비선점 우선순위 M/G/1 대기행렬의 결합 고객수 분포

The joint queue length distribution in the nonpreemptive priority M/G/1 queue

김길환* · 채경철*

* 한국과학기술원 산업공학과 (kh_kim@kaist.ac.kr, kcchae@kaist.ac.kr)

Abstract

In this paper we present a simple approach to the joint queue length distribution in the nonpreemptive priority M/G/1 queue. Without using the supplementary variable technique, we derive the joint probability generating function of the stationary queue length at arbitrary time.

1. 서론

대기행렬 시스템에서 '우선순위 정책 (Priority discipline)'은 시스템에 도착하는 고객의 클래스별로 차별화된 '서비스 품질 (QoS; Quality of Service)'을 제공하기 위한 주요한 수단 중 하나이다. 이러한 이유로 우선순위 대기행렬 시스템, 특히 우선순위 M/G/1 시스템에 대한 많은 연구가 수행되어 왔으며, 클래스별 고객수 및 대기시간의 '주변 분포 (Marginal distribution)'에 대해서는 비선점 (Non-preemptive) 및 선점 (Preemptive) 우선순위 M/G/1 시스템 모두에 대하여 잘 알려져 있다 [1, 9].

이에 반해서 우선순위 대기행렬 시스템의 클래스별 고객수의 '결합 분포 (Joint distribution)'에 대한 연구는 드물게 이루어져 왔으며, 이러한 연구의 대부분은 '부가변수법 (Supplementary variable technique)'을 이용한 접근 방법을 채택하여 왔다. 우선순위 M/G/1 시스템의 결합 고객수 분포에 대한 선구적인 연구로는 '시간 의존적인 부가변수법 (Time-dependent supplementary variable technique)'을 이용한 Jaiswal [5]의 연구가 있으며, 일종의 MMPP (Markov Modulated Poisson Process) 과정인 SPP (Switched Poisson Process) 도착과정을 따르는 우선순위 대기행렬 시스템에 대한 결합 고객수 분포 역시 부가변수법을 이용하여 연구되었으며 [8], 최근에는 이산 시간 모형에서 부가변수법을 이용한 우선순위 $Geo^X/G/1$ 시스템의 결합 고객수 분포에 대한 연구가 수행되었다 [6].

위의 연구들은 부가변수법의 강력함을 효과적으로 이용하고 있으나, 부가변수법이 가진 상대적인 복잡성으로 인해 한 시스템에서 도출된 결과를 약간의 변형만으로 유사한 시스템에 적용하기 어렵고, 시스템에 대한 직관적 이해가 어려운 단점이 있다. 이러한 이유로, 고객의 클래스가 여러 개인 대기행렬 모형 중 가장 간

단한 모델인 우선순위가 없는 ‘다중 클래스 M/G/1 (Multi-class M/G/1)’ 시스템에 대한 결합 고객수 분포를 부가변수법을 이용하지 않고 구한 연구결과가 최근에 발표되기도 하였다 [2].

본 연구에서는 기본적으로 내재점 마코프 과정 (Embedded Markov Chain)과 Chae et al. [3]이 제시한 ATA (Arrival Time Approach) 방법을 확장하여, 부가변수법을 사용하지 않고 클래스가 2개 있는 비선점 우선순위 M/G/1 시스템에 대한 결합 고객수 분포를 구하는 방법을 제시하고자 한다.

2. 모델 및 기호 설명

본 연구에서 대상으로 하는 모델은 2개의 고객 클래스를 가지는 비선점 우선순위 M/G/1 시스템이다. 시스템은 비선점 우선순위 정책에 따라 서비스 제공의 우선순위가 상위 클래스에 있지만, 상위 클래스 도착시 하위 클래스의 서비스가 진행 중이면 서비스가 끝날 때까지 기다리며, 동일 클래스 내에서는 FCFS (First come first served)에 따라 서비스 순서가 결정된다.

우선순위가 상위인 클래스를 ‘클래스-1’로, 하위 클래스를 ‘클래스-2’라 할 때, 각 클래스 고객은 각각 도착 rate $\lambda_i,\ i=1,2$ 인 포아송 과정(Poisson Process)을 따른다고 하고, 각 클래스별 서비스 시간은 $S_i,\ i=1,2$ 이며, 이의 Laplace-Stieltjes transform (LST)을 $S_i^*(\theta),\ i=1,2$ 라 하자. 각 클래스의 도착과정과 서비스 시간은 서로 독립이라 가정한다.

