

WAF 방법을 이용한 KdV 형태의 방정식 적용 Weighted Averaged Flux scheme for KdV type Equation

우승범¹, 최영광²

Seung-Buhm Woo¹, Young Kwang Choi²

1. 서 론

연속적인 자연현상을 이산화 하는 데는 많은 방법이 있다. 그 중 대표적인 것으로 유한차분법, 유한체적법, 유한요소법을 들 수 있다. 유한차분법이란 것은 자연현상을 이산화 할 때 점으로 간략화 시켜, 지배방정식을 풀 때 점과 점 사이의 관계가 어떻게 되는지를 차분식을 이용하여 푼다. 이러한 유한차분법은 가변격자를 고려해줄 수 없다. 반면 유한체적법은 가능한 한 cell에 있는 모든 값을 고려해주기 위해 지배방정식을 적분형태로 바꾼 weak-form 형태로 푼다. 각각의 cell 단 위에서 적분을 취하기 때문에 유한체적법의 경우 가변격자를 고려해줄 수 있다. Galerkin 방법을 이용한 유한요소법은 요소내의 점과 점 사이를 함수관계로 보며, 형상함수와 가중함수를 어떤 함수를 사용하느냐에 따라 유도되는 식 형태는 달라진다.

우리가 풀고자 하는 지배방정식에 각각의 방법을 적용하였을 때 유도된 식의 형태에 따라 수치진동 현상이 발생할 수 있다. 수치진동 현상이 심해질 경우 모델에서의 해가 발산할 수 있기 때문에 이러한 수치진동 현상을 제거해야 보다 정확한 해를 구해낼 수 있다. 수치진동 현상을 제거하는 방법에는 인공 점성항을 더하는 방법, flux 제한자를 가하는 방법, slope 제한자를 가하는 방법이 있다 (R.J.LeVeque, 1992).

shallow water equation에 flux 제한자를 이용하여 수치진동현상을 제거한 사례는 많이 있으나

(Fraccarollo et al, 1995; Zoppou et al, 2000; Kim et al, 2004;) shallow water equation 같은 경우 분산항이 없기 때문에 근해에만 한정시킬 수밖에 없다. 본 연구에서는 분산항이 포함되어 있는 KdV 형태의 방정식에 WAF기법을 이용한 유한체적법을 적용해보았다.

2. 유한차분법과 유한체적법 비교

유한차분법과 유한체적법을 비교해보기 위해 가변격자 상태의 선형이송방정식에 각각의 방법을 적용해보았다.

유한차분법의 경우 Kirby et al.(1998)의 완전비선형 Boussinesq 수치모형에 사용된 1계 공간 미분항에 대한 차분식인 4차 정확도를 갖는 중앙차분기법과 비교해 보았다.

- Fourth order accurate central difference approximation

$$(u_x)_i = \frac{-u_{i+2} + 8u_{i+1} - 8u_{i-1} + u_{i-2}}{12\Delta x} + \frac{\Delta x^4}{30} \left(\frac{\partial^5 u}{\partial x^5} \right) \quad (1)$$

유한체적법은 지배방정식에 적분을 취해 다음과 같은 Conservative form으로 나타내 줄 수 있다.

1 인하대학교 해양학과 조교수

2 발표자: 인하대학교 해양학과 석사과정

$$\text{Governing equation : } \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

Conservative form :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{i-1/2} - f_{i+1/2}) \quad (3)$$

본 연구에서는 1계 공간미분항을 풀기 위해 Weighted Average Flux(WAF) 방법을 적용하였고 식 형태는 다음과 같다.

$$a > 0, \\ f_{i+1/2}^{waf} = \frac{1}{2}(1+c)(au_i^n) + \frac{1}{2}(1-c)(au_{i+1}^n) \quad (4)$$

또한 수치진동현상을 제어하기 위해 TVD 제한자를 이용한 WAF method를 사용했다.

$$\Phi(r, |c|) = \begin{cases} 1 & \text{if } r \leq 0 \\ 1 - 2(1-|c|r) & \text{if } 0 \leq r \leq 1/2 \\ |c| & \text{if } 1/2 \leq r \leq 1 \\ 1 - (1-|c|r) & \text{if } 1 \leq r \leq 2 \\ 2|c|-1 & \text{if } r \geq 2 \end{cases}$$

(5)

$$c = a \frac{dt}{dx} \quad (6)$$

$$r_{i+1/2} = \frac{\Delta_{upwind}}{\Delta_{local}} = \begin{cases} \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{u_{i+1}^n - u_i^n}, & a > 0 \\ \frac{u_{i+2}^n - u_{i+1}^n}{u_{i+1}^n - u_i^n}, & a < 0 \end{cases} \quad (7)$$

초기조건은 다음과 같다.

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 1.5 \\ 1 & \text{if } 1.5 \leq x \leq 3.5 \\ 0 & \text{if } x \geq 3.5 \end{cases} \quad (8)$$

이 때 사용된 CFL 조건은 0.8이며, cell의 개수는 2000개를 사용하였다. dx는 0.01에서 도메인 끝으로 갈수록 0.0001~0.2배까지 증가되도록 변형시켰다.

