韓國數學教育學會
<全國數學教育研究大會 프로시딩>
제 37회. 2006. 10. 63-78

Korea Soc. Math. Ed.
Proceedings of National Meeting of Math. Ed.
The 37th. Oct. 2006. 63-78

학교수학 지도에 대한 '개방적 접근(Open Approach)'[1]

Jerry P. Becker (Southern Illinois University Carbondale)

번역 : 서 보 억 (계성중학교)
김 은 주 (구암중학교)
류 수 정 (화개중학교)
김 동 근 (대구청구고등학교)

미국에서 학교 수학 수업에서의 개방적 접근은 일본과 미국 연구자들의 공동연구의 결과물이다. 우리는 그것에 대한 세 가지의 측면을 실례로 살펴보면 접근을 시도하겠다. : 1) 개방된 과정(open process)(문제의 해답에 이르는 방법이 여러 가지이다; 2) 개방형 문제(open-ended problems)(문제에 대한 정답이 여러 가지가 될 수 있는 문제), 3) 일본에서 '문제로부터 문제(from problem to problem)'라고 불리는 것 혹은 문제고안(problem formulating)하기(학생들이 새로운 문제를 명확하게 나타내기 위해 자신의 생각을 써 내려 가는 것)

수학 지도에서 일본의 개방적 접근에 대한 우리의 이해를 바탕으로, 우리는 미국에서 보다 효과적인 수학 지도를 위한 몇 가지 방법을 선택 적용해 보았다. 이러한 접근의 대부분은 학습 계획안을 만들 때 여러 교사가 함께 참여하고 일련의 토론과 수정과정을 거친 뒤, 많은 부분이 개선되고 효과적인 계획안을 만들어 낸다는 점에서 미국의 수학교사들에게 새로운 것이다. 또한 이 접근법에서는 교사가 문제를 해결하는 과정에서 학생 개개인이나 그룹을 활동적으로 관찰하여 그들의 활동을 비교하고 토론한다.

도 입

나의 개인적인 견해로는, 미국과 일본의 교사와 교수들 간의 공동연구는 적어도 1960년대 후반으로 거슬러 올라간다. 그때는 내가 처음으로 일본에서 학교 수학 지도 분야에서 '개방적 접근'의 아버지라고 볼 수 있는 Shigeru Shimada을 만났을 때이다. 보다 포괄적인 수준에서, 이 공동연구는 수년에 걸쳐 다양한 결과물을 만들어 내었다. 우리는 호놀룰루에 있는 하와이 대학의 the East West Center에서 수학교육에 관한 양국의 세미나를 두 번 개최하였다. 거기서는 장단기 비공식 방문뿐 만 아니라 국가 횡단 조사 연구계획과 양국으로부터의 수학 교사와 수학 교사 교육자 대표단의 교환 방문이 있었다. 추가로 양국 간에 전문적인 모임이 있었고, 회의의 회보가 발간되었고 보급되었다. 물론 많은 논문들이 전문 저널에 출판되었다. 또한 그 주제에 관한 많은 책들이 있었으며, 그 중에서 나에게 깊은 감명을 주어 수학지도에서 다른 견해를 개발하도록 이끈 책도 있었다(Becker · Shimada,1997 ; Shimada,1977).

1) 이 논문은 제37회 전국수학교육연구대회 <프로시딩> pp.45~62에 게재된 논문인 The "Open Approach" to Teaching School Mathematics를 번역한 것입니다.

Shigeru Shimada와 그의 동료들(참조. Becker · Shimada, 1997)의 연구는 1970년대에 일본인들의 주도로 시행된 연구에 기초하며 특히 1971년에 시작하여 1977에 끝난 연구계획서에 기초한다. 처음에는 일본인 연구자가 미국에서 *The Open Ended Approach: A New Proposal for Teaching School Mathematics*[2] (Becker · Shimada, 1997)란 제목의 책을 영어로 번역한 보고서로 시작하였다. 그것은 NCTM에 의해 출판되었다.

개 선

수학 지도에 대한 나의 견해는 일본에서 꽤 많은 수학 교사들, 교수들, 연구자들과 함께 연구한 상호 작용의 결과이다. 그것은 NCTM 간행물 '학교수학을 위한 원칙과 규준(*Principles and Standards for School Mathematics* '(2000)와 밀접한 관련이 있다.

Futurist Joel Barker는 "활동 없는 통찰력은 단지 꿈에 불과하다. 통찰력 없는 활동은 시간만 낭비하는 것이다. 활동을 포함하는 통찰력은 세상을 바꿀 수 있다."라고 말하였다. 우리가 앞으로 논의할 학교 수학 지도에서 통찰력 부분이 아주 중요하다는 것은 일본과 독일의 수학 교육 뿐 아니라, '학교수학을 위한 원칙과 규준'에서도 제시하고 있다.

학교 수학을 개선하는 것은 중요한 목표이다. 개선에 대한 외침은 시급하지만, 새로운 것은 아니다. 많은 나라에서 개선가들은 위력적인 서류를 준비해 놓고 있다. 공식적인 개선문서가 출판되어 왔고 개선 사업은 출발했으며, 개선운동은 출항하였고 항해 중에 있다. 미국에서는 개선에 대한 추진력이 첫 세 개의 표준 문서에 의해 최고조에 달했고, 그것들이 2000년에 '학교수학을 위한 원칙과 규준'로 통합 출판되었다.

