韓國數學敎育學會
<全國數學敎育硏究大會 프로시딩>
제 37회. 2006. 10. 79-90

Korea Soc. Math. Ed.
Proceedings of National Meeting of Math. Ed.
The 37th. Oct. 2006. 79-90

초등학교 5학년 학생들의 넓이 측정과 관련된 지식 상태의 분석

박 혜 경 (한국교원대학교 대학원)
김 영 희 (광운대학교)
전 평 국 (한국교원대학교)

새로운 것을 학습할 때 학생들은 자신이 어떤 지식 상태를 갖고 있는지에 따라 상당히 다른 이해의 정도를 나타낸다. 유의미한 이해를 이끌어 내기 위해서 교사들은 학생들의 사전 지식상태를 파악하고 그것에 근거하여 학습과제를 제시할 필요가 있으며, 어떤 단원을 학습한 후에 학생들의 지식상태를 파악해 보는 방법도 모색되어야 할 것이다.

본 연구는 충청북도 C도시 4개 초등학교 5학년 학생 285명에게 수학 5-가 6단원을 학습한 후 넓이 측정과 관련된 지식상태 검사를 실시하고 그 결과를 Doignon & Falmagne(1999)의 지식공간론을 활용하여 분석하였다. 학생들의 답안에서 평면도형의 넓이 측정과 관련된 지식의 상태를 파악하고 세 가지 범주-측정의 의미 파악, 공식 활용, 전략의 사용-에서 지식 상태의 위계도를 작성하였다. 첫 번째 범주인 측정의 의미 파악과 관련하여 학생들은 둘레나 넓이의 속성 파악에서 혼동을 보이거나 직관적으로 넓이를 비교해야 하는 과제에서도 계산을 시도하는 지식 상태가 반 이상인 것으로 드러났다. 두 번째 범주인 공식 활용과 관련해서는 학생들의 상당수가 부적합한 수치를 넣어 무조건 넓이 계산을 시도하고 있었다. 또한 세 번째 범주인 전략 사용에 관해서는 분할이나 등적변형 등의 전략을 알고 있는 학생 중에도 40% 가량은 문제를 표상하는데 어려움이 있어 해결하지 못하는 것으로 드러났다.

1. 들어가는 말

학생들의 학습은 이해를 수반하면서 이루어져야 한다는 것이 여러 수학교육 연구에서 지적되고 있다. 현장에서의 교사들의 경험도 새로운 것을 학습할 때 학생들은 자신이 갖고 있는 사전 지식이나 사전 지식의 구조 상태에 따라 상당히 다른 이해의 정도를 나타낸다는 것을 뒷받침해 주고 있다. 학생들은 그들 앞에 주어진 문제를 해결하는 과정에서 이미 알고 있던 지식을 적용하여 문제를 해결하기도 하고, 쉽게 해결되지 않는 문제들 앞에서는 이제까지 따로따로 알고 있던 지식들을 관련시켜 문제의 구조를 파악하려고도 하며, 때로는 획기적인 발상으로 새로운 지식을 획득하기도 한다(Anderson, 1995). 심지어 창의성을 발휘해 새로운 해결책을 생각해낼 때조차 학생들의 사전지식은 그 밑바탕이 된다(전평국 외, 2004). 그러므로 교사들이 학생들의 유의미한 이해를 이끌어내기 위해서는 학생들의 지식상태를 파악하고 그것에 근거하여 학습과제를 제시할 필요가 있겠다.

본 연구는 유의미한 이해를 바탕으로 측정 학습이 이루어지도록 하기 위해 초등학교 5학년 학생

의 평면도형 둘레와 넓이에 관한 지식 상태를 분석해 보고자 하였다. 분석 결과를 바탕으로 학생 개인의 지식 상태를 파악할 수 있을 것이며 교사들이 유의미한 이해를 이끌어내기 위한 학습경로를 계획하는데 참고가 될 수 있을 것이다.

2. 이론적 배경

A. 지식 구조 파악을 위한 선행 연구

지식 구조를 파악하기 위한 노력은 인지심리학자들 사이에서 꽤 오래 전부터 진행되어 왔다. Collins & Quillian(1972)은 지식구조를 네트워크 모델로 설명하였고, Greeno(1978)는 잘 구조화된 지식의 준거를 제시하였다. 학생들의 사전 지식의 상태를 네트워크 명제망으로 알아보거나 잘 구조화된 지식의 준거와 비교하여 파악하려 한다면 일부 학자들이 연구를 위해 계획했던 방법을 따라야 한다. 예를 들어 개념들에 대한 회상 반응 시간을 측정(e. g. Collins & Quillian,1972; Laudauer & Meyer, 1972)하여 학생이 갖고 있는 개념들 사이의 위계 관계를 살펴보는 경우를 생각해 보자. 이러한 방법을 많은 수의 학생들에게 동시에 적용하여 활용한다는 것은 현장 교사들에게 있어 결코 쉬운 일이 아닐 것이다. 그러므로 학교 현장에서의 활용을 위해선 학생들의 지식 상태를 파악하기 위해 반복적으로 사용 가능한 모델이 되는 도구가 필요하다.