그러면 전체 고객의 도착 rate와 서비스 시간의 LST는 다음과 같다.

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$$
$$S^*(\theta) = \frac{\lambda_1}{\lambda} S_1^*(\theta) + \frac{\lambda_2}{\lambda} S_2^*(\theta)$$

본 논문에서는 다음의 기호를 사용한다. 시스템이 안정 상태일 때, 임의시점의 시스템에 머무는 클래스-i 고객수를 각각 N_i, 고객 도착 직전 시점에 관찰하는 클래스-i 고객수를 각각 N_i^A, 그리고 고객의 시스템 이탈 시점에 관찰하는 시스템에 있는 클래스-i 고객수를 N_i^D 라고 표기하기로 한다.
위에 정의된 각 시점에서 시스템에 있는 클래스별 고객수의 결합 PGF (Probability Generation Function)는 다음과 같이 표기하기로 한다.

$$\Pi\,(z_1,z_2) @ E\left[z_1^{N_1}\cdot z_2^{N_2}\right],\quad |z_1|,|z_2|\le 1$$
$$\Pi^A(z_1,z_2) @ E\left[z_1^{N_1^A}\cdot z_2^{N_2^A}\right],\quad |z_1|,|z_2|\le 1$$
$$\Pi^D(z_1,z_2) @ E\left[z_1^{N_1^D}\cdot z_2^{N_2^D}\right],\quad |z_1|,|z_2|\le 1$$

앞으로 별도의 명시가 없는 한 고객수 및 대기시간의 분포는 시스템의 안정상태에서의 고객수 및 대기시간을 의미하기로 한다.

3. 이탈 직후 시점의 결합 고객수 분포

비선점 우선순위 M/G/1 시스템에서 고객 이탈 직후 시점에 관찰하는 클래스별 고객수의 결합 분포에 대한 연구는 1960년대에 주로 이루어졌다. 고객 클래스가 2개인 경우는 Miller [7]에 의해 결합 고객수 분포의 PGF가 명시적 형태로 제시되었으며, 임의의 n개의 클래스가 있는 경우는 Welch [10][1] 에 의해 결합 고객수 분포의 PGF가 이를 구할 수 있는 관계식의 형태로 제시되었다. 그러나 비선점 우선순위 M/G/1 시스템에서는 고객 도착 시점 또는 임의 시점의 결합 고객수 분포와 이탈시점의 결합 고객수 분포는 서로 다르기 때문에 위의 결과는 크게 주목 받지 못하였다 [5].

반면 우선순위 M/G/1 시스템에서도 각 클래스별로, 또는 총 고객수에 대해서는 Burke의

[1] [10]은 [9]의 chap. 3의 p.306-312 부분을 간접 참조하였음.

정리 [9]에 의해 이탈 시점에 관찰하는 고객수와 도착 시점에 관찰하는 고객수의 분포는 같다. 즉, 클래스-i 고객의 도착 시점에만 관찰하는 클래스-i 고객수를 $N_i^{A(i)}$ 라 하고, 클래스-i 고객의 이탈 시점에만 관찰하는 클래스-i 고객수를 $N_i^{D(i)}$ 라 하면, $N_i^{A(i)} \overset{d}{=} N_i^{D(i)},\ i=1,2,$ 이 성립하고, 마찬가지로 시스템 내의 총 고객수에 대해서도 다음이 성립한다.

$$N^A \overset{d}{=} N^D,$$
$$where\ N^A = \sum_i N_i^A,\ N^D = \sum_i N_i^D$$

그런데 최근 Boxma와 Takine [2]는 우선순위가 없는 다중 클래스 M/G/1의 경우 고객의 도착 시점에 관찰한 결합 고객수 분포와 이탈 시점에 관찰한 결합 고객수 분포가 동일함을 보였다. 이는 매우 특수한 경우로서 서비스 정책이 클래스별로 차별적인 우선순위를 두지 않기 때문에 성립한 경우라 할 수 있다. 그 이유는, (1) 시스템 내의 총 고객수에 대해 $N^A \overset{d}{=} N^D$ 이 성립하며 (Burke's 정리), (2) 이탈 시점에 $N^D = n$ 명의 고객을 관찰하였다는 조건 하에 클래스별 고객수의 조건부 결합 분포는 클래스별 우선순위가 없으므로 이탈하는 고객의 클래스와 무관하게 다항 분포$(n, \lambda_1/\lambda, \lambda_2/\lambda)$를 따르고, (3) 도착시점에서 $N^A = n$ 명의 고객을 관찰하였다는 조건 하에 클래스별 고객수의 조건부 결합 분포도 마찬가지로 도착한 고객의 클래스에 무관하게 다항 분포$(n, \lambda_1/\lambda, \lambda_2/\lambda)$를 따르므로 도착 시점과 이탈 시점의 결합 고객수 분포가 같아지게 된다.