수학교육을 개선하려고 하는 나라들에서 우리는 수학 지도에 대한 사고방식의 전환이라는 공통적인 철학을 발견한다. 가르치는 것을 다루는 것으로 보고 학습을 결과로 보는 대신에, 학생들을 수학 학습에 능동적으로 참여하는 학습자로 본다. 이 모든 것에서 근본적인 가정은 가르치는 것과 학생들이 그것을 경험하는 방법은 수학에 대한 학생들의 이해와 신념을 형성하게 하는 최우선 요소이다

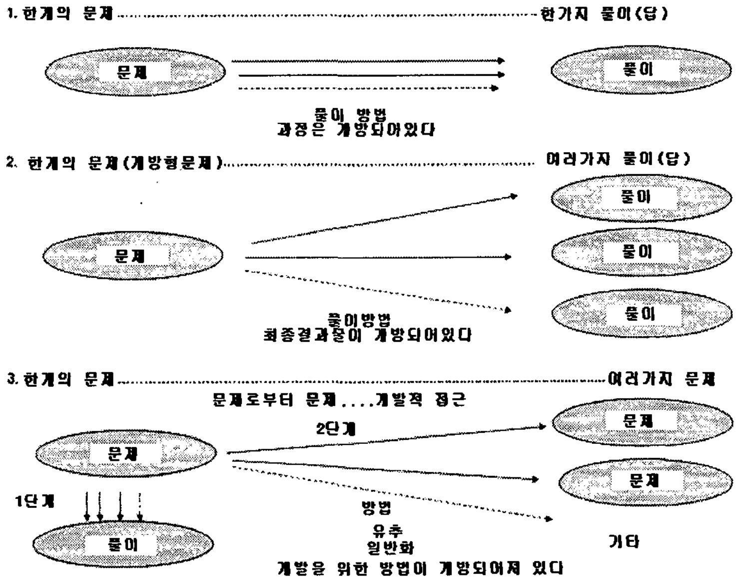
1991년에 미국 수학협의회(MAA)의 한 토론에서 수학 교육자 Alan Schoenfeld 는 "학생들은 그들의 경험으로부터 어떤 한 영역에 대한 감각(sense)을 이끌어낸다."고 주장하였다. 우리는 학생들이 다음과 같이 하는 접근법을 보았다. "과제를 조각으로 나눈 다음 그것을 조금씩 숙련해가도록 만든다". 대안으로 Schoenfeld는 우리는 "학생들이 그들에게 적절한 수준에서 수학을 행하도록(doing mathematics) 하는 교육환경을 만드는 것" 을 해야 한다고 제안하였다. 다른 말로 하면, 우리는 "교실에서의 수학문화의 선택된 한 측면을 발생시키는 것"을 해야 한다고 말했다. 물론 그것은 NCTM의 규준에 관한 것이고 또한 1970년대로 거슬러 올라가 일본인들이 연구한 것에 관한 것이다.

---

2) 우리나라에서는 '수학지도를 위한 새로운 제안 : 개방형 교수법' 이란 제목으로 출판되었다.

개방성(Openness)

우리는 수학 교육에서 개방성은 일본의 수업에 초점을 두고 특징지을 수 있다. 이러한 개방성은 <그림 1>에서와 같이 세 가지 측면을 가진다.



<그림 1> 수학교육에서의 개방성

첫 번째는 하나의 문제가 정확하게 하나의 해답을 가지도 있다할지라도 그 답을 구하는 많은 방법이 있을 지도 모른다는 인식이다. 그래서 우리는 개방된 과정이라고 하겠다. 이러한 방법은 꽤 오랜 동안 일본에서 전통적인 지도 방법이었다고 생각이 든다. 두 번째는 하나의 문제에 여러 가지 또는 많은 다른 해답이 있을 수 있다는 것이다. 이것은 '수학지도를 위한 새로운 제안 : 개방형 교수법'(Becker · Shimada, 1997)의 주제이다. 마지막으로는 일본사람들이 "문제로부터 문제로" 또는 "개발적 접근"이라고 부르는 것이다. 이것은 문제를 고안하는 것에 대한 언급이다. 유일한 해가 있든 없든 간에 하나의 문제로 시작하지만 끝은 없다. 처음 단계에서는 학생들은 자신들이 알고 있는 방법으로 그 문제를 푼다. 그리고 나서 그들의 해결방법에 대해 토론한다. 그 다음 단계에서 학생들은 방금 해결한 문제와 같이, 그들 자신들의 문제로 고안하라는 요청을 받는다. 이렇게 하기 위하여 학생들은 다른 과정들 간의 유추 혹은 일반화를 사용하여 써내려 갈 것이다. 우리는 간단하게 이러한 개방성에 대한 세 가지 측면 각각을 예를 통해 살펴보겠다.

잠깐만 살펴보면 우리는 NCTM 과정의 규준들이 문제해결과 의사소통에 대해 연결되어 있음을 알 수 있다. 학생들이 서로 서로 수학을 토론한다는 것은 이 접근에서 매우 중요하다. 우리는 또한

추론, 관계, 학생들의 제작, 표상(2000년에 규준의 수정으로 추가된 기준)의 사용과 같은 다른 과정의 규준과도 관계가 있음을 알 수 있다. 이러한 추가는 다른 나라들 중 미국, 브라질, 독일에서 수행된 연구에 그 기반을 둔다.

최초로 내가 일본에서 수업을 관찰할 기회를 갖고서 알게 된 것 중의 하나는 다음의 <그림 2>에서 보는 바와 같이 학습 접근 방법이 거의 공통적인 방식을 가지려는 경향을 가지고 있었다. 수업지도가 완전히 틀에 박혀져 있는 것이라고 말하지 않을 것이며, 오히려 수업 실행의 공통적인 요소들이 수업이 전개되는 방식을 통해서 운영되었다.

1	개방형 문제의 소개	5분
2	문제의 이해	5분
3	학생들에 의해 문제의 해결, 개인 혹은 소그룹 활동 (활동지에 자신의 활동을 기록)*	20분
4	비교와 토의 (일부학생들은 자신의 풀이를 칠판 혹은 OHP에 기록)	8분
5	교사에 의한 요약 정리	5분
6	선택:이번 수업을 통해 학생들이 배운 것을 적도록 요구	2분

*자신의 일상적인 수학적 사고 능력을 사용.

<그림 2> 개방적 접근을 사용한 수업의 조직(한 시간 수업시간 45분 기준)

주의 : 어떤 수업은 한 시간보다 더 많은 시간을 필요로 한다. : 어떤 수업에서는 학생들의 활동과 상세한 기록을 한 연구보고서를 유도한다. 또한 오른쪽에 기록된 시간은 대략적인 시간이다.