B. 지식공간론에서의 지식 구조

지식공간론에서는 평가문항에 대한 구체적인 배경지식과 관계없이 지식 상태만을 토대로 지식 구조를 파악하기 위한 이론을 전개해 가고 있다. 본 연구에서는 지식 공간론으로 학생들의 지식 상태를 파악하여 지식 구조를 위계로 나타내 보고자 하므로 이를 위해 필요한 용어를 간단히 언급하도록 하겠다.

· 지식 상태(knowledge state)

어떤 학생이 맞힌 문항의 집합을 지식 상태(knowledge state)라 한다. 이 집합은 그 학생에 대한 지식 정보를 가지고 있으며, 충분히 많은 학생이 같은 평가문항으로 평가를 받았다면 다른 학생의 지식 상태와 비교하여 그 학생의 현재의 지식 수준을 알 수 있을 것이다.

· 지식 구조(knowledge structure)

평가문항의 집합을 **Q**라고 하고 지식 상태들을 원소로 하는 어떤 집합을 **K**라 하자. 이 때 집합 **K**가 공집합 $\varnothing$와 전체집합 **Q**를 포함하면, 순서쌍 **(Q, K)**를 지식 구조(knowledge structure)라 한다[1]. 또한 특별히 혼란이 없을 경우, 지식구조 **(Q, K)**를 **K**로도 표시한다.

---

1) 이러한 정의를 통해 지식공간론에서의 지식 구조란 평가 결과로부터 얻어지는 하나의 집합이다.

· 지식 공간(knowledge space)

두 개의 지식 상태 $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$에 대하여 $\mathbf{K}_1 \cup \mathbf{K}_2$ 도 하나의 지식 상태가 되며[2], 지식 구조 (**Q, K**)에 대해서 **K**는 합집합 연산에 대하여 닫혀 있게 된다. 그러므로 **K**의 임의의 부분 집합 **F**에 대해서 $\cup \mathbf{F} \in \mathbf{K}$ 일 때 (**Q, K**)를 지식 공간(knowledge space)이라고 한다.

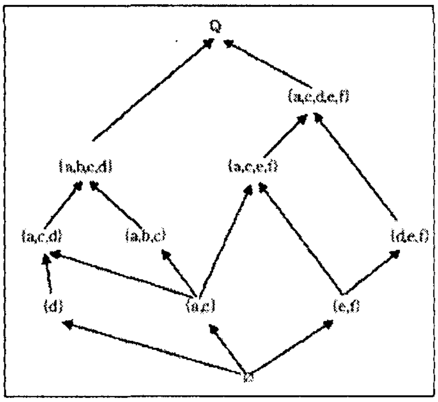
예를 들어 학생들의 지식 상태를 위계로 나타낸 지식 구조를 생각해 보자.

평가문항의 집합 **Q** = { a, b, c, d, e, f }에 대해서

지식 상태들의 집합 **K**가 다음과 같이 나타났다면

K = { ∅, {d}, {a, c}, {e, f}, {a, b, c}, {a, c, d}, {d, e, f}, {a, b, c, d}, {a, c, e, f}, {a, c, d, e, f}, **Q**}

(**Q, K**)는 지식 구조가 된다. 이 때 지식 상태들의 위계는 <그림 1>과 같이 나타난다.



<그림 1> 지식 상태의 위계

3. 연구 방법 및 절차

A. 연구 대상 및 연구 방법

충청북도 C도시 소재 54개 초등학교 중에서 무선 표집으로 4개 초등학교를 선정한 후, 각 학교에서 5학년 2개 학급을 임의로 선정하여 총 285명의 학생을 연구대상으로 하였다. 연구 대상 학교들은 사회 경제적인 수준에서는 차이를 나타내고 있었다. 아파트 단지 안에 위치한 1개 학교는 경제적으로 여유가 있어 학원을 통해 선진도 학습을 하는 학생이 대다수를 차지하고 있었으며 학생들의 전입이 많은 학교였다. 주택가에 위치한 2개 학교는 학생들의 전입, 전출이 많지 않은 비교적 안정된 상태였으나 학업에 관한 부모의 관심 정도에서는 차이를 보였다. 나머지 1개 학교는 오래된 주택가에 위치하고 있어 해마다 학급 수가 줄어드는 경향이 있고 교사들은 다른 학교에 비해 자신이 근무하는 학교 학생들의 학력 수준이 뒤떨어지는 것으로 생각하고 있었다.

