

수정 완경사 파랑식에 존재하는 항의 크기 Magnitude of Terms in Modified Mild Slope Equation

서승남¹
 Seung-Nam Seo¹

1. 서 론

완경사 파랑식은 심해에서 천해로 전파하는 파랑의 변형을 계산하는 데 Boussinesq 파랑식과 같이 중요한 두 개의 축을 이룬다. Berkhoff(1972)에 의해 제시된 완경사 파랑식은 해저경사와 해저곡률 항들을 무시한 것으로 일련의 연안사주가 존재하는 경우에는 무시된 항들을 포함하는 수정 완경사 파랑식을 사용하여야 올바른 파랑변형을 나타낼 수 있음을 보였다(Massel, 1993; Chamberlain와 Porter, 1995).

수정 완경사 파랑식은 Smith와 Sprinks(1975), Mei(1989) 등이 사용한 고유함수 전개법으로, Kirby(1984), Chamberlain와 Porter 등이 사용한 변분법으로 그리고 Massel, Chamberlain와 Porter 등이 사용한 Galerkin방법으로 각각 유도할 수 있으며 비록 다른 방법을 사용하여도 그 결과식은 동일하다. Smith와 Sprinks는 역류파(non-propagating waves)를 포함한 무시된 항들의 크기를 유추(order of magnitude)하여 기술하였다. 한편 본 논문의 제2절에서는 Mei(1989)의 방법을 이용하여 진행파에 대한 수정 완경사 파랑식의 유도과정을 요약하고 이를 토대로 포함된 각 항들을 정량화하기 위한 시도로 무차원 매개변수 kh 의 함수로 표시하였다.

제3절에서는 제시된 각 항들 심해역과 천해역에 대해 계산하여 크기를 그림에 나타내었고 특성을 분석하였다. 도시된 각 항의 크기는 해저경사와 해저곡률 부분을 포함하지 않으며 이는 독립변수와 같이 작용함으로 실제 수심이 주어지면 이를 고려하여 크기를 정량화할 수 있다.

2. 수정 완경사 파랑식

수심 $h(x,y)$ 이 변하는 지역을 지나는 파랑의 선형 운동은 속도 포텐셜 $\phi(x,y,z)$ 을 이용하여 다음 Laplace 미분식의 해로 나타낼 수 있다. 좌표계의 원점은 정지해면 상에 위치하며 z 축은 상향을 양의 방향으로 정한 오른손 좌표계를 사용한다. 그리고 $x-y$ 평면공간의 미분 연산자는 $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ 으로 정의하고 수면과 수심의 z 방향 경계면과 $x-y$ 평면에 관한 측면 경계면으로 둘러싸인 정의구역 내에서의 파랑운동을 고려한다.

$$\nabla^2 \phi + \phi_{zz} = 0, \quad -h(x,y) < z < 0 \quad (1.a)$$

$$\phi_z - \frac{\omega^2}{g} \phi = 0, \quad z = 0 \quad (1.b)$$

$$\phi_z = -\nabla h \cdot \nabla \phi, \quad z = -h(x,y) \quad (1.c)$$

$$\phi = \phi_s, \quad \text{on the lateral boundaries} \quad (1.d)$$

여기서 파수는 $k = 2\pi/L$ 로 정의된 파장의 함수이며 g 는 중력가속도이고 해수면 경계조건으로부터 유도되는 파랑 분산식은 $\omega^2 = gk \tanh kh$ 이 된다. 그러면 파장, 주기 T_w ($\omega = 2\pi/T_w$) 그리고 수심의 함수로 정의된 파랑 분산식에서 이들 가운데 하나는 일의적으로 정해진다. 식(1.d)는 측면 경계면에서 속도 포텐셜 ϕ_s 은 주어진 함수임을 나타내며 이를 포함하여야 비로소 식(1)은 올바르게 설정된 하나의 미분식(a well posed boundary value problem)이 된다.