수업은 약간의 시간을 사용하여 전형적으로 개방형문제를 소개함으로 시작하고 학생들이 그 문제를 이해하고 그들이 추측하는 것을 확인한다. 다음 단계가 결정적이다. : 학생들은 개인이나 그룹의 활동을 통해서 문제를 푼다. 이 과정 동안 학생은 해법을 찾는 과정에서 자신들의 자연스러운 사고방식을 사용한다. 그들이 그것을 할 동안, 교사는 의미심장하게 학생의 주위를 걸어 다니고, 학생들의 활동을 관찰하고 다양한 학생들에게 그들의 활동지를 모두가 볼 수 있게 칠판위에 올려놓도록 한다. 이것은 학생들의 결과물(풀이/활동)을 비교하고 토론하기 위한 이 수업의 다음 부분을 위한 예비준비이다.(교사나 교과서가 반드시 필요한 것은 아니다.) 그 수업의 결론에서는 교사는 그 학습을 요약한다. 학생들은 교사가 수업의 효과를 평가하기 위한 방법으로 그들이 배운 것을 쓰도록 요구 받을 것이다.

미국에서의 개방적 접근의 사용

우리가 일본의 동료들로부터 그들의 생각들을 받아들임으로써 우리는 준비된 상세한 수업계획(detailed lesson plan)이 실제로 개방적 접근의 매우 강력한 도구임을 발견하였다. 상세한 수업계획은 전문적으로 유용하다. 그것은 학생들의 문제해결에 대한 토론을 촉진하고 안내하고 준비시키는 것 뿐 아니라 문제를 다른 방법으로 해결하는 것, 학생들의 질문에 대해서 반응하는 것 등 문제를 잘 이해하도록 도와 준다. 상세한 수업계획은 좋은 문제의 선택과 함께 시작된다. 좋은 문제의 한 가지 특징은 모든 학생들이 그 문제를 어느 수준까지는 성공할 수 있다는 것이다. 그런데 그것은 우리가 함께 일해 온 모든 교사들에게 절대적으로 새로운 것이었으며, 그들이 예상할 수 있는 모든 학생들의 반응을 적어볼 수 있는 기회를 주는 소그룹의 교사들에게 효과가 있는 것이다. 일반적으로 그들이 매우 좋은 자료를 얻었을 때, 이것은 그들이 문제와 그것의 풀이에 대한 통찰력을 함께 얻는다는 것을 의미한다. 이것은 중요하다. 왜냐하면, 이러한 상세한 수업계획에 대한 핵심은 학생들이 그들 자신의 일상적인 수학적인 사고 방법을 사용하여 문제를 해결하는 기회를 제공하기 때문이다.

상세한 수업계획이 발전되어진 후에 수업계획을 발전시키는데 상당한 책임감을 가진 교사가 수업을 하고 그 외의 교사들은 관찰한다. 수업 후에 강의한 교사는 수업에 대한 완벽한 보고서를 쓰게 한다. 그리고 교사들이 수업보고서를 토론하고 수업계획을 향상시키기 위해서 만난다.

이 방법은 미국교사들에게 매우 새로운 것이었고, 처음에는 이것에 대해서 매우 회의적이었다. 교사들이 서로 믿음을 가지는 상황이 오기까지 참여하는데 꺼려하였다. 그리고 나서 상황은 바뀌고 그들은 함께 연구하고 협력하기 시작했다.

지금의 나의 생각으로 이것은 교사의 진보를 위한 활동으로는 거의 이상적인 방법이다. 왜냐하면 그 수업을 한 교사나 참여한 모든 교사들이 수업을 하는데 확신과 그들의 능력을 향상시키려 하고 있기 때문이다. 더욱이 지속적인 토론과 개정을 통하여 수업계획이 향상되어지고 있기 때문에, 이것은 교육과정 향상에 중요한 기여를 하고 있다. 교사와 함께한 연구에 있어서 우리는 보통 세 번째 수정쯤되면 상세한 수업계획은 다른 교사가 사용하기에 거의 충분히 훌륭할 정도로 효과적인 형태가 된다는 것을 발견하였다. 모든 세부상황에는 이론적인 근거 뿐 아니라 배경도 있다.

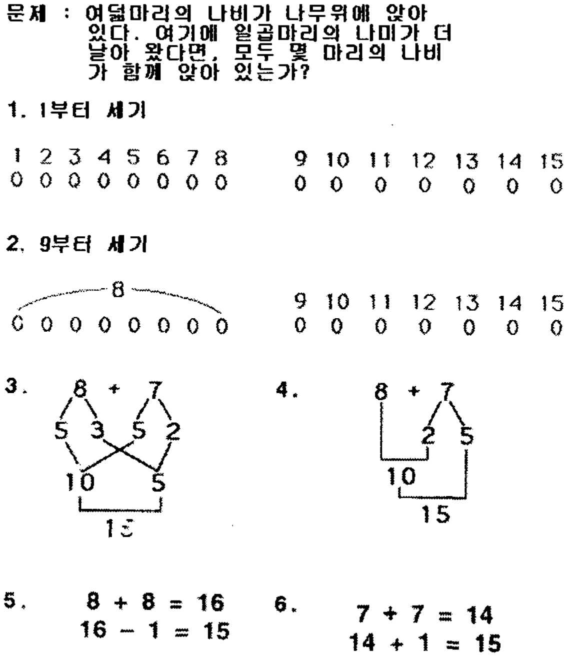
게다가, 학습에 대한 학생평가활동이 개방형 교수법에서 중요하다. 불행하게도 시간이 부족하여 거기까지는 깊이 있는 탐구는 하지 못하였다. 그러나 수학 지도에서 개방적 접근을 통하여 일본 연구원들은, NCTM의 평가에 대한 제안과 아주 잘 부합되는, 학습평가에 대한 전혀 다른 방법을 고안하였다. 평가라는 것은 개별적인 학생의 활동지 혹은 소그룹의 활동지를 분석하고, 문제에 대한 개인 혹은 그룹의 활동을 관찰하고, 그 다음 그들이 그것을 토론하는 것을 관찰하는 것을 포함하는 것이다. 결과적으로는, 교육은 관찰에 기초해서 조정되어진다. 즉, 평가활동은 실시된 수업활동을 향상시키는데 실제적인 도움을 줄 수 있어야 한다. 평가의 구성요소들 ; 유창성 - (1) 학생들이 문제를 해결하는데 찾은 다른 방법들의 개수, (2) 올바른 해법의 개수, (3) 고안해낸 문제의 개수, 융통성 - 학

생 활동에서 서로 다른 수학적인 생각의 개수, 독창성- 학생 활동에서 보여진 통찰력의 깊이 혹은 사고의 깊이, 세련됨 - 학생들의 수학적인 기호로 자신의 생각을 표현하는 정도.