학생들의 지식 상태를 구조적으로 파악하기 위한 연구 방법으로는 지필 검사 도구를 통한 조사 방법이 사용되었다.

2) 이것은 두 학생 A, B가 충분한 시간을 갖고 서로의 지식 정보를 교환하면 두 학생의 지식을 모두 갖고 있는 수준으로 발전할 수 있다고 가정한 것이다(공주대학교 과학교육연구소, 2002).

B. 검사 도구의 개발

본 연구에 사용된 지식 상태 검사 도구는 수학 5-가 6단원 내용들을 바탕으로 구성 되었다. 평면 도형의 둘레와 넓이 측정 문제를 해결하기 위한 지식의 종류를 의미적 지식, 스키마 지식, 절차적 지식, 전략적 지식의 네 가지로 분류하고 각 종류의 지식과 관련된 평가 문항을 <그림 2>에 요약된 기준에 따라 선정하였다.

(1) 의미적 지식

의미적 지식(Mayer, 1983)은 세상에 대한 사실과 수학적 사실들에 대한 지식들로 Anderson(1995)의 선언적 지식이나 Greeno(1978)의 명제적 지식과 같은 의미로 사용된다. Hiebert & Lefevre (1986)은 이와 같은 지식을 개념적 지식이라 일컫고 있다. 본 연구에서는 다음과 같은 것들에 관한 지식을 일컫는다.

- 둘레와 넓이의 정의와 속성 파악
- 단위 수를 세어 둘레와 넓이 측정하기

(2) 스키마 지식

스키마 지식(Mayer, 1983)은 문제 유형에 관한 지식이다. 본 연구에서는 주어진 길이를 사용해서 넓이를 구할 수 있는 경우와 그렇지 못한 경우를 판단하는 것과 관련된 지식을 일컫는다.

(3) 절차적 지식

절차적 지식은 조작 절차에 관한 지식이다(Mayer, 1983). Greeno(1978)는 이와 같은 지식을 알고리즘 지식이라 하였으며, Hiebert & Lefevre(1986)에 의하면 수학의 형식적 언어와 알고리즘이나 법칙들로 이루어져 있다. 본 연구에서는 넓이 공식들을 알고 사용할 수 있는 지식들을 일컫는다.

- 공식을 이용하여 직사각형, 평행사변형, 삼각형의 넓이 구하기
- 삼각형에서 넓이와 밑변이 주어졌을 때 높이 구하기

(4) 전략적 지식

전략적 지식은 주어진 문제를 해결하기 위해 여러 가지 유용한 지식들을 이용하는 방법에 관한 지식이다. 본 연구에서는 등적 변형이나 문제를 표상하는데 사용하는 지식을 일컫는다.

- 넓이를 구할 수 있는 도형으로 분할해서 넓이 구하기
- 넓이가 같은 도형으로 바꾸어서 넓이 구하기
- 한 도형 안에서 서로 다른 밑변-높이 파악하기

지식 종류	내용 요소	평가 내용	문항 번호	교과서와의 비교
의미적 지식	둘레 속성	평면도형의 둘레가 무엇인지를 알고 일반 사각형의 둘레의 길이를 구할 수 있다.	【10】 【24】	(직사각형만 다룸)
	넓이 속성	평면도형의 넓이가 무엇인지 알고 도형의 넓이를 적절한 방법으로 비교할 수 있다.	【11-13】	
	둘레와 넓이 속성 구분	둘레와 넓이 속성을 구분할 수 있다.	【7】	
	단위의 수	단위를 세어 둘레와 넓이를 구할 수 있다.	【8】 【9】	수학익힘책 91, 95쪽
스키마 지식	문제 유형에 관한 지식	주어진 길이를 사용해서 넓이를 구할 수 있는 경우와 그렇지 못한 경우를 알고 구하는 방법을 떠올릴 수 있다.	【1-6】	(넓이를 구할 수 있는 경우만 다룸)
절차적 지식	기본 도형에 공식 적용	공식을 적용하여 삼각형, 직(정)사각형, 평행사변형의 넓이를 구할 수 있다.	【1, 3, 6】	수학익힘책 112쪽
	공식 응용	삼각형의 넓이와 밑변이 주어졌을 때 높이를 구할 수 있다.	【14】	수학105쪽
전략적 지식	단위 반복 (배열 구성)	조각의 넓이(단위)를 거듭 더해서 도형의 넓이를 구할 수 있다.	【17】	
	등적 변형	넓이가 같은 도형으로 모양 바꾸어서 원래 도형의 넓이를 알아낼 수 있다.	【21】 【25】	수학96쪽
	표 상 (문제 이해)	직사각형의 일부를 제거한 도형으로 표상하거나 분할 방법으로 넓이를 구할 수 있다.	【20】 【23】	수학109쪽 수익101쪽
		밑변과 높이를 몇 배씩 늘어났을 때의 넓이 변화를 표상할 수 있다.	【22】	
		하나의 삼각형(평행사변형)에서 둘 이상의 밑변-높이 사이의 관계를 파악할 수 있다.	【15】 【16】	수학106쪽 (삼각형)
		정사각형의 대각선 성질을 적절히 이용하여 정사각형의 넓이를 구할 수 있다.	【19】	수학108쪽
		둘레를 적절한 방법으로 표상하여 주어진 도형의 둘레를 인식하여 구할 수 있다.	【18】	