이와 달리 클래스별로 우선순위가 있는 경우 일반적으로 이탈 시점에 $N^D = n$ 명을 관찰하였다는 조건 하에 조건부 결합 고객수 분포와, 도착 시점에서 $N^A = n$ 명을 관찰하였다는 조건 하에 조건부 결합 고객수 분포는 서로 다르다. 이는 비선점 우선순위 대기행렬 시스템에서 그 예를 확인할 수 있다. 비선점 우선순위 정책이므로 하위 클래스 고객이 대기열에서 이탈하는 시점에 대기열에 총 n 명의 고객을 관찰하였다면, 이 중 상위 클래스 고객은 0명이어야 하나, 하위 클래스 고객이 대기열 도착 시점에 n 명의 고객을 관찰하였을 때는 상위 클래스 고객은 0명 이상이 존재할 수 있다. 따라서, 총 고객수에 대해서는 이탈 시점과 도착 시점에 관찰하는 고객수가 같더라도 결합 고객수 분포는 이탈 시점과 도착 시점이 서로 다르다.

이러한 이유로 고객 이탈 시점의 결합 고객수 분포는 내재점 마코프 과정을 이용하여 비교적 쉽게 구할 수 있으나 크게 주목 받지 못하였다.

본 연구에서는 고객 이탈 시점의 결합 고객수 분포와 고객 도착 시점 또는 임의 시점의 결합 고객수 분포 사이의 관계를 제시함으로써 고객 도착 시점 또는 임의 시점의 결합 고객수 분포를 좀 더 간단히 구할 수 있는 방법을 제시할 것이다.

이를 위해 먼저 고객 이탈 시점의 결합 고객수 분포를 구하도록 한다.

n 번째로 시스템에서 이탈하는 고객이 이탈 직후 관찰하는 클래스-i 고객수를 $N_i^D(n)$ 라고 하자. 그러면 $(N_1^D(n), N_2^D(n))$ 는 고객의 이탈 시점을 내재점(Embedded Point)으로 하는 내재점 마코프 체인이 되며, 다음과 같은 관계식이 성립한다 [7].

$$\Pi^D(z_1,z_2) = \Pi_{0,0}^D \cdot S^*(\phi) + \left(\frac{\Pi^D(0,z_2) - \Pi_{0,0}}{z_2}\right) \cdot S_2^*(\phi)$$
$$+ \left(\frac{\Pi^D(z_1,z_2) - \Pi^D(0,z_2)}{z_1}\right) \cdot S_1^*(\phi),$$

$$where\ \phi \triangleq \sum_i \lambda_i - \sum_i \lambda_i z_i \quad (1.1)$$

이를 $\Pi^D(z_1,z_2)$ 에 대해 정리하면 다음과 같다.

$$\Pi^D(z_1,z_2) = \Pi^D_{0,0}\cdot\frac{z_1\{S_2^*(\phi)-z_2S^*(\phi)\}}{z_2\{S_1^*(\phi)-z_1\}} + \Pi^D(0,z_2)\cdot\frac{z_2S_1^*(\phi)-z_1S_2^*(\phi)}{z_2\{S_1^*(\phi)-z_1\}} \quad (1.2)$$

(1.2)는 Miller [7]의 (2.12)와 같은 식이 되며, Welch ([9]의 Chap. 3의 (2.87)식)의 결과와도 같게 된다.

Miller [7]는 (1.2)의 미지 항인 $\Pi^D(0,z_2)$ 을 구하기 위해 원래의 내재점 마코프 과정에 대해 시스템 이탈 시점 중 클래스-1 고객이 없는 시점을 다시 내재점으로 하는 두 번째 내재점 마코프 과정을 이용하였으나, 본 연구에서는 식 (1.2)에 Rouché 정리 [1, 9]를 적용하여 직접적으로 $\Pi^D(0,z_2)$ 을 구하도록 한다.