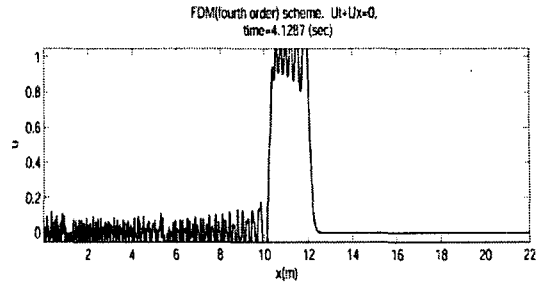


Fig. 1. FDM (Fourth order accurate central difference approximation, Time=4.1287(sec))

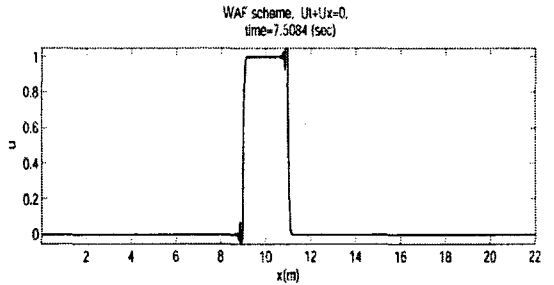


Fig. 2. FVM (WAF, Time=7.5084(sec))

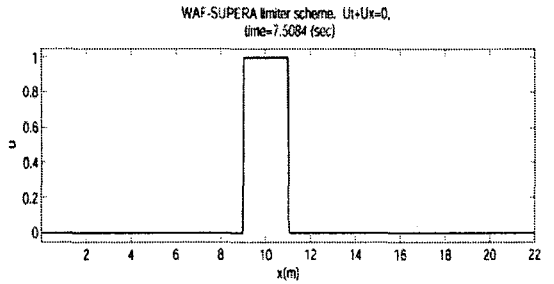


Fig. 3. FVM (TVD version of WAF, Time=7.5084(sec))

가변격자 상태에서 유한차분 모형은 많은 수치진동현상이 발생한 반면, 유한체적법의 WAF 기법을 이용한 모형은 해의 차이가 큰 부분에서만 수치진동 현상이 발생하였다. 이런 수치진동 현상은 TVD 제한자를 사용하여 제어할 수 있었다.

3. KdV 형태의 방정식에 WAF 기법 적용

본 연구에서는 분산효과를 고려할 수 있는 3계 공간미분항을 유한체적법으로 풀어보기 위해 다음과 같은 지배방정식을 택하였다.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) + \varepsilon \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (9)$$

3.1 3계 공간미분항의 유도

본 연구에서는 3계 공간미분항에 추가변수를 도입하여 1계 공간미분항으로 바꿔 식을 이산화하였다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial s(u)}{\partial x} &= 0 \\ s(u) &= \frac{\partial q(u)}{\partial x}; \quad q(u) = \frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned} \quad (10)$$

위 식에 공간에 대해 적분을 취하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \int_{i-1/2}^{i+1/2} \frac{\partial u}{\partial t} dx \\ + \int_{i-1/2}^{i+1/2} \frac{\partial f(u)}{\partial x} dx + \varepsilon \int_{i-1/2}^{i+1/2} \frac{\partial s(u)}{\partial x} dx &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

해를 나타내는 u 가 Δx 내에서 시간에 따라 변하지 않는다면 다음과 같은 형태로 바꿀 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + \frac{[f(u)_{i+1/2} - f(u)_{i-1/2}]}{\Delta x_i} \\ + \frac{\varepsilon [s(u)_{i+1/2} - s(u)_{i-1/2}]}{\Delta x_i} &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

또한 추가변수에 대한 식들은 다음과 같이 써줄 수 있다.

$$\begin{aligned} \int_{i-1/2}^{i+1/2} s(u) dx &= \int_{i-1/2}^{i+1/2} \frac{\partial q(u)}{\partial x} dx \\ s(u)_i &= \frac{q(u)_{i+1/2} - q(u)_{i-1/2}}{\Delta x_i} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \int_{i-1/2}^{i+1/2} q(u) dx &= \int_{i-1/2}^{i+1/2} \frac{\partial u}{\partial x} dx \\ q(u)_i &= \frac{u_{i+1/2} - u_{i-1/2}}{\Delta x_i} \end{aligned} \quad (14)$$

$s(u)$ 에 대한 최종적인 식은 다음과 같이 유도하였다.