<그림 2> 평가 문항 선정기준

C. 검사 실시 및 자료 수집

지식 상태 검사는 2006년 7월 11일부터 13일까지 실시되었는데 검사 당일 연구자가 검사지를 들고 해당 학교에 방문하여 담임교사 감독 하에 실시하였으며 연구자는 두 개 교실을 오가며 검사에 방해가 되지 않을 정도의 참관자 위치에 있었다. 검사 결과지는 당일 연구자가 수거하여 맞은 항목에는 1점, 틀린 항목에는 0점 처리되는 방법으로 자료 입력이 이루어졌다.

D. 자료의 분석

지식 상태 검사 도구의 20개 문항을 3개의 범주로 나누어 분석이 이루어졌다. 범주별 분석 문항은 다음과 같다.

< 범주별 분석 문항 >

범주 1 : 【7】 【8】 【9】 【10】 【11】 【12】 【17】 【24】

범주 2 : 【1】 【2】 【3】 【4】 【5】 【6】 【14】 【15】 【16】

범주 3 : 【17】 【19】 【20】 【21】 【22】 【23】 【25】

각 범주에 대한 학생들의 지식상태는 4개 수준으로 나누어 해석 되었으며 S 수준(Superior; 우수)은 학교에서 배운 내용 지식에 대한 충분한 이해를 나타내고 있으며 교과서에서 다루지 않은 생소한 유형의 문제에도 답할 수 있는 정도의 지식 상태를 가리킨다. 두 번째 C 수준(Common; 보통)의 경우 교과서에서 요구하는 최소한의 지식을 갖춘 지식 상태를 의미하며 D 수준(Deficient; 부족)의 경우는 학교에서 배운 내용은 어렴풋이 알고 있으나 정확하게 알지 못해서 여러 가지 오류를 드러내고 있는 지식 상태이다. 마지막으로 N 수준(Null; 모름)은 그 범주와 관련되어 전혀 아는 바가 없는 정도의 지식 상태를 나타낸다고 할 수 있다.

4. 결과 및 논의

A. 전반적인 지식 상태의 파악

(1) 속성 범주의 지식 상태

학생 285명의 속성 범주 문항에 대한 정답률은 <표 1>과 같이 나타났다. 정답률 40%를 보이는 7번 문항이나 10% 내외의 저조한 정답률을 보이는 10번과 11번 문항도 넓이와 둘레가 무엇인지 알고 있다면 답을 할 수 있어야 하는 문항이다. 그러나 수학 교과서와 수학 익힘책에서 정사각형과 직사각형의 둘레를 계산으로 구하게 할 뿐 변의 길이가 주어진 일반 사각형의 둘레를 생각해 보지 않는다. 그래서 둘레를 구하지 못하는 것은 물론 심지어 둘레가 없다고 생각하는 경우까지 나타난다. 또한 넓이를 비교하기 위해서는 반드시 그 값을 구해야 한다는 생각이 지배적이어서 반 이상의 학생들이 적절한 넓이 비교 전략을 생각하지

<표 1> 속성 범주 문항 정답률

문항 번호	정답률 (%)	교과서에 유사 문제 존재 여부[3]
7	40	×
8	60	○
9	65	○
10	8	×
11	11	×
12	56	△
17	66	○
24	42	△

3) 교과서에 내용과 형식, 난이도가 유사한 문제가 있는 경우에는 ○표, 같은 내용을 묻는 문항이 교과서에 있기는 하나 언뜻 보기에 유형이 달라 보이는 경우에는 △표, 검사 문항에서와 같은 의도의 문제가 교과서에 나타나 있지 않은 경우에는 ×표로 나타내었다.

못한 것으로 보인다.