식(1)의 차원을 낮추기 위해 고유함수 전개법을 사용한다. 수심이 변하는 지역을 지나는 파랑의 수심분포를 함수 $f(x,y,z) = \cosh k(h+z)/\cosh kh$ 로

¹ 발표자: 한국해양연구원 연안개발연구본부 책임연구원

로 표현하면 이 함수는 위의 미분방정식과 유사한 다음 Sturm-Liouville 미분식을 만족한다.

$$k^2 f - f_{zz} = 0, \quad -h(x, y) \leq z \leq 0 \quad (2.a)$$

$$f_z - \frac{\omega^2}{g} f = 0, \quad z = 0 \quad (2.b)$$

$$f_z = 0, \quad z = -h(x, y) \quad (2.c)$$

식(1.a)에 f 를 곱한 후 수심에 대해 적분하고 Green의 항등식을 이용하여 주어진 수심 성분함수 f 에 대한 미분으로 변환하여 정리한다.

$$\int_{-h}^0 \{ \nabla^2 \phi + \phi f_{zz} \} dz = -(\phi_z f)|_{z=0} + (\phi f_z)|_{z=-h} \quad (3)$$

이제 식(3)에 식(1)의 경계조건과 식(2)를 대입하면 식(4)가 얻어진다.

$$\int_{-h}^0 (\nabla^2 \phi + k^2 \phi) f dz = -(\nabla h \cdot \nabla \phi) f|_{z=-h} \quad (4)$$

한편 단주기 진행 파랑의 속도 포텐셜은 해면의 동역학 경계조건(Mei, 1989)을 감안하면 식(5)과 같이 수심 성분함수와 해면함수 $\eta(x, y, z)$ 의 곱으로 나타낼 수 있다.

$$\phi(x, y, z) = -\frac{ig\eta(x, y)}{\omega} f(x, y, z) \quad (5)$$

그리고 식(5)를 식(4)에 대입하여 정리하면 식(6)을 얻을 수 있다.

$$\int_{-h}^0 \left(\begin{aligned} & f^2 \nabla^2 \eta + 2f \frac{\partial f}{\partial h} \nabla \eta \cdot \nabla h \\ & + \eta f \frac{\partial^2 f}{\partial h^2} |\nabla h|^2 + \eta f \frac{\partial f}{\partial h} \nabla^2 h + k^2 \eta f^2 \end{aligned} \right) dz \quad (6)$$

$$= - \left\{ \nabla h \cdot \left(f \nabla \eta + \eta \frac{\partial f}{\partial h} \nabla h \right) \right\} f \Big|_{z=-h}$$

식(6)의 적분 내의 미분 연산자를 적분 연산자 밖으로 끌어내기 위해 Leibniz공식을 사용하여 정리한 것이 식(7)이다.

$$\nabla \cdot \int_{-h}^0 f^2 \nabla \eta dz + \int_{-h}^0 k^2 \eta f^2 dz \quad (7)$$

$$= -\eta |\nabla h|^2 \left\{ \int_{-h}^0 f \frac{\partial^2 f}{\partial h^2} dz + f \frac{\partial f}{\partial h} \Big|_{z=-h} \right\}$$

$$- \eta \nabla^2 h \int_{-h}^0 f \frac{\partial f}{\partial h} dz$$

식(7)에 포함된 수심함수를 적분하면 식(8)이 됨을 보일 수 있다.

$$P = \int_{-h}^0 f^2 dz = \frac{\tanh kh}{2k} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \quad (8)$$

$$\equiv \frac{1}{2k} [T + kh(1 - T^2)] = \frac{CC_g}{g}$$

식(8)에서 $C = \omega/k$ 는 파속, $C_g = Cn$ 는 군속도,

$T \equiv \tanh kh$ 이며 이를 식(7)에 대입하고 우변을 무시하면 식(9)가 얻어진다.

$$\nabla \cdot (CC_g \nabla \eta) + k^2 CC_g \eta = 0 \quad (9)$$

식(9)와 식(7)을 비교하면 무시된 항은 $O(|\nabla h|^2, \nabla^2 h)$ 이며 이들은 해저경사의 제곱 또는 해저면의 곡률로 특정한 완경사 지형에서는 작음을 알 수 있다. 즉 지형이 완만히 변하는 경우 이를 무시하여 얻어진 식(9)가 Berkhoff(1972)가 유도한 완경사 파랑식(MSE, mild slope equation)이다.