1. 과정은 개방되어있다.

개방된 과정에 대해 초등학교 1학년 수준의 문제를 통해 생각해 보자.

나무위에 여덟 마리의 나비가 앉아있었는데, 여기에 일곱 마리가 더 모여 와서 함께 모였다고 하자. 함께 있는 나비의 수는 얼마나 되는가? 교사는 문제가 무엇이며 학생들에게 기대되어지는 것이 무엇인지를 분명하게 제시한 후에 학생들은 자신의 일상적인 사고 능력을 이용하여 문제를 해결한다. 이에 앞서, 교사는 학생들이 생각해 낼 문제 해결을 위한 모든 방법들뿐 아니라 다른 해결 방법들에 대해서도 생각한다. 즉, 교사들은 학생들의 관점과 반응을 예상한다. <그림 3>에서는 몇 가지 풀이방법을 제시하고 있다.



<그림 3> 개방된 과정

풀이방법들에는 수 세기, 분해 하기, 두 배 하기 등을 포함하고 있다. 방법1은 숫자 1로부터 수를 세는 것이고, 방법 2는 8혹은 9로부터 수 세기를 하는 것임을 알 수 있다. 방법3과 방법4의 예는 수 세기보다 수리적인 특징의 차이인 수의 분해를 이용하여 문제를 해결하는 방법을 설명하고 있다. 방

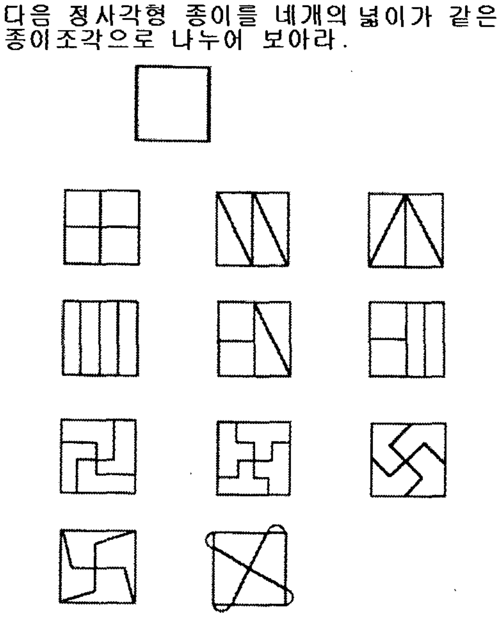
법3은 8을 5와 3으로 분해하고 7을 5와 2로 분해하여 두 개의 5를 더하여 10을 만들고, 3과 2를 더하여 5를 만들었다. 최종적으로는 10과 5를 더하여 15를 얻었다. 방법4는 약간 다르다. 7을 2와 5로 분해하고, 2를 8과 더하여 10을 얻는다. 최종적으로 5를 더하여 15를 얻었다. 우리는 마지막 열에서 세 번째 종류의 풀이방법을 찾을 수 있다. 덧셈 혹은 뺄셈과 결합된 두 배하기이다. 학생들이 정답을 찾기 위해 활동적으로 사고한다면 다른 풀이방법이 더 있을 것이다.

우리는 Illinois 주의 Belleville 이라는 곳에 있는 Washington School의 유치원 교실에서 세 번째 종류의 풀이방법에 대한 예를 보았다. 교사가 수업에서 수업을 진행하고 있는 동안에, 나는 작은 소녀 옆에서 무릎을 꿇고 " 7과 8의 합은 얼마인가?"라고 물었다. 그녀는 잠시 생각하더니 "15"라고 대답했다. 그래서 나는 "어떻게 그 대답을 생각했어?"라고 물었더니, 그녀는 "7을 두 번 더하고 나서 1을 더했어요." 라고 했다. 이것이 유치원 학생이며, 그들은 이것을 가르치지 않았다. 그러나 유치원생과 초등학교 학생들은 "비형식적 수학 지식"이라고 불리는 많은 것을 가지고 있다. 비형식적 수학지식의 또 다른 형태는 수학수업에서 교사의 의식과는 다르게 학생들이 배우게 되는 것도 있다. 교사들은 학생들이 배우는 것의 일부는 인식하지 못하고 있는 것이다.

평가의 한 측면은 학생들이 문제를 해결할 때 서로 다른 수학적 아이디어를 얼마나 많이 발견하였는가와 관련이 있다. 그래서 학생들이 문제를 해결했다면, 우리는 학생들이 그것을 풀 수 있는 다른 모든 방법을 생각하도록 학생들에게 요구한다. 이 경우 우리는 이미 세 가지 종류를 찾아 보았다. 즉, 수 세는 전략, 분해하는 전략, 그리고 두 배하기 전략이다. 적어도 한 가지 반응을 가지고 있는 목록의 수가 클수록 더 좋은 것이다. 이것은 학생들이 다른 수학적 형태를 가지고 있는 사고방법을 더 많이 보여줌에 따라 사고에 있어서 더 융통성이 있음을 보여준다.

2. 최종 결과물이 개방되어있다.

<그림 4>와 같이 어떤 문제들은 몇 개 혹은 많은 정답을 가지는 경우도 있다. 우리는 정사각형 종이를 이용하여 학생들에게 넓이가 같은 네 부분으로 나누도록 요구했다. 문제에 대한 다른 해를 찾는다. 무엇보다 우리는 학생들에게 무엇을 해야 하는지 명확하게 알려주어야 한다. 우리는 넓이가 같은 네 개의 부분으로 나누도록 했으며 반드시 합동이 되어야 된다고 말하지 않았다. 일반적으로 우리는 이와 같은 문제의 해결을 위해 정사각형 센티미터 종이를 사용한다. 이때 학생들이 다양한 대답들을 제안할 수 있도록 그들의 일상적인 사고능력을 사용할 수 있도록 자유롭게 해주어야 한다.