(2) 공식 범주의 지식 상태

학생 285명의 공식 범주 문항에 대한 정답률은 <표 2>와 같이 나타났다. 교과서에서는 몇 개의 길이를 준 후 넓이를 구할 수 있는 지 여부를 묻는 경우(2, 4 ,5번 문항)가 전혀 없어서 공식을 제대로 사용할 수 있는지를 알아보는데 어려움이 있다. 넓이가 주어지고 공식을 이용해서 높이나 밑변을 구하는 문제는 교과서에서 한 차시에 걸쳐 다루기 때문에 외운 공식을 사용해서 문제를 푸는 경우와 비슷한 정답률을 보였다. 그러나 하나의 도형에서 두 가지 이상의 밑변 높이 관계를 보아야 하는 공식을 응용하는 문제(15, 16번 문항)에서는 정답률이 많이 떨어졌다.

<표 2> 공식 범주 문항 정답률

문항 번호	정답률 (%)	교과서에 유사 문제 존재 여부
1	70	△
2	52	×
3	53	△
4	42	×
5	53	×
6	64	○
14	61	○
15	24	×
16	22	○

(3) 전략 범주의 지식 상태

학생들의 넓이 측정 전략 사용과 관련된 지식 상태에서 드러나는 바는 19번과 23번 문항의 경우 거의 같은 문제가 교과서에 제시됨에도 불구하고 정답률이 20%에도 많이 못 미친다. 이는 전략을 이용해서 넓이를 구하는 것이 어렵다는 것을 드러낸다. 앞으로 진행될 교육과정에서 사다리꼴과 마름모의 넓이를 구하는 것을 학습할 때 조각을 내고 옮겨 붙이면서 넓이 구하는 다양한 전략을 사용하는 경험이 충분히 제공되어야 할 것으로 보인다. 25번 문항의 경우 넓이를 구할 수 없다고 답을 한 경우가 많았는데 이와 같이 옮겨 붙이면 넓이가 같아지는 것에 대한 경험들이 교과서에 보충될 필요가 있겠다.

<표 3> 전략 범주 문항 정답률

문항 번호	정답률 (%)	교과서에 유사 문제 존재 여부
17	66	○
19	14	○
20	47	○
21	45	△
22	46	×
23	16	○
25	27	×

B. 지식 상태의 위계적인 분석

범주 별 각 수준이 나타내고 있는 지식 상태의 설명이 <그림 3>에 나타나 있으며 각각의 수준에 해당하는 학생들의 수는 <표 4>와 같다.

<표 4> 범주별 수준별 학생 수

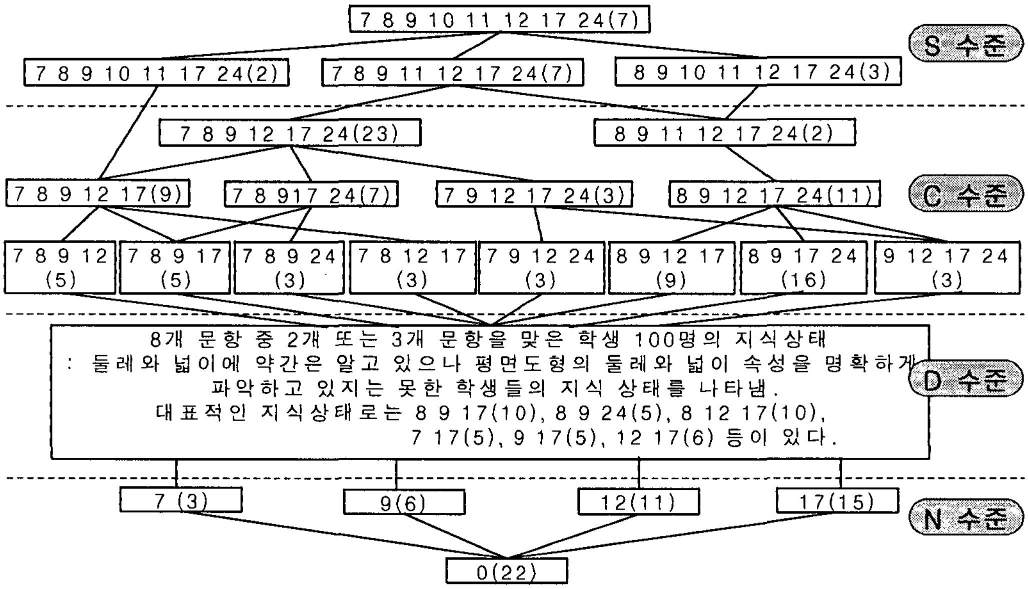
범주 / 수준	속성 범주	공식 범주	전략 범주
S 수준 (우수)	21명(7%)	34명(12%)	24명(8%)
C 수준 (보통)	116명(41%)	103명(36%)	65명(23%)
D 수준 (부족)	100명(35%)	82명(29%)	105명(37%)
N 수준 (모름)	48명(17%)	66명(23%)	91명(32%)