한편 수정 완경사 파랑식(MMSE, modified mild slope equation)은 식(7)의 모든 항을 포함한다. 식(7)의 우변 항은 Chamberlain와 Porter(1995) 그리고 Miles와 Chamberlain(1998)이 적분을 계산한 것과 동일하며 여기서 제시한 식(10)은 Miles와 Chamberlain의 표기를 따른 것이다.

$$D_c^* = \int_{-h}^0 f \frac{\partial f}{\partial h} dz = \frac{(1 - T^2) [T - kh(1 + T^2)]}{4 [T + kh(1 - T^2)]} \quad (10)$$

$$D_s^* = \int_{-h}^0 f \frac{\partial^2 f}{\partial h^2} dz + f \frac{\partial f}{\partial h} \Big|_{z=-h}$$

$$= \frac{\begin{aligned} & 9T^2(1 + T^2) - 6T(1 - 2T^2 + 3T^4)(kh) \\ & - 3(1 - T^2)(1 - 2T^2 + 3T^4)(kh)^2 \\ & - 8T(1 - T^2)^2(kh)^3 - 2(1 - T^2)^3(kh)^4 \end{aligned}}{12 [T + kh(1 - T^2)]^3}$$

한걸음 더 나아가 수정 완경사 파랑식에 포함된 항들의 크기에 대한 비교가 용이한 Helmholtz식의 형태로 바꾸기 위해 식(7)에 $\zeta = \sqrt{P} \eta$ 를 이용하여 변수 변환하면 식(11)을 얻을 수 있다.

$$\nabla^2 \zeta + \left(k^2 - \frac{\nabla^2 P}{2P} + \frac{|\nabla P|^2}{4P^2} + \frac{D}{P} \right) \zeta = 0 \quad (11)$$

여기서 $D \equiv D_c^* \nabla^2 h + D_s^* |\nabla h|^2$ 이며 P 의 미분항은 식(7)의 우변과 같은 형태로 나타낼 수 있다.

$$\nabla^2 P = \left(\frac{\partial}{\partial h} \int_{-h}^0 f^2 dz \right) \nabla^2 h \quad (12)$$

$$+ \left(2 \frac{\partial}{\partial h} \int_{-h}^0 f \frac{\partial f}{\partial h} dz + \frac{\partial f^2}{\partial h} \Big|_{z=-h} \right) |\nabla h|^2$$

$$|\nabla P|^2 = \left(\frac{\partial}{\partial h} \int_{-h}^0 f^2 dz \right)^2 |\nabla h|^2$$

식(12)도 식(10)을 구할 때 사용한 방법을 이용하여 계산하고 이를 식(11)에 대입하여 해저경사와 해저곡률의 항으로 구분하여 식(13)과 같이 나타낸다. 그러면 완경사 파랑식에 포함된 항은 식(14)가 되고 무시된 항은 식(15)가 된다.

$$\nabla^2 \zeta + [k^2 + (P_c + D_c) \nabla^2 h + (P_s + D_s) |\nabla h|^2] \zeta = 0 \quad (13)$$

$$P_c = -\frac{k(1-T^2)[3T+kh(1-3T^2)]}{2[T+kh(1-T^2)]^2} \quad (14)$$

$$P_s = \frac{k^2(1-T^2)\left\{13T^2+3T^4+T(2-4T^2-6T^4)(kh)\right.}{4[T+kh(1-T^2)]^4} \left. + (1+5T^2-9T^4+3T^6)(kh)^2\right\}$$

$$D_c = \frac{k(1-T^2)[T-kh(1+T^2)]}{2[T+kh(1-T^2)]^2} \quad (15)$$

$$D_s = \frac{-k^2(1-T^2)\left\{9T^2(1+T^2)-6T(1-2T^2+3T^4)(kh)\right.}{6[T+kh(1-T^2)]^4} \left. -3(1-T^2)(1-2T^2+3T^4)(kh)^2\right.}{-8T(1-T^2)^2(kh)^3-2(1-T^2)^3(kh)^4}$$

3. 항의 크기

수정 환경사 파랑식에 포함된 항들인 식(14)와 (15)에 나타낸 식은 무차원인 kh 만의 함수로 나타낼 수 있으며 kh 의 조건에 따라 이를 천해역, 심해역 그리고 전이역으로 구분하여 크기를 나타내고자 한다.