$$\begin{aligned} s(u)_i &= \frac{1}{\Delta x_i} (q_{i+1/2} - q_{i-1/2}) \\ &= \frac{1}{\Delta x_i} \left(\frac{1}{\Delta x_i} (u_{i+1} - u_i) - \frac{1}{\Delta x_i} (u_i - u_{i-1}) \right) \\ &= \frac{1}{\Delta x_i^2} (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} s(u)_{i+1/2} &= \frac{1}{2} (s_i + s_{i+1}) \\ &= \frac{1}{2\Delta x_i^2} (u_{i+2} - u_{i+1} - u_i + u_{i-1}) \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} s(u)_{i-1/2} &= \frac{1}{2} (s_i + s_{i-1}) \\ &= \frac{1}{2\Delta x_i^2} (u_{i+1} - u_i - u_{i-1} + u_{i-2}) \end{aligned} \quad (17)$$

3.2 Time integration scheme

KdV type equation을 FVM 기법으로 푸는데 있어서 time integration scheme은 다음과 같은 Third order TVD Runge-Kutta method를 사용하였다.

$$ODE: u_t = L(u)$$

$$u^{(1)} = u^n + \Delta t L(u^n) \quad (18)$$

$$u^{(2)} = \frac{3}{4} u^n + \frac{1}{4} u^{(1)} + \frac{1}{4} \Delta t L(u^{(1)})$$

$$u^{n+1} = \frac{1}{3} u^n + \frac{2}{3} u^{(2)} + \frac{2}{3} \Delta t L(u^{(2)})$$

3.3 결과

초기조건은 다음과 같은 soliton 형태의 함수로 하였다.

$$u(x,0) = \begin{cases} 3\text{csech}^2(k(x-x_0)) & \text{if } x \leq 5 \\ 0 & \text{if } x > 5 \end{cases} \quad (19)$$

$$c = 0.3, x_0 = 0.5, \varepsilon = 5 \times 10^{-4}, k = (1/2) \sqrt{c/\varepsilon}$$

Δx 는 0.01, cell의 개수는 2000개를 사용하여 도메인 범위는 $0 \leq x \leq 20$ 이 되도록 하였고, 비선형항인 1계 공간미분항은 WAF 기법을 이용하였다.

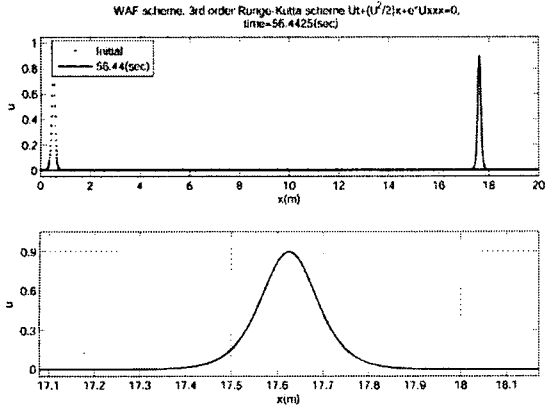


Fig. 4. WAF scheme, 3rd Runge-Kutta scheme (Time = 56.44(sec))

1계 공간미분항에 대해서는 WAF 기법을 사용하고, 3계 공간미분항에 대해서는 추가변수 도입, 시간적분방법에는 Third order TVD Runge-Kutta method를 적용한 결과 초기 파형을 그대로 유지하며 전파되었다.

4. 결 론

본 연구에서는 WAF 기법을 이용한 유한체적 모형의 정확성과 효율성의 비교를 위해 유한차분 모형의 선형이송방정식과 비교를 해보았다. 그 결과 해의 형태가 급격한 변화가 있는 부분에서 발산되는 해의 형태를 보이는 유한차분 모형보다 TVD 제한자를 이용한 WAF 기법의 유한체적 모형이 수치진동 현상에 대한 처리를 제대로 해주고 있음을 판단할 수 있어 더욱 정확한 모형이라 할 수 있겠다.

또한 분산효과를 고려해줄 수 있는 3계 공간미분항을 유한체적법으로 풀기 위해 추가변수를 도입하여 KdV 형태의 방정식에도 적용을 해보았다. 적용한 결과 해의 형태는 초기 값을 그대로 유지하며 전파하였고 이 결과를 통하여 Boussinesq equations에도 적용이 가능할 것으로 사료된다.

참고문헌

- Fraccarollo, L., Toro, E.F. (1995). Experimental and numerical assessment of the shallow water model for two dimensional dam-break type problems. *Journal of hydraulic Research*, 33(6), 843-863.
- Hirsch, C. (2000). Numerical computation of internal and external flows-Volume 1. John Wiley & Sons.
- Kirby, J.T., Wei, G, Chen, Q., Kennedy, A.B. and Dalrymple, R.A. (1998). FUNWAVE 1.0 Fully nonlinear Boussinesq wave model documentation and user's manual
- Kim, D.H., Cho, Y.S., Kim, W.G. (2004). Weighted averaged flux-type scheme for shallow water equations with fractional step method. *Journal of Engineering Mechanics*, 130(2), 152-160.
- LeVeque, R.J. (1992). Numerical methods for conservation laws. Birkhauser Verlag.
- Toro, E.F. (1999). Riemann solvers and numerical Methods for fluid dynamics. Springer.
- Zoppou, C., Roberts, S. (2000). Numerical solution of two dimensional unsteady dam break. *Applied mathematical modelling*, 24, 457-475.