범주 / 지식 수준	범주 1: 속성에 대한 범주 둘레(또는 넓이)의 의미 파악과 직관적 방법으로 둘레(또는 넓이) 비교 가능	범주 2: 공식에 대한 범주 공식을 사용하여 기본 도형의 넓이를 구하고 공식 활용 가능	범주 3: 전략에 대한 범주 적절한 문제 표상과 전략을 사용하여 혼합도형[4]의 넓이 측정 가능
S 수준 (우수)	둘레와 넓이의 의미를 알고 각각의 속성을 혼동하지 않으며 직관적으로 비교 가능한 두 도형의 둘레의 길이(또는 넓이)를 올바르게 비교할 수 있다.	적절한 수치를 공식에 대입하여 직사각형과 평행사변형, 삼각형의 넓이를 구할 수 있고 어떤 길이를 알아내기 위해 넓이 측정 공식을 활용할 수 있다.	혼합 도형의 넓이를 구하기 위해 적절한 문제 표상을 하고 분할, 등적변형 등의 전략을 사용하여 넓이를 올바르게 구할 수 있다.
C 수준 (보통)	둘레와 넓이의 의미는 알고 있으나 문제에 따라 두 가지 속성을 혼동하거나 불규칙한 도형의 넓이에 대한 이해가 부족하다.	공식을 사용하여 직사각형, 평행사변형, 삼각형의 넓이를 구할 수 있으나 모르는 길이를 알아내기 위해 공식을 활용하는 것에는 어려움이 있다.	적절하게 문제를 표상한 경우에는 분할이나 등적변형 등의 전략을 사용하여 넓이를 구할 수 있으나 전략이 제한적이고 표상에 어려움을 나타내기도 한다
D 수준 (부족)	단위를 사용하여 둘레와 넓이를 구할 수는 있으나 두 가지 속성을 혼동하고 있으며 불규칙한 도형은 넓이(또는 둘레)가 없다고 생각하거나 크기를 비교할 수 없다고 생각한다.	공식을 사용하여 직사각형, 평행사변형, 삼각형의 넓이를 구하기도 하지만 잘못된 수치를 대입해서 엉뚱한 답을 하기도 해서 공식에 대한 부족한 이해를 나타내고 있다.	분할이나 등적변형 등의 전략을 알고 있으나 문제에 대한 표상이 부적절하거나 문제해결에는 미흡한 전략을 사용하여 간단한 한 두 문제 외에는 문제해결에 성공하지 못 한다.
N 수준 (모름)	둘레와 넓이에 대해 들어본 적은 있으나 단위를 사용하여 둘레나 넓이를 측정하는 것조차 실패하며 불규칙한 도형의 둘레와 넓이를 생각하지 못한다.	넓이를 구하는데 있어 계산 실수 뿐 아니라 공식을 혼동하거나 잘못 적용하는 경우가 많으며 길이를 구하는데 공식을 활용하려는 시도조차 하지 못한다.	혼합 도형의 넓이를 구하기 위한 적절한 문제 표상에 실패하고 전략 사용에도 어려움이 있어서 좀처럼 문제를 해결하지 못 한다.

<그림 3> 범주별 지식 상태 수준에 대한 설명

4) 혼합도형이란 교과서에서 넓이 구하는 공식을 따로 정리해 놓지 않은 도형으로 직사각형, 평행사변형, 삼각형 등으로 분해해서 넓이를 구할 수 있는 도형들을 말한다. 마름모와 사다리꼴도 학생들이 넓이 구하는 공식을 배우기 이전까지는 혼합 도형으로 생각될 수 있다.

세 가지 범주에 대하여 지식 상태를 분석하여 위계로 나타내고 각 수준에 대한 분서을 하였는데 그중 첫 번째 범주인 속성 범주에서 드러난 학생들의 지식 상태의 위계는 <그림 4>에 나타나 있다.



<그림 4> 범주 1(속성)의 대표적인[5] 지식 상태의 위계

속성 범주 각 수준의 지식 상태는 다음과 같은 특징을 가진다.

속성 S 수준 (21명)

둘레와 넓이의 속성을 알고 직관적으로 둘레나 넓이를 비교하고 측정할 수 있는 학생들의 지식 상태이다. 속성 S 수준으로 분류된 21명의 학생 중 8개의 문항 모두를 맞힌 학생 7명이며 2/3에 해당하는 14명은 한 문항씩 오답을 하였는데 불규칙 도형에 대한 경험 부족에 원인이 있는 것으로 보인다.

속성 C 수준 (116명)

둘레와 넓이 속성은 어느 정도 알고 값도 구할 수 있는 교과서에서 요구하는 최소한의 수준은 알고 있는 지식 상태라 할 수 있다. C 수준 116명의 학생 중 40% 이상(50명)이 둘레가 긴 도형을 올바르게 구하지 못하고 있고 거의 대부분의 학생(105명)이 불규칙한 모양을 가지고 있는 도형은 둘레나 넓이가 없는 것으로 생각하는 지식상태를 드러내고 있다.

