n, $a^n+b^n+c^n$을 기본대칭다항식으로 표현할 수 있는가? 와 같은 물음에 대한 대답은 수학에 흥미있는 학생들에게조차도 그리 쉽지 않은 질문이 될 것이다.

그리고, 동차대칭다항식을 기본대칭다항식으로 표현하는 것 자체가 대칭다항식의 인수분해, 방정식, 부등식 등에서 다양한 수학 문제의 해결을 위한 중요한 도구가 될 수 있음에도 불구하고 수학 교수-학습과정에서는 학생들에게 대칭다항식을 활용한 다양한 문제해결의 경험을 제공하지 못하고 있다.

본 연구에서는 동차대칭다항식을 기본대칭다항식으로 표현하는 방법에 대한 일반적인 식을 중등학교 교육과정에 맞게 2변수와 3변수에 대해서 유도하고, 유도된 공식을 활용한 다양한 문제해결의 아이디어를 제시할 것이다. 이를 통해, 대칭다항식에 대한 이해의 폭을 넓히고, 효율적인 수학 교수-학습을 위한 다양한 접근을 모색할 것이다.

2. 대칭다항식의 정의

가. 대칭다항식의 정의

n변수 다항식에서 임의의 두 변수 x_i와 x_j를 치환하더라도 식이 변하지 않는 다항식을 대칭다항식이라고 한다. 즉, $f(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots,x_n)=f(x_1',\cdots,x_i',\cdots,x_j',\cdots,x_n')$이 성립하는 식이 대칭다항식이다. 이는 변수 x_1, x_2, $\cdots$, x_n의 새로운 배열을 x_1', x_2', $\cdots$, x_n'이라고 했을 때, $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(x_1',x_2',\cdots,x_n')$이 성립한다는 것과 동치임은 쉽게 알 수 있다.

나. 기본 대칭다항식

n변수 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$에서 $s_1=x_1+x_2+\cdots+x_n$을 1차원 기본 대칭다항식, $s_2=x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n$을 2차원 기본 대칭다항식, $\cdots$, $s_n=x_1x_2\cdots x_n$을 n차원 기본 대칭다항식이라고 한다.

예를 들면, 세 변수 x_1, x_2, x_3에 대한 기본 대칭다항식들은 다음과 같다.

$$\sigma_1(x_1,\ x_2,\ x_3)=x_1+x_2+x_3,\ \sigma_2(x_1,\ x_2,\ x_3)=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$$

$$\sigma_3(x_1,\ x_2,\ x_3)=x_1x_2x_3$$

이제 이것을 간단히 σ_1, σ_2, σ_3라 하자. σ_1, σ_2, σ_3을 변수로 하는 임의의 다항식은 세 변수 x_1, x_2, x_3에 대한 대칭다항식을 이룬다.

다. 동차식의 정의

다항식 $P(tx_1,\ tx_2,\ \cdots,\ tx_m)=t^nP(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m)$을 만족할 때, 다항식 $P(x_1,x_2,\cdots,x_m)$를 n차 동차식이라 한다.

3. 동차대칭다항식을 기본대칭다항식으로 일반화하기

중등학교에서 동차대칭다항식을 기본대칭다항식으로 표현하여 값을 구하는 문제에서 가장 많이 사용되는 식은 우리가 일반적으로 이야기하는 곱셈공식의 변형을 이용해서 푸는 문제이다.

예를 들면,

예1. $a+b=3$, $ab=2$일 때, a^2+b^2, a^3+b^3의 값은 얼마인가?

예2. $a+b+c=3$, $ab+bc+ca=2$, $abc=1$일 때, $a^3+b^3+c^3$의 값은 얼마인가?

이 두 문제에서 구하고자 하는 값인 a^2+b^2, a^3+b^3, $a^3+b^3+c^3$은 동차대칭다항식이다. 기본대칭다항식을 이용하여 동차대칭다항식의 값을 좀 더 일반화한 a^n+b^n, $a^n+b^n+c^n$(단, n은 자연수)의 값을 구하여 보자.

정리1. 변수 a, b에 대한 기본대칭다항식 $\sigma_1=a+b$, $\sigma_2=ab$이다.