<그림 4> 최종산출물이 개방되어 있다

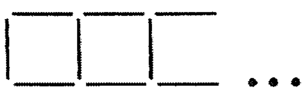
학생들은 그림으로 제시되어진 것과 같은 다양한 해를 정확하게 찾을 수 있다. 맨 마지막 행의 오른쪽을 보자. 정사각형의 각각 변 끝에 있는 작은 호들은 이 호를 이루는 선분의 길이가 같음을 보여주고 있는 것이다. 이 특별한 문제해결은 다른 방법과 매우 다르다. 교사들은 놀랐다. 교사들은 학생들이 그렇게 하리라고 상상을 못했지만 학생들은 그렇게 하였다. 물론, 학생들이 생각한 것은 정사각형에서 두 대각선이 중앙에서 직각으로 만나는 점을 정사각형의 중심으로 고정시키는 것이다. 이제 대각선들을 중심을 기준으로 정확하게 회전시키자. 그리고 어디에서 멈추든지 간에 대각선들은 정사각형을 넓이가 같은 네 개의 부분으로 나눈다. 이것은 소위 회전이라는 또 다른 수학적인 아이디어를 소개한 것이다. 이 문제는 실제로 회전대칭에서 얻었다.

교사들은 융통성을 측정하는데 사용되어지는 서로 다른 종류의 몇 가지 형식을 만들기 위한 다양한 제안을 하였다. 그러나, 그들이 가장 일반적으로 말하고자 한 것은 다음과 같은 것이었다. : 첫 번째 줄과 두 번째 줄의 풀이는 한 가지 종류의 형식이라고 볼 수 있다. 또는 이 대신에, 나누어진 조각이 서로 합동인 경우와 합동이 되지 않는 경우로 나누어 두 가지 종류의 형식으로 나누어볼 수 있다. 세 번째 줄에 있는 왼쪽 두개의 풀이는 또 다른 한 종류의 형식을 가진다. 이 종류는 세 번째 줄의 가장 오른쪽 풀이와 네 번째 줄의 가장 왼쪽의 풀이를 포함하여 같은 종류의 형식에 속한다. 회전대칭을 포함하는 어떤 풀이는 또 다른 종류의 형식이라 할 수 있다. 따라서, 결국 우리는 수학적인 일부 형태가 다른 것과는 차이가 나는 각각의 다양한 종류들의 형식을 얻게 되었다. 다양한 종류의 형식과 각각의 종류에 속하는 서로 다른 풀이들의 개수는 평가에 기여하게 된다.

3. 문제 고안하기 - 문제로부터 문제

지금부터 주어진 문제를 푼 후 학생들 자기 스스로 문제를 고안하는 한 예를 보자. 이 문제는 초등학교 고학년이나 중학교 학생들에게 사용되어졌다. <그림 5>에서처럼, 우리는 성냥개비를 사용해서 정사각형을 만들었다. 만들어진 정사각형의 개수가 5개일 때, 사용되어진 성냥개비의 개수를 질문하였다.

다음 그림은 성냥개비를 사용하여 정사각형을 만든 것이다. 몇 개의 성냥개비를 사용하면 정사각형 5개를 만들 수 있는가?



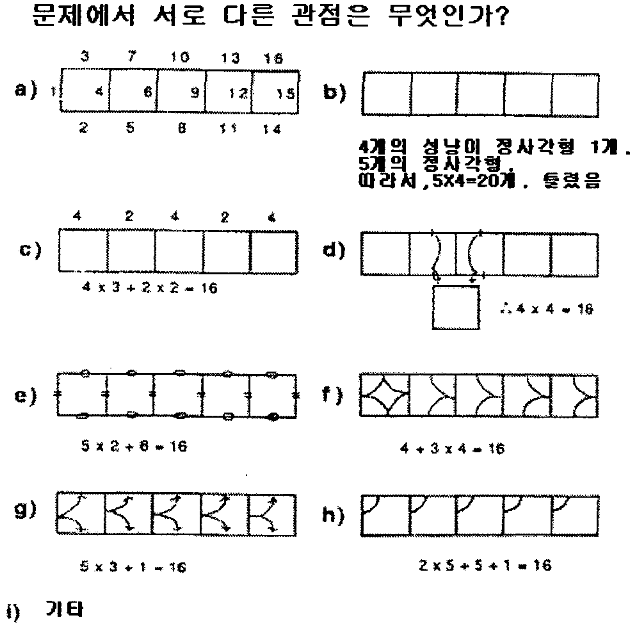
<그림 5> 문제해결하고 문제를 고안하기

이 문제를 학생들에게 제시하였을 때, 우선 우리가 해야 하는 것들 중의 하나가 학생들이 "…"이 의미하는 것이 무엇인지 확실하게 이해하고 있는지 알아봤다. 하지만, 미국과 일본의 공동연구 연구에서 일본 학생들은 그것이 의미하는 것이 무엇인지를 매우 정확하게 알고 있지만, 미국 학생들의 대부분은 그렇지 않았다.

일단 우리는 이 문제를 학생들에게 제시하고, 학생들 각자 일상적인 사고 방법을 이용하여 이 문제를 풀도록 요구하였다. 초등학교 고학년이나 중학교 학생들이 <그림 6>에 제시되어진 것과 같은 풀이를 찾아낼 것이라는 것을 알았다.

풀이방법 a에서는, 학생들은 규정된 정사각형을 만들고 성냥개비를 하나하나씩 차례로 세었다. 풀이방법 b에서 '4×5=20'과 같이 접근한 것은 잘못되었지만 개방적 접근에서 흥미있는 면은 교사가 학생들에게 잘못된 점을 지적하지 않고 학생들이 학생들에게 잘못된 점을 지적한다는 것이다. ; 추론하는 과정일 때는 잘못된 점을 지적한다. 풀이방법 c는 교대로 있는 정사각형을 각각 다른 방법으로 세는데 바탕을 두고 있다. 홀수번째에 있는 정사각형은 모두 4개의 성냥개비가 알기 쉽게 제시되어 있고, 정사각형 사이에 있는 위쪽과 아래쪽에 있는 성냥개비까지 합산하면 16개이다. 풀이방법 d는 다른 방법으로 4개의 성냥개비를 4개의 묶음으로 나누었다. 어느 쪽이든 한 행의 끝에 있는 정사각형이 4개의 성냥개비를 합산하는데 기여한다. 이것은 가장 오른쪽에 있는 정사각형은 3개의 변을 계산하지 않고 다른 정사각형에 인접하도록 남겨 놓으면, 다른 4개의 성냥개비를 얻기 위해 왼쪽에 나눠진 변을 가져와 다음 쌍의 정사각형이 되도록 묶는다. 마침내, 그 쌍의 위쪽과 아래쪽에 있는 성냥개비는 총합이 16이 되도록 4개의 성냥개비를 합산하는데 기여한다. 풀이방법 e에서는, 위쪽에 있는 5개의 성냥개비와 아래쪽에 있는 5개의 성냥개비에다가 수직방향으로 있는 성냥개비를 모두 더하면

된다. 그러면 6개의 수직방향으로 있는 성냥개비를 더하면 16이 된다. 풀이방법 f에서는, 가장 왼쪽에 있는 정사각형은 4개의 성냥개비가 합산하는데 기여하고, 이것의 오른쪽에 있는 다른 네 개의 정사각형은 각각 3개씩의 성냥개비를 합산한다.