속성 D 수준 (100명)

넓이와 둘레 속성이 명확하지는 않으나 둘레와 넓이에 대해 아주 모른다고 보기는 어려운 지식상

5) 본 연구에서 대표적이라 함은 285명의 학생 중 3명 이상에서 드러난 지식 상태를 기본으로 하여 위계도를 나타내었으며 위계가 드러나는데 도움이 되는 경우에 한해 2명의 학생에서 나타난 지식 상태도 사용하였다.

태이다. 둘레가 긴 도형을 구하는 문제에서 실패한 학생의 비율은 75%, 단순히 네 변의 길이의 합을 구하면 되는 사각형의 둘레를 계산해야 하는 문항을 틀린 학생이 80% 정도를 차지하고 있는 것으로 보아 넓이에 대한 의미보다 둘레의 의미에 대한 이해가 부족함이 두드러지고 있다.

속성 N 수준 (48명)

둘레와 넓이에 대한 의미를 전혀 알지 못하고 있는 지식 상태를 나타낸다. 둘레와 넓이에 관한 속성 파악을 하지 못하고 있음은 물론이거니와 길이의 단위인 1㎝와 넓이의 단위인 1㎠의 수를 세어 둘레와 넓이를 구하는 문항조차 답을 하기 어려워하는 지식 상태를 드러내고 있다.

5. 결 론

학생들의 이해의 정도가 그들의 지식 상태에 따라 다르게 나타날 수 있다고 하지만 학생들의 지식 상태 파악에 실질적인 도움이 되는 연구는 찾아보기가 어렵다. 본 연구는 지식공간론을 활용하여 학생들의 평가 결과가 담고 있는 정보로부터 지식 상태를 분석해 냈으며, 본 연구에서 사용된 평가 문항은 교사들이 수학 5-가 6단원 단원 평가 문항으로 활용할 수 있으리라 생각된다.

본 연구를 통하여 드러난 바를 각각의 범주에서 C 수준의 지식 상태, 즉 교과서 내용은 어느 정도 이해한 것으로 볼 수 있는 학생들의 지식 상태에 초점을 맞추어 요약하면 다음과 같다.

첫째, 넓이와 둘레를 구하는 계산에 앞서 학생들이 넓이와 둘레에 주목할 수 있는 경험이 제공되어야 한다. 속성 C 수준 학생 대부분이 불규칙 도형의 넓이에 대한 경험 부족을 드러내고 있다.

둘째, 공식 C 수준 학생들은 공식을 사용하여 기본도형의 넓이를 구하는 것은 어느 정도 소화하고 있는 것으로 보인다. 그러나 공식 C 수준 학생들 중 문제에 따라 공식 적용에 오류를 보이거나 계산 실수를 통해 문제해결에 실패하는 경우가 종종 나타난다. 그러므로 넓이를 구하기에 부적절한 길이를 주거나 부족한 정보를 주고 넓이를 구하도록 하는 경험도 제시되어야 할 것이다.

셋째, 하나의 도형에서 두 가지 이상의 밑변과 높이를 생각해야 해결되는 과제는 공식 C 수준학생들 대부분이 어려움을 겪고 있다. 삼각형과 평행사변형을 전형적인 형태가 아닌 다양한 방향으로 제시하고 밑변을 바꾸어 가며 높이를 생각해야 과제들이 충분히 제공되어야 한다.

넷째, 학생들이 적절한 전략을 사용해서 넓이를 구하는 과제는 학생 스스로 전략을 찾게 하는 탐구의 시간을 통해 전략이 개발되어야 한다. 전략 사용의 경우 교과서 내용에 대한 최소한의 이해도 어려워하는 학생들이 70% 가까이 된다. 마름모나 사다리꼴의 넓이 공식을 아직 배우지 않은 학생들에게 사다리꼴의 넓이나 마름모의 넓이를 구해보도록 하되 공식으로 일반화시키지는 않은 상태를 한동안 유지하는 것은 전략을 개발하도록 하는데 도움을 주는 방법으로 생각된다.

본 연구의 결과를 바탕으로 교과서의 내용을 이해하고 있는 지식 상태의 학생들에게서 나타난 문제점들을 보완하기 위해서는 교사들이 수업 할 때에 불규칙 도형에 대한 경험이나 넓이를 구할 수 있는지 여부를 생각하게 하는 것과 같은 경험이 제공되어야 새삼 깨달을 수 있다.

참 고 문 헌

공주대학교 과학교육연구소(2002). 지식공간론 입문. 대전: 도서출판 보성.

교육인적자원부(2004). 수학 5-가. 서울: 대한교과서 주식회사.