이때 n차의 동차대칭다항식을 $S_n=a^n+b^n$이라고 하면, $S_1=\sigma_1$, $S_2=\sigma_1^2-2\sigma_2$, $S_n=\sigma_1 S_{n-1}-\sigma_2 S_{n-2}$ (단, $n \geqq 3$)가 성립함을 증명하여라.

증명. 수학적 귀납법으로 증명해보자

먼저 $n=3$일 때, (좌변) $S_3=a^3+b^3$

$$\text{(우변) } \sigma_1 S_2-\sigma_2 S_1 = \sigma_1(\sigma_1^2-2\sigma_2)-\sigma_2\sigma_1 = \sigma_1^3-3\sigma_2\sigma_1 = (a+b)^3-3ab(a+b)$$

이므로 성립한다.

$n=k$일 때 $S_k=\sigma_1 S_{k-1}-\sigma_2 S_{k-2}$ 이 성립한다고 가정하면,

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= a^{k+1}+b^{k+1} \\ &= (a^k+b^k)(a+b)-ab(a^{k-1}+b^{k-1}) \\ &= \sigma_1 S_k-\sigma_2 S_{k-1} \end{aligned}$$

이 성립한다.

변수가 3개인 임의의 동차대칭다항식을 기본대칭다항식으로 표현하가 위해 먼저, $a^2+b^2+c^2$을 대칭다항식으로 표현해 보면 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$이므로, $\sigma_1^2-2\sigma_2$가 성립함을 쉽게 알 수 있다.

이제 $a^3+b^3+c^3$을 기본대칭다항식의 함수로 표현해 보자.

$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3a^2b+3b^2c+3c^2a+3ab^2+3bc^2+3ca^2+6abc$으로 전개되므로 $a^3+b^3+c^3 = \alpha\sigma_1^3+\beta\sigma_1\sigma_2+\gamma\sigma_3$으로 표현할 수 있다.

$a=1$, $b=c=0$을 대입해 보면, $\sigma_1=1$이고 $\sigma_2=\sigma_3=0$이므로, $\alpha=1$이다.

$a=b=1$, $c=0$을 대입해 보면, $\sigma_1=2$이고, $\sigma_2=1$, $\sigma_3=0$이므로, $\beta=-3$이다.

$a=b=c=1$을 대입해 보면, $\sigma_1=3$이고, $\sigma_2=3$, $\sigma_3=1$이므로, $\gamma=3$이다.

따라서, $a^3+b^3+c^3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3$

정리2. 변수 a, b, c에 대한 기본대칭다항식 $\sigma_1 = a+b+c$, $\sigma_2 = ab+bc+ca, \sigma_3 = abc$이다. 이때 n차의 동차대칭다항식을 $S_n = a^n + b^n + c^n$이라고 하면, $S_1 = \sigma_1$, $S_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$ $S_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$, $S_n = \sigma_1 S_{n-1} - \sigma_2 S_{n-2} + \sigma_3 S_{n-3}$ (단, $n \geqq 4$)가 성립함을 증명하여라.

증명. 수학적 귀납법으로 증명하면,

먼저 $n=4$ 일 때, (좌변) : $S_4 = a^4 + b^4 + c^4$

$$\begin{aligned}(\text{우변}) &= \sigma_1 S_3 - \sigma_2 S_2 + \sigma_3 S_1 \\ &= \sigma_1(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3) - \sigma_2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) + \sigma_3\sigma_1 \\ &= \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3 \\ &= (a+b+c)^4 - 4(a+b+c)^2(ab+bc+ca) + 2(ab+bc+ca)^2 + 4(a+b+c)abc \\ &= a^4 + b^4 + c^4\end{aligned}$$

또 다른 방법으로

$$\begin{aligned}(a+b+c)^4 = {} & a^4 + b^4 + c^4 + 4ab^3 + 4a^3b + 4ac^3 + 4bc^3 + 4a^3c + 4b^3c + 6a^2b^2 + 6a^2c^2 \\ & + 6b^2c^2 + 12abc^2 + 12ab^2c + 12a^2bc\end{aligned}$$

으로 전개되므로 $a^4 + b^4 + c^4 = \alpha\sigma_1^4 + \beta\sigma_1^2\sigma_2 + \gamma\sigma_2^2 + \delta\sigma_1\sigma_3$으로 표현할 수 있다.