(1.2)에 Rouché 정리를 적용하면 (1.2)의 분모식인 $z_1 = S_1^*(\lambda-\lambda_1z_1-\lambda_2z_2)$ 의 해는 $|z_1|,|z_2|\le 1$ 에서 오직 한 개만 존재함을 알 수 있다. 그 해를 $z_1^{(0)}(z_2)$ 라고 하자. 시스템이 안정 상태를 이루기 위해서는 $|z_1|,|z_2|\le 1$ 에서 $\Pi^D(z_1,z_2)$ 가 항상 정의되어야 하므로, (1.2)의 분자식도 $z_1^{(0)}$ 을 해로 가져야 한다. 이를 이용하면 다음의 관계식을 구할 수 있다

$$\Pi^D(0,z_2) = \Pi^D_{0,0}\cdot\frac{S_2^*(\phi_0)-z_2S^*(\phi_0)}{S_2^*(\phi_0)-z_2}, \quad (1.3)$$
$$where\ \phi_0 = \lambda-\lambda_1z_1^{(0)}-\lambda_2z_2$$

(1.3)의 결과를 (1.2)에 대입한 후, $\Pi^D(z_1,z_2)=1$ 에서 다음을 구할 수 있다.

$$\Pi^D_{0,0} = 1-\rho \quad (1.4)$$

결국 (1.3)과 (1.4)를 (1.2)에 대입하면, 아래와 같이 고객의 이탈 직후에 관찰하는 결합 고객수 분포의 PGF를 얻을 수 있다.

$$\Pi^D(z_1,z_2) = (1-\rho)\cdot\left[\frac{z_1\{S_2^*(\phi)-z_2S^*(\phi)\}}{z_2\{S_1^*(\phi)-z_1\}} + \frac{z_2S_1^*(\phi)-z_1S_2^*(\phi)}{z_2\{S_1^*(\phi)-z_1\}}\cdot\frac{S_2^*(\phi_0)-z_2S^*(\phi_0)}{S_2^*(\phi_0)-z_2}\right] \quad (1.5)$$

Remark 1. (1.3)과 (1.5)는 [7]의 식 (2.16)과 (2.18)과 동일함을 확인할 수 있다.

Remark 2. 클래스-1 고객 한 명으로 서비스가 시작되어 서버가 계속해서 클래스-1 고객을 서비스 하는 시간을 클래스-1의 바쁜 기간(Busy Period)이라고 하고, 이의 LST를 $B_1^*(\theta)$라고 하면, $B_1^*(\theta) = S_1^*(\theta+\lambda_1-\lambda_1B_1^*(\theta))$ 이 성립한다. 따라서, 클래스-1의 바쁜 기간 동안 도착한 클래스-2 고객수의 PGF는 $B_1^*(\lambda_2-\lambda_2z_2)$ 가 되며,

$$B_1^*(\lambda_2-\lambda_2z_2) = S_1^*(\lambda_1-\lambda_1B_1^*(\lambda_2-\lambda_2z_2)+\lambda_2-\lambda_2z_2)$$

을 만족하게 되므로, $z_1^{(0)}$ 는 $B_1^*(\lambda_2-\lambda_2z_2)$ 가 동일함을 알 수 있다 [1, 9].

고객의 시스템 이탈 직후의 결합 고객수 분포를 이용하면 고객의 서비스 시작 직후, 즉 고객의 대기열 이탈 직후의 결합 고객수 분포도 구할 수 있다.

$n+1$ 번째로 서비스 시작하는 고객이 속한 클래스를 $C(n+1)$ 이라 하고, 서비스 시작 직후에 관찰하는 클래스-i 고객수를 $N_i^S(n+1)$ 라고

하면, n 번째 시스템에서 이탈하는 고객이 이탈 직후 시점에 관찰하는 클래스별 고객수와 다음과 같은 관계를 가진다.