교육인적자원부(2004). 수학익힘책 5-가. 서울: 대한교과서 주식회사.

김언주(1987). 인지심리학-이론과 적용. 서울: 정민사.

변두원 · 정인철 · 박달원 · 노영순 · 김승동(2004). 수학교육에서 평가결과에 기초한 개별화 학습과정 위계도. 한국수학교육학회지 시리즈A<수학교육>, **43(1)**, pp.75-85.

전평국 · 이재학 · 백석윤 · 박성선(2001). 열린 교육에서의 창의성과 탐구학습. 청람수학교육, **제9집,** pp.589-602.

Anderson, J. R. (1995). Cognitive psychology and its implications (4th ed.). New York: W. H. Freeman and Company. 이영애(역)(2000). 인지심리학과 그 응용. 서울: 이화여자대학교 출판부.

Collins, A. M., & Quillian, M. R.(1972). How to make a language user. In E. Tulving & W. Donalson(Eds.), *Organization of memory.* New York: Academic Press, 1972.

Doignon, J. P., & Falmagne, J. (1999). *Knowledge spaces.* Berlin: Heidelberg. Germany: Springer-Verlag.

Greeno, J. G.(1978). Understanding and procedural knowledge in mathematics education. *Educational Psychologist,* **12(3)**, pp.262-283.

Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert(Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp.1-27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Landauer, T. K., & Meyer, D. E.(1972). Category size and semantic-memory retrieval. *Journal of Verbal Learning Verbal Behavior*, **11**, pp.539-549.

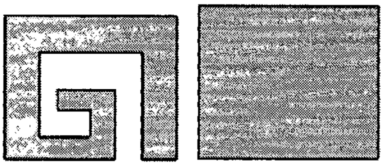
Mayer, R. E. (1983). Thinking, problem solving, cognition. Newyork: Freeman.

<부록> 첫 번째 범주인 둘레와 넓이 속성 파악에 관한 검사 도구 문항

【 수학 】 단 원 평 가 평면도형의 둘레와 넓이	초등학교 학년 반 번 이름	8면 중 2면

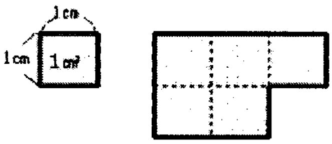
★ 모르는 문제에는 아무 답이나 적지 말고 "모름" 이라고 적으세요. ★

[7] 아래의 색칠한 두 도형 중 <u>둘레의 길이</u>가 더 큰 도형을 골라 ○표를 하시오.



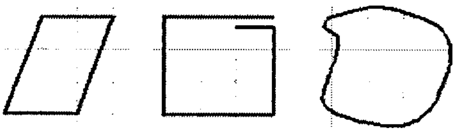
( ) ( )

[8~9] 한 변의 길이가 1cm인 정사각형을 그림과 같이 5개 이어 붙여서 만든 도형의 넓이와 둘레의 길이를 구하시오.



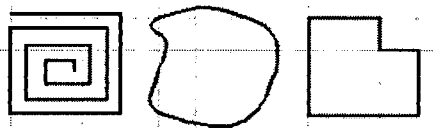
넓이 [cm²] 둘레의 길이 [cm]

[10] 아래 도형 중 <u>둘레</u>가 있는 것에는 ○표, 둘레가 없는 도형에는 ×표를 하시오.



( ) ( ) ( )

[11] 아래 도형 중 <u>넓이</u>가 있는 것에는 ○표, 넓이가 없는 도형에는 ×표를 하시오.



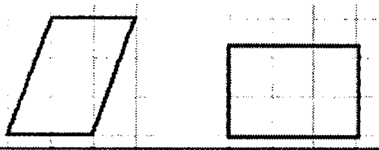
( ) ( ) ( )

[12] 아래 두 도형은 넓이를 비교할 수 있습니까?

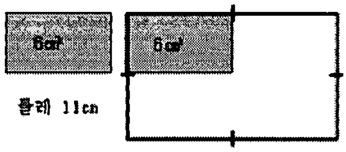
(비교할 수 있다 , 비교할 수 없다)

☞ 비교할 수 있다면

두 도형 중 넓이가 더 큰 도형에 ○표를 하시오.

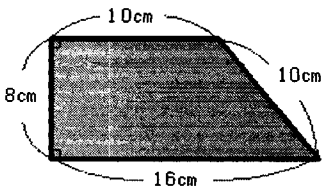


[17] 작은 직사각형은 넓이가 6cm², 둘레의 길이가 11cm 입니다. 이 직사각형을 그림과 같이 4개 붙여 놓아 만든 직사각형의 넓이를 구하시오.



넓이 [cm²]

[24] 다음 도형의 둘레의 길이를 구하시오.



둘레의 길이 [cm]