$a=1$, $b=c=0$을 대입해 보면, $\sigma_1 = 1$이고 $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$이므로, $\alpha = 1$이다.

$a=1, b=-1$, $c=0$을 대입해 보면, $\sigma_1 = 0$이고, $\sigma_2 = -1$, $\sigma_3 = 0$이므로, $\gamma = -3$이다.

$a=b=1$, $c=0$을 대입해 보면, $\sigma_1 = 2$이고, $\sigma_2 = 1$, $\sigma_3 = 0$이므로, $\beta = -4$이다.

$a=b=c=1$을 대입해 보면, $\sigma_1 = 3$이고, $\sigma_2 = 3$, $\sigma_3 = 1$이므로, $\delta = 4$이다.

따라서, $a^4 + b^4 + c^4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3$

$n=k$일 때, $S_k = \sigma_1 S_{k-1} - \sigma_2 S_{k-2} + \sigma_3 S_{k-3}$이 성립한다고 가정하자.

$$\begin{aligned}S_{k+1} &= a^{k+1} + b^{k+1} + c^{k+1} \\ &= (a^k + b^k + c^k)(a+b+c) - a(b^k + c^k) - b(a^k + c^k) - c(a^k + b^k) \\ &= \sigma_1 S_k - (a^k b + ab^k + b^k c + bc^k + a^k c + ac^k) \\ &= \sigma_1 S_k - ab(a^{k-1} + b^{k-1}) - bc(b^{k-1} + c^{k-1}) - ca(a^{k-1} + c^{k-1}) \\ &= \sigma_1 S_k - (ab+bc+ca)(a^{k-1} + b^{k-1} + c^{k-1}) + abc^{k-1} + ab^{k-1}c + abc^{k-1} \\ &= \sigma_1 S_k - \sigma_2 S_{k-1} + abc(a^{k-2} + b^{k-2} + c^{k-2}) \\ &= \sigma_1 S_k - \sigma_2 S_{k-1} + \sigma_3 S_{k-2}\end{aligned}$$

이 성립한다.

4. 문제해결에서 대칭다항식의 활용

가. 인수분해에서 대칭다항식의 활용

중등학교 수학에서 인수분해는 식의 정리 뿐 아니라 방정식, 부등식, 함수의 문제해결하기 위해 꼭 알아야 하는 중요한 개념이다. 특히 인수분해에서 주어진 다항식이 대칭다항식으로 표현된 경우가 많다. 그래서 대칭다항식으로 표현된 다항식을 인수분해하는 다양한 문제해결의 아이디어를 살펴보자.

문제1. $a^3+b^3+c^3-3abc$를 인수분해하여라.

풀이 $f(a,b,c)=a^3+b^3+c^3-3abc$라 하면

$$f(b,a,c)=b^3+a^3+c^3-3bac=f(a,b,c)$$
$$f(a,c,b)=a^3+c^3+b^3-3acb=f(a,b,c)$$
$$f(c,b,a)=c^3+b^3+a^3-3cba=f(a,b,c)$$

이 성립하므로 $f(a,b,c)=a^3+b^3+c^3-3abc$는 대칭다항식이다.

$f(a,b,c)$는 3차의 대칭다항식이므로 다음과 같은 기본대칭다항식으로 표현할 수 있다.

$$f(a,b,c)=\alpha\sigma_1^3+\beta\sigma_1\sigma_2+\gamma\sigma_3 \cdots ①$$

①번 식의 a,b,c에 적당한 값을 대입하여 α,β,γ의 값을 계산하면, $\alpha=1,\beta=-3,\gamma=0$을 구할 수 있다. 그래서,

$$\begin{aligned} f(a,b,c) &= (a+b+c)^3-3(a+b+c)(ab+bc+ca) \\ &= (a+b+c)\{(a+b+c)^2-ab-bc-ca)\} \\ &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \end{aligned}$$

문제2. $(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$ 을 인수분해 하여라.

풀이 $f(x,y,z)=(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$라고 두면, $f(x,y,z)$는 대칭다항식이다.