<그림 6> 성냥개비 문제에서 답을 찾는 여러 가지 방법

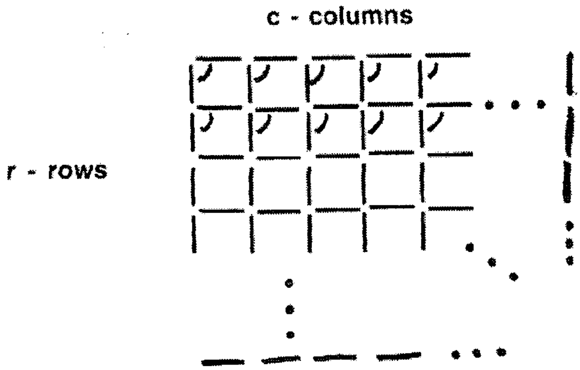
여기서 상세한 기술은 하지 않지만 부수적으로 말하면, 일본의 연구자들에 의해서 사용되어진 평가의 다른 구성요소는 '세련됨(elegance)'이다. 하지만, 이것은 일반적으로 알고 있는 세련됨의 의미와는 약간의 차이가 있음을 의미한다. '세련됨' 그것이 의미하는 것은 학생들이 수학적인 기호로 자신의 생각을 표현하는 정도를 의미한다.

미국이 Carbondale에 에 위치한 South Illinois University의 수학과에 재직 중인 Neal Foland 와 나는 증명 단원에서 이 문제를 사용하기 시작했을 때, 정사각형의 개수에 3배를 하고 1을 더해서 성냥개비의 개수를 구함으로써 모든 학생들이 수업을 끝내기를 원했다. 이 방법은 풀이방법 g에 나타나 있다. 풀이방법 f에서 사용된 방법을 일반화할 수 있는 정도가 된다. 풀이방법 g에서 사용된 방법이 문제를 해결하기에 매우 좋은 방법이다. 왜냐하면 한 행의 임의의 정사각형 개수까지 쉽게 일반화 할 수 있다. 우리는 이것이 문제를 풀기 위해 매우 통찰력이 있는 방법이라고 생각하였다.

문제를 풀기 위해 개방적 접근을 사용했을 때, 교사(혹는 교수)들이 기대하지 않았던 흥미있는 일이 일어났다. 예를 들어, 두 개의 다른 증명 수업을 들었던 중학생인 Jaymee와 Khia는 훨씬 좋은 방법을 제안하였다. 사실, Jaymee는 더 좋은 방법을 말했다. 이 방법이 풀이방법 h에서 제시된 것이다.

풀이방법 h에서, 각 정사각형의 위쪽 모서리에 있는 5개의 직각을 만들었던 10개의 성냥개비를 우선 계산한다. 이 값에 정사각형의 아래쪽 행에 있는 5개와 맨 끝에 하나를 더해서 계산한다. 분명하게 이 방법으로 문제를 풀었다. 그래서 우리는 그녀에게 더 좋은 방법을 생각해 보는 것이 어떻겠냐고 요구를 하였다. 그녀는 이 방법이 훨씬 더 일반적인 방법이라고 대답했다. ; 그녀가 하기를 <그림 7>에 보여진 것처럼, 주어진 문제는 더 일반화된 문제의 특별한 한 경우라는 것이다.

다음 그림에서 성냥개비의 개수를 찾는 일반적인 규칙은 무엇인가?(단, c는 열의 개수, r은 행의 개수이다.)



(2 x c + 1) x r + c = 성냥의 개수

<그림 7> r행, c열을 사각형을 형성하는 성냥

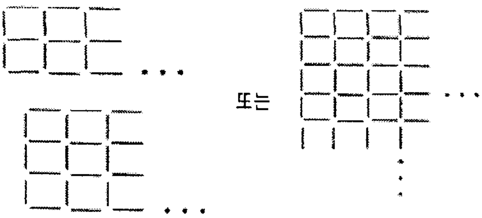
공유한 변에서부터 기여한 것을 어떻게 계산하는지를 이해함으로써 <그림 7>에서 보여준 것처럼 c개의 열과 r개의 행이 있는 성냥개비의 개수를 생각해 냈다. 우선, 풀이방법 h처럼 맨 위쪽에 있는 행을 계산했다. 그 다음 c열의 왼쪽 상단에 있는 성냥개비 개수를 계산했다. 즉, $2\times c$이다. 그러면 오른쪽 상단에 있는 정사각형의 오른쪽 변에 있는 1개의 성냥개비를 더하면 $2c+1$이다. 그 다음 행의 개수 r만큼 곱하면 $(2c+1)r$이다. 마지막으로, 완성되지 않은 정사각형 c개가 있는데, 이것은 각 열의 맨 아래쪽에 1개씩의 성냥개비가 있는 것이다. 각각의 정사각형은 1개의 성냥개비를 더함으로써 끝난다. 그래서 앞의 값에 c를 더하면 $(2c+1)r+c$이다. 그 다음날 숙제였던 10×10×10에서 성냥개비의 개수를 계산했다.

앞에서 언급했던 것처럼, 수학교육에서 개방성의 세 번째 구성요소는 두 단계로 이루어져 있다. 학생들이 주어진 문제를 푼 후, 원래의 문제에 바탕을 두어 스스로 새롭게 문제를 만든다. 이 경우에, 학생들이 주어진 조건을 바꿈으로써 새로운 문제를 만드는 약간의 방법도 있지만, 우선 원래의 조건이 무엇인지를 이해를 해야 한다.