$(N_1^D(n), N_2^D(n))$	$C(n+1)$	$(N_1^S(n+1), N_2^S(n+1))$
$N_1^D=0$, $N_2^D=0$	λ_1/λ 확률로 클래스−1	$(1,0)$
	λ_2/λ 확률로 클래스−2	$(0,1)$
$N_1^D=0$, $N_2^D>0$	클래스−2	$(0, N_2^D)$
$N_1^D>0$	클래스−1	$(N_1^D, 0)$

따라서, $\Pi^{S(i)}(z_1,z_2),\ i=1.2$ 을 클래스-i 고객의 서비스가 시작된 직후에 관찰하는 결합 고객수 분포의 PGF라고 하면, 다음의 식이 성립한다.

$$\Pi^{S(1)}(z_1,z_2)=\frac{\left[\Pi^D(z_1,z_2)-\Pi^D(0,z_2)+\Pi_{0,0}\cdot\frac{\lambda_1}{\lambda}z_1\right]}{\frac{\lambda_1}{\lambda}} \tag{2.1}$$

$$\Pi^{S(2)}(z_1,z_2)=\frac{\left[\Pi^D(0,z_2)-\Pi_{0,0}+\Pi_{0,0}\cdot\frac{\lambda_2}{\lambda}z_2\right]}{\frac{\lambda_2}{\lambda}} \tag{2.2}$$

(2.1)과 (2.2) 식에 (1.3), (1.4), (1.5)의 결과를 대입하여 정리하면, 다음 식을 얻게 된다.

$$\begin{aligned}&\Pi^{S(1)}(z_1,z_2)\\&=(1-\rho)z_1\left[\begin{array}{l}\dfrac{\phi}{\lambda_1\{S_1^*(\phi)-z_1\}}\\+\dfrac{z_2-S_2^*(\phi)}{\{S_1^*(\phi)-z_1\}}\cdot\dfrac{\lambda_2(1-z_2)+\lambda_1\cdot\left\{1-S_1^*(\phi_0)\right\}}{\lambda_1\cdot\left\{S_2^*(\phi_0)-z_2\right\}}\end{array}\right]\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\Pi^{S(2)}(z_1,z_2)=(1-\rho)z_2\left[\frac{\lambda_2(1-z_2)+\lambda_1\cdot\left\{1-S_1^*(\phi_0)\right\}}{\lambda_2\cdot\left\{S_2^*(\phi_0)-z_2\right\}}\right] \tag{2.4}$$

Remark 3. $\Pi_Q^{D(i)}(z_1,z_2),\ i=1.2$ 를 클래스-i 고객의 대기열 이탈 직후 시점에 관찰하는 대기열에 있는 클래스별 고객수의 결합 PGF라고 하면, 다음의 관계가 성립한다.

$$\Pi_Q^{D(i)}(z_1,z_2)=\Pi^{S(i)}(z_1,z_2)/z_i \tag{3.1}$$

클래스-2 고객이 대기열을 떠나는 시점에는 대기열에는 클래스-2 고객만 있게 되므로, $W_{Q,2}^*(\theta)$ 을 클래스-2 고객의 대기시간의 LST 라고 하면 다음과 같은 관계식이 성립한다.

$$\Pi_Q^{D(2)}(z_1,z_2)=W_{Q,2}^*(\theta)\Big|_{\theta=\lambda_2-\lambda_2 z_2} \tag{3.2}$$

$W_Q^{(2)}(\theta)$ 와 (3.2)를 이용하면, 다음 식을 얻는다 [1, 9].

$$\begin{aligned}\Pi_Q^{D(2)}(z_1,z_2)&=W_{Q,2}^*(\theta)\Big|_{\theta=\lambda_2-\lambda_2 z_2}\\&=\left.\frac{(1-\rho)(\theta+\lambda_1-\lambda_1B_1^*(\theta))}{\theta-\lambda_2+\lambda_2S_2^*(\theta+\lambda_1-\lambda_1B_1^*(\theta))}\right|_{\theta=\lambda_2-\lambda_2 z_2}\\&=\frac{(1-\rho)\left\{\lambda_2(1-z_2)+\lambda_1-\lambda_1S_1^*(\phi^0)\right\}}{\lambda_2S_2^*(\phi^0)-\lambda_2z_2}\end{aligned} \tag{3.3}$$

(3.1)을 이용하면 (2.4)와 (3.3)의 결과와 동일함을 확인할 수 있다.