이 때, $f(x,-x,z)=f(x,y,-x)=f(x,y,-y)=0$이므로 $f(x,y,z)$는 $x+y$, $x+z$, $y+z$의 인수를 가진다.

따라서 $f(x,y,z)=(x+y)(y+z)(z+x)g(x,y,z)$ $\cdots$ ①이라 둘 수 있다.

$g(x,y,z)$는 이차동차대칭다항식이므로 $g(x,y,z)=a\sigma_1^2+b\sigma_2$와 같은 형태로 둘 수 있다.

즉, $(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$

$$=(x+y)(y+z)(z+x)\{a(x+y+z)^2+b(xy+yz+zx)\}\cdots ②$$

여기서 ②의 식에 $x=y=z=1$을 대입하면, $3a+b=10$이다. 또, $x=y=1$, $z=0$을 ②의 식에 대입하면, $4a+b=15$이다. 두 식을 연립하면, $a=5,b=-5$이고,

$$g(x,y,z)=5\{(x+y+z)^2-xy-yz-zx\}$$
$$=5(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)$$
$$\therefore (x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5= 5(x+y)(y+z)(z+x)(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)$$

문제3. 다음의 다항식을 정수계수 다항식의 곱으로 인수분해 하여라.

$$(x+y+z)^4-(y+z)^4-(z+x)^4-(x+y)^4+x^4+y^4+z^4$$

풀이 주어진 식을 $P_1(x,y,z)$라 하자. $P_1(0,y,z)=P_1(x,0,z)=P_1(x,y,0)=0$이므로 일반화된 인수정리에 의하여 $P_1(x,y,z)$는 x,y,z로 나누어떨어진다.

즉, $P_1(x,y,z)=xyzQ_1(x,y,z)$이고 이때 $Q_1(x,y,z)$는 차수 비교에 의하여 1차식임을 알 수 있다. 한편 $P_1(x,y,z)$는 대칭다항식이므로 $Q_1(x,y,z)$도 대칭다항식이다. 결론적으로 $Q_1(x,y,z)$는 1차의 대칭다항식이므로 $Q_1(x,y,z)=k(x+y+z)$임을 알 수 있다.

한편 $3k=P_1(1,1,1)=81-48+3=36$이므로 $k=12$이다.

따라서 $P_1(x,y,z)=12xyz(x+y+z)$이다.

문제4. 다항식 $p(x,y,z)=x^5+y^5+z^5+k(x^3+y^3+z^3)(x^2+y^2+z^2)$의 인수가 $x+y+z$가 되게 하는 상수 k값을 구하고, 또 그 k의 값에 대해 $p(x,y,z)$는 $(x+y+z)^2$을 인수로 가짐을 보여라.

풀이

주어진 식을 $x+y+z$로 나눈다는 것은 $x+y+z$을 0과 동일시한다는 것이고 이것은 x와 $-y-z$을 동일시하는 것과 같은 의미이다. $p(-y-z,y,z)=0$과와 필요충분조건으로 $x-(-y-z)$가 $p(x,y,z)$의 인수라 볼 수 있다. 따라서 $p(-y-z,y,z)=0$인 k값을 찾을 것이다. 이 등식은

$$(-y-z)^5+y^5+z^5+k((-y-z)^3+y^3+z^3)\times((-y-z)^2+y^2+z^2)=0$$
$$-(5+6k)yz(y+z)(y^2+yz+z^2)\equiv 0$$

따라서, $k=-\dfrac{5}{6}$

이제 $k=-\dfrac{5}{6}$일 때, $(x+y+z)^2$을 인수로 가짐을 보여보자.

방법1.

$p(x,y,z)=6(x^5+y^5+z^5)-5(x^3+y^3+z^3)(x^2+y^2+z^2)$라 놓고,

정리2. 를 이용해서 준 식을 정리하면

$$p(x,y,z)=6S_5-5S_3S_2$$

$$= a^2(a^3 - 5ab + 15c)$$
$$= (x+y+z)^2\{(x+y+z)^3 - 5(x+y+z)(xy+yz+zx) + 15xyz\}$$
$$= (x+y+z)^2\{x^3+y^3+z^3+6xyz-2(x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2)\}$$

과 같이 인수분해 되므로, 준 식은 $(x+y+z)^2$는 인수가 된다.