그러한 조건들은 무엇이겠는가? 우리는 성냥개비를 사용해서 정사각형을 만들었다. ; 그것은 두 가지 분리된 조건이다. 정사각형은 공유한 변을 가지고 있는 평면 속에 있는데, 그것이 두 가지 조건이다. 우리는 다섯 개의 정사각형을 구성함으로써 시작했다. ; 그것이 또 다른 조건이다. 만일 우리가 어떤 한 가지 그 이상의 조건을 바꾼다면, 우리는 새로운 문제를 고안할 수 있다. 어떤 새로운 문제들은 <그림 8>에서 보여주고 있는데, 거기서 우리는 한 가지 혹은 그 이상의 조건들을 바꾸었다.

풀은 문제와 유사한 당신의 문제를 고안하기

1. 8개의 정사각형을 만들기 위해 몇 개의 성냥이 필요한가?
2. 20개의 정사각형을 만들기 위해 몇 개의 성냥이 필요한가?
3. 100개의 정사각형을 만들기 위해 몇 개의 성냥이 필요한가?
4. n개의 정사각형을 만들기 위해 몇 개의 성냥이 필요한가?
5. 이러한 상황은 어떤가?



6. 사각형을 삼각형으로 변형하기

오각형, 육각형으로 변형하면 어떻게 되는가? 등등.

7. 40개의 성냥을 가지고 있다고 가정하자. 얼마나 많은 정사각형을 만들 수 있는가?
8. 이차원에서 삼차원으로 바꾸어 보아라.

<그림 8> 형식화된 문제는 풀려진 문제와 같다.

먼저, 우리는 정사각형의 개수를 8, 20, 100으로 바꾸거나 혹은 n개의 정사각형으로 일반화할 수 있다. 우리는 수직방향으로 혹은 수평방향 또는 수직, 수평 양방향으로 r개의 행과 c개의 열을 가진 정사각형의 배열로 확장할 수 있다. 우리는 사각형 대신에 삼각형으로 문제를 변형할 수도 있고, 오각형, 육각형으로, 일반적으로 n각형으로 변형할 수도 있다. 이것은 다각형으로 평면에 타일붙이기를 하는 흥미로운 문제로 이끌 수 있다. 어떤 학생들은 거꾸로 된 문제를 고안할 수도 있다. 즉, 임의의 사각형을 만들기 위해서는 몇 개의 성냥이 주어져 있어야 하는가? 우리는 또한 이차원에서 삼차원으로 문제를 옮길 수 있다. 더 새로운 문제를 얻기 위해서 위에서 사용된 그러한 방법을 사용함으로

이 새로운 문제를 개정하게 된다. 그것은 매우 흥미로운 것을 얻게 할 뿐만 아니라 매우 해볼만한 것이다.

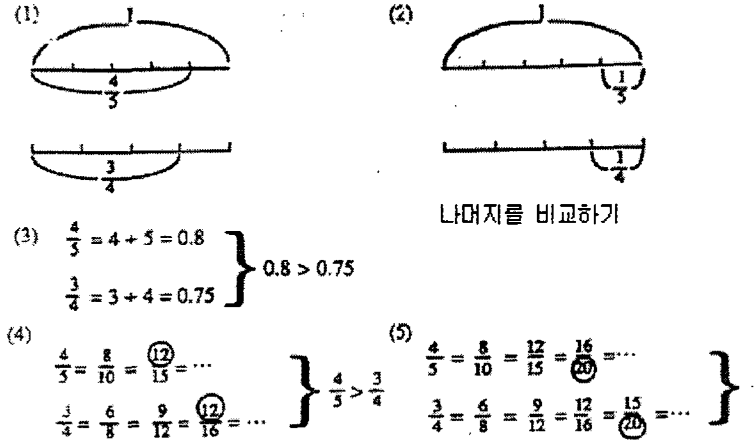
우리의 미국과 일본의 국제연구에서 우리는 미국에 있는 학생들이 4,6,8,11학년에서 서로 다른 수의 새로운 문제를 적었다는 사실을 발견하였다. 그러나, 이러한 문제들은 그들이 풀었던 문제들과는 전혀 관련이 없는 것들이었다. 이것은 그들이 문제를 일반적으로 만들거나 주어진 정보를 충분히 가지기에는 많은 미국 학생들에게 너무나 새로운 것이었다. 그것은 놀랄만한 것은 아니다. 그들은 그들이 생각하는 문제를 적었던 경우가 있었다. 그러나, 그것은 주어진 정보가 불충분하게 있었다. 그들이 완전한 문제를 적었던 경우도 있었다. 그러나, 그것은 아주 단순한 것이었다. 예를들면, 그들은 사각형의 개수를 간단하게 변화시켰던 것이다. 하지만, 몇몇 학생은 매우 좋은 문제를 적었다. 심지어 아주 독창적인 문제이기까지 했다. 일본의 연구가들은 서로 다른 학년에서 평균 2.7개의 그들이 풀었던 문제와 관련된 분명한 수학문제를 적었다.

닫힌문제를 개방형 문제로 만들기

우리는 개방적 접근이 더 보편화되어지고 있음에도 불구하고 미국에서 사용되어지는 교과서에서 '개방형 문제'의 전형적인 모습을 볼 수 없다. 그것은 수학교육현장에서 개방적 접근에 부합된 수업을 통해 더 전형적인 개방형문제가 발견되어지고 있기 때문이다. 우리가 발견한 문제의 종류들은 '전통적인' 혹은 '닫힌' 문제라고 불러질 수 있다. 그러한 문제들은 일반적으로 문제해결의 유일한 방법이 존재하고, 한 가지 해답을 이끌어내고, 새로운 문제들을 생성해내지 못한다. 하지만, 우리는 우리의 교과서나 다른 교육적 자료로부터 전통적인 문제를 취하여 개방형문제로 그것들을 변환시키는 다양한 방법을 가지고 있다. 때때로 그것은 매우 쉬운 일이기도 하다.

이것에 대한 한 가지 예가 <그림 9>에 서술되어져 있다. 우리는 두 분수 $\frac{4}{5}$와 $\frac{3}{4}$ 중에 어느 것이 더 큰지를 결정하는 문제에서 시작하자. 일반적인 수업에서 가르쳐지는 모든 것은 두 개의 주어진 분수에서 더 큰 것을 발견할 수 있는 규칙을 학생이 배우는 것이다. 이제, 전통적인 방법에서 만약에 이러한 규칙을 가르치는 대신에 단순하게 ' $\frac{4}{5}$와 $\frac{3}{4}$ 중에서 어느 것이 더 큰가?'라고 질문하자. 그리고 나서, 그 문제에 대한 학생 자기 자신의 답을 찾을 때까지 학생들을 그대로 남겨두자. 학생들이 제시하는 풀이에 대한 몇 가지 가능한 방법은 <그림 9>에 제시되어져 있다.