우선 천해역 조건($kh \ll 1$)인 경우 $\omega^2 \cong gk^2h$ 이므로 식(13)은 식(16)과 같이 변형한다.

$$\nabla^2 \zeta + \left[\begin{array}{c} khT \frac{1}{h^2} + h(P_c + D_c) \frac{\nabla^2 h}{h} \\ + h^2(P_s + D_s) \frac{|\nabla h|^2}{h^2} \end{array} \right] \zeta = 0 \quad (16)$$

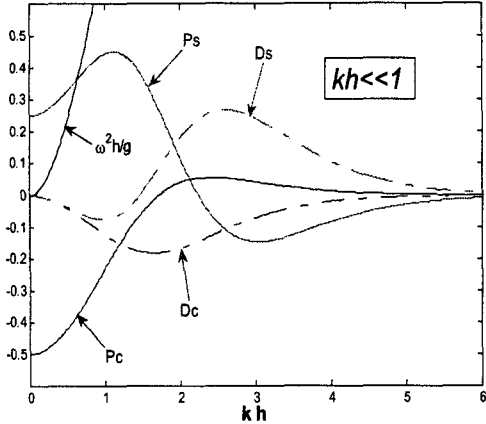


Fig. 1. Evaluation of terms in MMSE for $kh \ll 1$.

그림 1의 천해역에서 알 수 있듯이 MSE에 포함된 h^2P_s , hP_c 는 MSE에서 무시된 상응하는 h^2D_s , hD_c 보다는 상당히 크며 따라서 식(13)에서 D 와 관련된 항을 무시한 기존 연구결과의 타당함을 입증한다. 그러나 해저경사와 해저곡률은

독립변수와 같이 작용하기 때문에 이들 간의 직접 비교는 경우의 수가 많아 어려움이 있음을 지적한다. 표 1에 식(16)의 분모에 h^2 이 포함된 항을 계산하여 이들의 상대적인 크기를 제시하였다. 해저경사가 1:3으로 아주 급하고 $kh < 0.15$ 보다 작은 경우를 제외하면 천해역에서도 k^2 의 항이 큰 것을 알 수 있다.

심해역 조건($kh > 1$)인 경우 $\omega^2 \cong gk$ 이고 엄밀한 의미의 심해역($kh \gg 1$)은 파랑이 해저면의 영향을 받지 않은 해역으로 일정 수심의 특별한 경우로 간주할 수 있다. 이 경우에는 식(13)은 식(17)과 같이 변형하여 포함된 항들의 크기를 그림 2에 나타내었다.

$$\nabla^2 \zeta + k^2 \left[\begin{array}{c} 1 + \frac{(P_c + D_c)}{k^2 h} h \nabla^2 h \\ + \frac{(P_s + D_s)}{k^2} |\nabla h|^2 \end{array} \right] \zeta = 0 \quad (17)$$

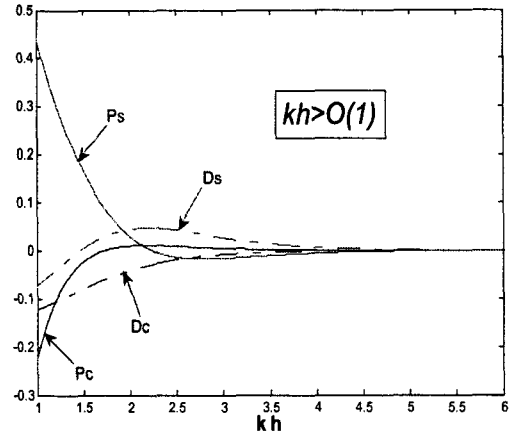


Fig. 2. Evaluation of terms in MMSE for $kh \geq O(1)$.