방법2.

삼차방정식 $t^3 - at^2 + bt - c = 0$ ………………………………………… ①

의 근을 x, y, z라 하자. (단, $a = x+y+z$, $b = xy+yz+zx$, $c = xyz$)

$S_n = x^n + y^n + z^n$으로 놓으면,

$S_1 = a,\ S_2 = a^2 - 2b$ ………………………………………… ②

S_3는 ①에서 얻을 수 있는데, $S_3 - aS_2 + bS_1 - 3c = 0$

②의 값을 대입해서 정리하면, $S_3 = a^3 - 3ab + 3c$ ………………………………………… ③

t와 t^2을 각각 ①에 곱하면서, 근들을 합하면,

$S_4 - aS_3 + bS_2 - cS_1 = 0$

$S_5 - aS_4 + bS_3 - cS_2 = 0$

②, ③을 대입해서 정리하면,

$S_4 = a^4 - 4a^2b + 4ac + 2b^2$

$S_5 = a^5 - 5a^3b + 5a^2c + 5ab^2 - 5bc$

마지막으로,

$p(x,y,z) = 6(x^5+y^5+z^5) - 5(x^3+y^3+z^3)(x^2+y^2+z^2)$라 놓고,

$$p(x,y,z) = 6S_5 - 5S_3S_2$$
$$= a^2(a^3 - 5ab + 15c)$$
$$= (x+y+z)^2\{(x+y+z)^3 - 5(x+y+z)(xy+yz+zx) + 15xyz\}$$
$$= (x+y+z)^2\{x^3+y^3+z^3+6xyz-2(x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2)\}$$

나. 방정식에서 대칭다항식의 활용

기본대칭다항식은 방정식의 근과 계수와의 관계와 밀접한 관련이 있다. 그래서 기본대칭다항식을 사용하여 방정식의 해를 구하는 다양한 문제해결의 아이디어를 찾아보자.

문제1. $\alpha = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} + \sqrt[3]{-\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}}$ 가 방정식 $x^3 + \sqrt[3]{6}\,x^2 - 1 = 0$의 해임을 보여라.

풀이 대칭다항식을 이용해서 α가 방정식의 해임을 보이기 위해 a,b,c를 각각

$a=\sqrt[3]{\frac{1}{9}}, b=\sqrt[3]{-\frac{2}{9}}, c=\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$ 이라고 하자.

$$a^3+b^3+c^3=\frac{1}{9}-\frac{2}{9}+\frac{4}{9}=\frac{1}{3},\ abc=\sqrt[3]{\frac{1}{9}\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)\cdot\left(\frac{4}{9}\right)}=-\frac{2}{9}$$

$$\begin{aligned}ab+bc+ca&=\sqrt[3]{-\frac{2}{81}}+\sqrt[3]{-\frac{8}{81}}+\sqrt[3]{\frac{4}{81}}=\sqrt[3]{-\frac{2}{9}}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}}+\sqrt[3]{-\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{4}{9}}\right)\\&=\sqrt[3]{-\frac{2}{9}}\cdot\alpha\end{aligned}$$

$a^3+b^3+c^3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3$이므로 값을 대입하면 $\frac{1}{3}=\alpha^3-3\alpha\sqrt[3]{-\frac{2}{9}}\alpha-\frac{2}{3}$이고, 이 식을 정리하면 $\alpha^3+\sqrt[3]{6}\alpha^2-1=0$이므로 α는 방정식의 근이다.

문제2. 연립방정식 $\begin{cases}a^2+b^2=\frac{3}{7}\\a^3+b^3=3\end{cases}$의 해를 구하여라.

풀이 두 식을 대칭다항식으로 표현하면 $a^2+b^2=\sigma_1^2-2\sigma_2=\frac{7}{3}$, $a^3+b^3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2=3$.

이 첫번째 식을 σ_2에 관해서 정리해서 두 번째에 대입하면, $\sigma_1^3-7\sigma_1+6=0$이 되고, 이 식을 풀면 $\sigma_1=1,\ 2,\ -3$이다.

그래서 $\alpha_1=1,\sigma_2=-\frac{2}{3}$일 때, 근과 계수와의 관계에 의해 해 (a,b)는 이차방정식 $x^2-x-\frac{2}{3}=0$의 해와 같다.