$\frac{4}{5}$ 와 $\frac{3}{4}$ 중에서 어느 것이 더 큰가?



<그림 9> '$\frac{4}{5}$ 와 $\frac{3}{4}$ 중에서 어느 것이 더 큰가?' 에 대한 답

첫 번째 풀이에서는 길이 1의 두 선분이 조각으로 분할되어져 있다. 첫 번째는 5등분되어져 있고, 두 번째는 4등분되어져 있다. 분수 $\frac{4}{5}$ 는 5개의 조각 중에서 4조각을 의미하고, 분수 $\frac{3}{4}$ 는 4개의 조각 중에서 3조각을 의미한다. 이제 학생들을 어느 것이 더 긴가를 볼 수 있다. 방법2에서는, 학생들이 역시 두 선분을 등분하였다. 하지만, 학생들의 관심은 남아있는 조각에 있고, $\frac{1}{4}$ 와 $\frac{1}{5}$ 중에서 어느 것이 더 작은 지를 결정하였다. 방법3에서는, $\frac{4}{5}$ 와 $\frac{3}{4}$ 을 십진법의 자리값으로 바꾼 후, 그것들을 비교하였다. 방법 4에서는, 주어진 분수의 쌍과 같은 값을 가지는 분수들을 찾은 후, 분자가 동일하게 되었을 때 더 큰 분수를 쉽게 결정할 수 있었다. 방법 5에서는, 방법 4와 비슷한 방법이다. 여기에서는 분모가 같아지는 두 분수를 만들어서 비교함으로써 큰 분수를 찾을 수 있다. 물론 이 방법은 미국의 수학수업시간에 이 문제를 제시하였을 때 일반적으로 가르쳐지는 규칙의 이론적인 배경이 되는 것이다.

결 론

우리가 보았던 문제와 그것들과 유사한 다른 많은 문제들은 전통적인 접근으로부터 우리가 수학교육에서 '개방적 접근'이라고 불리는 접근으로의 변화의 한 종류를 제공해 준다. '학교수학을 위한

원칙과 규준'에서는 많은 정보들이 있다. 하지만, 내가 생각하기에는 교사들이 쉽게 읽을 수 있는 자료는 아니다. 그것은 연구를 해야만 한다. 먼저 여러 가지 예들을 보아야 하고, 많이 볼수록 더 좋아진다. 개방적 접근은 1970년대 일본에서의 연구를 기초로 하고 있다. 개방적 접근은 '학교수학을 위한 원칙과 규준'과 같은 개정된 문서들의 권고들을 실제적으로 학교 교실에서 그것들을 개정하도록 변화시키는데 많은 도움을 주고 있다.

나는 Alan Schoenfeld 의 주장에 더 많이 접근하기를 원한다. 그는 수학교육에 대한 매우 좋은 많은 생각들을 가지고 있다. 1991년에 그는 MSS(Mathematical Association of America)에서 아주 강한 주장을 펼쳤다. 그것은, '수학은 살아가는 것이고, 숨 쉬는 것이며, 감각(sense)을 만드는 흥미 넘치는 훈련이다. 그들이 교실에서 개방적 접근 방법으로 그것(수학)을 경험하게 될 때에만 학생들은 개방적 방법으로 그 사실(수학)을 알게 될 것이다.'

우리는 이러한 감각(sense)을 만드는 과정이 교사와 학생 사이에 활동에 있어서 차이를 만들어 낸다는 것을 발견해 왔다. 만일 그들이 우리가 가르치는 것에서 이러한 감각을 만들 수 있다면, 그 싸움의 대부분은 말하자면 이기는 것이다. 만일 그들이 할 수 없다면 전적으로 다른 것이 된다. 이제, 개방적 접근에 있어서 감각을 만들기 위한 풍부한 기회가 있다. 왜냐하면, 학생들은 그들 자신의 일상적인 사고능력에서부터 출발하기 때문이다. 그들은 또한 각각 다른 학생들의 사고능력의 결과물이 실제적으로는 문제를 해결하는 보다 더 수학적으로 풍부한 방법을 제공해 줄 수 있을 것이라고 발견할 것이다.

우리는 수학을 가르치는 전통적인 접근 방법의 상황에서는 그러한 기회를 학생들에게 제공할 수 없다. Alan Schoenfeld 의 말에 의하면, 사실상 모든 일반적인 교실 수업은 학생들이 주제를 가지고 지적으로 정직한 방법으로 씨름하는 과정을 강화해야 한다. 이것은 개방적 접근을 학교수학을 가르치는데 사용할 때 정확하게 일어나는 것이다. 만일 우리가 미국의 수학교실에서 사용하기 위해 일본 수학교육자들의 연구결과에 기초를 두어 개방적 접근을 채택하고 수행한다면 우리는 수학교육의 아주 큰 가치가 있는 무엇인가를 가지게 될 것이다. 수학교육에서 대한 이러한 전망은 교사교육에 있어서 끊임없이 초점을 두어야 할 일이다.

References

Becker, J .P. and Selter, C., (1996). Elementary school practices. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, and C. Laborde (eds.), *International Handbook of Mathematics Education.* (pp.511-564). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Becker, J. P. and Shimada, S., editors (1997). *The open-ended approach: a new proposal for teaching mathematics*, Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Hashimoto, Y. and Becker, J. P., (1999) The open approach to teaching mathematics? creating a culture of mathematics in the classroom: Japan. In L. Sheffield (ed.) *Developing mathematically promising students* (pp.101-110). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Schoenfeld, A. (1991). Learning about Linear Functions. Invited presentation, special session on Research in Undergraduate Mathematics Education, Annual Joint AMS/MAA Mathematics meetings, San Francisco, CA, January 16-19, 1991.

Shimada, S. editor (1977). The open-ended approach in arithmetic and mathematics ? a new proposal toward teaching mathematics. Tokyo: Mizuumishobo [In Japanese]