식(17)과 그림 2에서 알 수 있듯이 심해역에서는 k^2 의 항이 가장 크다. 그림 2에서도 해저경사와 해저곡률에 대한 부분이 배제되어 각 항의 실제 크기는 이를 감안하여야 한다. 그러나 k^2 의 항을 제외한 나머지 항들은 kh 가 증가할수록 급격히 감소하는 것을 알 수 있고 이 경우에는 k^2 항만을 사용하여도 충분한 것으로 판단된다.

전이역은 천해역과 심해역을 연결하는 해역으로 이 해역의 좌우 극한은 천해역과 심해역에서와 같은 형태를 보이게 된다. 따라서 그림 1과 2에서도 도시된 천해역과 심해역에서의 MMSE에 포함된 항들의 크기에 대한 형태와 전이역의 특성을 감안하면 이 해역에서의 각 항의 크기는 보다 복잡한

Table 1. Evaluation of terms associated with the bottom slope and k^2 for different kh and $|\nabla h|$.

kh	0.05	0.1	0.15	0.2	
$h^2 P_s$	0.2508	0.2533	0.2574	0.2631	
khT	0.0025	0.01	0.0223	0.0395	
$h^2 P_s \nabla h ^2$	0.0279	0.0281	0.0286	0.0292	$ \nabla h = 1/3$
	0.0025	0.0025	0.0026	0.0026	$ \nabla h = 1/10$

형태를 보이는 것으로 추정되고 이에 대한 연구가 필요한 것으로 판단된다.

4. 결론

수정 환경사 파랑식에 포함된 각 항의 크기는 이를 Helmholtz식의 형태로 변형함으로써 나타낼 수 있고 그 크기를 무차원 변수 kh , 해저경사와 해저곡률의 함수로 표시하였다. 각 항과 연관된 크기를 정량화하기 위해서 천해역과 심해역으로 구분하여 각각 다른 매개변수를 이용하여 무차원화한 크기를 나타내고 그 특성을 분석하였다. 본 논문에 제시된 항들의 크기는 독립변수와 같이 작용하는 해저경사와 해저곡률 부분을 배제한 것으로 대상해역의 수심이 주어지면 제시된 그림을 이용하여 실제 크기를 정량화할 수 있다.

여기서 제시된 결과를 분석하면 일반적으로 천해역에서는 환경사 파랑식에서 무시된 항들이 크기가 작음이 입증되었고 심해역에서는 k^2 항만을 사용하여도 충분한 것으로 판단된다. 한편 천해역과 심해역의 중간에 위치하는 전이역에서 각 항들은 보다 복잡한 형태를 보일 것으로 예상하며 이에 대한 연구가 필요한 것으로 판단된다.

감사의 글

본 연구는 한국해양연구원의 기본연구사업인 “해상파랑 관측 및 조사” 연구에서 수행된 결과의 일부이며 연구비 지원에 감사를 드립니다.

참고문헌

- Berkhoff, J. C. W. (1972). Computation of combined refraction-diffraction. Proc. 13th Coastal Eng. Conf., 1, 471-490.
- Chamberlain, P. G. and Porter, D. (1995). The modified mild-slope equation. J. Fluid Mech., 291, 393-407.
- Kirby, J. T. (1984). A note on linear surface wave-current interaction over slowly varying topography. J. Geophys. Res., 89(C1), 745-747.
- Massel, S. R. (1993). Extended refraction-diffraction equation for surface waves. Coastal Eng., 19, 97-126.
- Mei, C. C. (1989). The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves. World Scientific, Singapore.
- Miles, J. W. and Chamberlain, P. G. (1998). Topographical scattering of gravity waves. J. Fluid Mech., 361, 175-188.
- Smith, R. and Sprinks, T. (1975). Scattering of surface waves by a conical island. J. Fluid Mech., 72, 373-384.