그래서 해 $(a,b)=\left\{\left(\frac{3+\sqrt{33}}{6},\frac{3-\sqrt{33}}{6}\right),\left(\frac{3-\sqrt{33}}{6},\frac{3+\sqrt{33}}{6}\right)\right\}$이다.

같은 방법으로 해서 해를 구하면, $\alpha_1=2,\sigma_2=\frac{5}{6}$의 해는

$$(a,b)=\left\{\left(\frac{1+\sqrt{6}}{6},\frac{1-\sqrt{6}}{6}\right),\left(\frac{1-\sqrt{6}}{6},\frac{1+\sqrt{6}}{6}\right)\right\}.$$

$\alpha_1=-3,\sigma_2=\frac{10}{3}$의 해는

$$(a,b)=\left\{\left(\frac{-9+\sqrt{39}i}{6},\frac{-9-\sqrt{39}i}{6}\right),\left(\frac{-9-\sqrt{39}i}{6},\frac{-9+\sqrt{39}i}{6}\right)\right\}.$$

문제3. 연립방정식 $\begin{cases} a+b+c=2 \\ a^2+b^2+c^2=6 \\ a^3+b^3+c^3=8 \end{cases}$ 의 해를 구하여라.

풀이 세 식을 대칭다항식으로 표현하면

$a+b+c=\sigma_1=2,\ a^2+b^2+c^2=\sigma_1-2\sigma_2=6,\ a^3+b^3+c^3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3=8$

이 세 식에서 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$의 값을 구하면, $\sigma_1=2,\sigma_2=-1,\sigma_3=-2$이다.

3차의 근과 계수와의 관계에 의해 a,b,c는 3차방정식 $x^3-2x^2-x+2=0$의 근이다.

그래서

$$(a,b,c)=\{(-1,1,2),(-1,2,1),(1,-1,2),(1,2,-1),(2,1,-1),(2,-1,1)\}$$

다. 대칭다항식에서의 일반성을 잃지 않는 가정

대칭다항식의 가장 큰 특징 중에 하나는 주어진 대칭다항식을 구성하는 문자들 사이에 대소 관계를 어떤 하나의 경우로 고정하여도 일반성을 잃지 않는다는 것이다. 예를 들어 대칭다항식형 부등식은 그 부등식의 증명에 있어서 주어진 부등식을 구성하는 문자가 $a,\ b,\ c,\ \cdots$일 때 $a\geq\ b\geq\ c\geq\ \cdots$라 가정하여도 일반성을 잃지 않는 다는 점이다. 왜냐하면 대칭다항식은 대수적 변형에 의하여 대칭다항식임은 변화되지 않으므로 문자들의 크기가 $a\geq\ b\geq\ c\geq\ \cdots$인 경우의 증명과정과 문자들의 대소가 바뀐 경우의 답안은 정확하게 일치하게 되기 때문이다. 이러한 사실은 대칭다항식에 관한 문제 풀이에 있어서 매우 중요한 문제해결 전략 중의 하나이다.

문제1. 임의의 양수 $a,\ b,\ c$에 대하여, 부등식 $(a+b+c)^{100}<\ 3^{100}(a^{100}+b^{100}+c^{100})$이 성립함을 보여라.

증명 주어진 식은 대칭다항식이므로 $a\geq b\geq c$라 가정하고 풀어도 일반성을 잃지 않는다.

$a\geq\ b\geq\ c$ 인 경우 $a+b+c\leq\ a+a+a=3a$가 성립한다.

따라서,

$$(a+b+c)^{100}\leq(3a)^{100}<\ 3^{100}(a^{100}+b^{100}+c^{100})$$

문제2. 임의의 양수 $a,\ b,\ c$에 대하여,

부등식 $(a-b)^2(a+b-c)+(a-c)^2(a+c-b)+(b-c)^2(b+c-a)\geq 0$이 성립함을 보여라.

증명 주어진 식은 대칭다항식이므로 $a\geq b\geq c$라 가정하고 풀어도 일반성을 잃지 않는다.

$a\geq\ b\geq\ c$ 인 경우 $a=c+u+v,\ b=c+u$ (단, $u,v>0$)라 놓고 주어진 식을 변형하면,

$$v^2(a+2u+v)+(u+v)^2(a+v)+u^2(a-v)\geq 0$$

문제3. 임의의 양수 a, b, c에 대하여, 부등식 $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geqq \frac{3}{2}$이 성립함을 보여라.

증명 주어진 식은 대칭다항식이므로 $a \geqq b \geqq c$라 가정하고 풀어도 일반성을 잃지 않는다.

$a \geqq b \geqq c$ 인 경우 $\frac{1}{(b+c)} \geqq \frac{1}{(c+a)} \geqq \frac{1}{(a+b)}$이 성립한다.

따라서

$$a\times\frac{1}{(b+c)}+b\times\frac{1}{(c+a)}+c\times\frac{1}{(a+b)}$$

$$\geqq b\times\frac{1}{(b+c)}+c\times\frac{1}{(c+a)}+a\times\frac{1}{(a+b)} \cdots ①$$

$$a\times\frac{1}{(b+c)}+b\times\frac{1}{(c+a)}+c\times\frac{1}{(a+b)}$$

$$\geqq c\times\frac{1}{(b+c)}+a\times\frac{1}{(c+a)}+b\times\frac{1}{(a+b)} \cdots ②$$

이 성립하고 ①와 ②를 변변 더하면

$$2\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right) \geqq \frac{a+b}{a+b}+\frac{b+c}{b+c}+\frac{a+c}{a+c}=3$$

그러므로 $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geqq \frac{3}{2}$

5. 결 론

본 연구에서는 동차대칭다항식을 기본대칭다항식으로 표현하는 방법에 대한 일반적인 식을 중등학교 교육과정에 맞게 2변수와 3변수에 대해서 유도하고, 유도된 공식을 활용한 다양한 문제해결의 아이디어를 제시할 것이다. 이를 통해, 대칭다항식에 대한 이해의 폭을 넓히고, 효율적인 수학 교수-학습을 위한 다양한 접근을 모색하였다.

본 연구에서는 동차대칭다항식을 기본대칭다항식으로 표현하는 문제에서 2개나 3개의 변수 동차다항식에서 n차의 동차대칭다항식(a^n+b^n, $a^n+b^n+c^n$)을 기본대칭다항식으로 표현하는 일반적인 방법을 제시하여 대칭다항식에 대한 체계적인 접근을 하였다.

그리고, 동차대칭다항식을 기본대칭다항식으로 표현하는 것 자체가 대칭다항식의 인수분해, 방정식, 부등식 등에서 다양한 수학 문제의 해결에 대한 해결전략을 제시하여 수학 교수-학습과정에서는 학생들에게 대칭다항식을 활용한 다양한 문제해결의 경험을 제공하였으며, 또 다른 문제들의 해결과정에도 활용될 수 있다.

본 연구에서 제시된 대칭다항식을 이용한 다양한 수학 문제의 해결에 대한 해결전략은 교사가 학생들에게 심화학습으로 적절하게 소개해도 될 것이다.

참 고 문 헌

권영인 · 서보억 (2004). 코사인 제2법칙의 다양한 증명방법 분석, <수학교육 논문집> 서울: 한국수학교육학회

김기원 · 왕수민 (2003). 고등학교 수학에서 수열의 극한개념의 지도에 관한 연구, <수학교육 논문집> 서울: 한국수학교육학회

대한수학회 올림피아드 편집위원회 (2000). 수학올림피아드, 서울: 좋은 책

수일교육미디어 (2004). 경시대회 수학 길잡이, 서울: 세화

이대현 · 박배훈 (2001). 수학교육에서 직관과 오류에 관한 고찰, <수학교육 논문집> 서울: 한국수학교육학회

한국과학기술원수학문제연구회 (1999). MATH LETTER, 대전: (주) 셈틀로미디어

한인기 (2001). 코시부등식에 관한 연구, <수학교육 논문집> 서울: 한국수학교육학회

E. Barbeau · M. Klamkin · W. Moser. Five Hundred Mathematical Challenges, THE MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA

Jiri Herman · Radan Kucera · Jaromir Simsa (2000). *Equations and Inequalities*, Springer