4. 도착 시점/임의 시점의 결합 고객수 분포

임의의 고객의 도착 시점에서 서버가 유휴 상태인지, 클래스−1 서비스 상태인지, 클래스−2 서비스 상태인지에 따라 결합 고객수 PGF에 대해 조건을 걸면 $\Pi^A(z_1,z_2)$ 는 다음과 같이

표현된다.

$$\begin{aligned}\Pi^A(z_1,z_2) &= P_I^A \cdot \Pi^A(z_1,z_2 \mid I) \\ &+ P_{S_1}^A \cdot \Pi^A(z_1,z_2 \mid S_1) + P_{S_2}^A \cdot \Pi^A(z_1,z_2 \mid S_2)\end{aligned} \quad (4.1)$$

$P_I^A, P_{S_1}^A, P_{S_2}^A$ 는 각각 고객 도착 시점에 서버가 유휴, 클래스−1 서비스 중, 클래스−2 서비스 중일 확률이고, $\Pi^A(z_1,z_2 \mid I)$, $\Pi^A(z_1,z_2 \mid S_1)$, $\Pi^A(z_1,z_2 \mid S_2)$ 는 각 경우의 시스템 내의 고객수의 조건부 결합 PGF이다. 그런데, PASTA [11]에 의해 (4.1)은 임의 시점의 분포로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}\Pi(z_1,z_2) &= P_I \cdot \Pi(z_1,z_2 \mid I) \\ &+ P_{S_1} \cdot \Pi(z_1,z_2 \mid S_1) + P_{S_2} \cdot \Pi(z_1,z_2 \mid S_2)\end{aligned} \quad (4.2)$$

P_I, P_{S_1}, P_{S_2} 는 각각 임의 시점에 서버가 유휴, 클래스−1 고객 서비스 중, 클래스−2 고객 서비스 중일 확률이고, $\Pi(z_1,z_2 \mid I)$, $\Pi(z_1,z_2 \mid S_1)$, $\Pi(z_1,z_2 \mid S_2)$ 는 각 경우의 시스템 내 고객수의 조건부 결합 PGF이다.

비선점 우선순위 M/G/1에서는 서비스규칙에 의해 고객의 서비스 시간이 변화하지 않으므로 Little의 법칙에 의해 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}&P_{S_1} = \rho_1 @ \lambda_1 E(S_1) \\ &P_{S_2} = \rho_2 @ \lambda_2 E(S_2) \\ &P_I = 1\text{-}\rho,\ where\ \ \rho @ \rho_1 + \rho_2 = \lambda E(S)\end{aligned} \quad (4.3)$$

$S_{i,E}$, $i = 1,2$ 를 안정 상태에서 클래스- i 고객 서비스 중에 도착하는 고객이 관찰하는 서비스 경과 시간(Elapsed service time)이라고 하고, $S_{i,E}(\theta)$ 을 이의 LST라고 하면, Green의 정리 [4]에 의해 다음이 성립한다.

$$S_{i,E}^*(\theta) = \left\{1 - S_i^*(\theta)\right\} / \theta E\left[S_i\right] \quad (4.4)$$

또한, 클래스- i 고객 서비스 중에 도착하는 고객이 관찰하는 클래스별 고객수는, 클래스- i 고객의 서비스 시작 직후 시점의 클래스별 고객수와 서비스 경과 시간(Elapsed service time) 동안 도착한 클래스별 고객수의 convolution의 형태로 표현된다 [3]. 따라서 다음의 관계식이 성립한다.

$$\Pi(z_1,z_2 \mid S_i) = \Pi^{S(i)}(z_1,z_2) \cdot S_{i,E}^*(\phi),\ i = 1,2 \quad (4.5)$$

따라서, (4.2)의 결과에 (4.3)-(4.5)를 대입하게 되면 다음을 얻게 된다.

$$\begin{aligned}\Pi(z_1,z_2) &= (1-\rho) + \rho_1 \cdot \Pi^{S(1)}(z_1,z_2) \cdot S_{1,E}^*(\phi) \\ &+ \Pi^{S(2)}(z_1,z_2) \cdot S_{2,E}^*(\phi)\end{aligned} \quad (4.6)$$

마지막으로, (4.6)에 (2.3)과 (2.4)를 대입하여 정리하면, 임의시점의 결합 고객수 분포를 구할 수 있다.

$$\Pi(z_1,z_2) = (1-\rho)\left[\begin{aligned}&1 + \frac{\lambda_2(1-z_2) + \lambda_1 \cdot \left\{1 - S_1^*(\phi_0)\right\}}{S_2^*(\phi_0) - z_2} \\ &\times \left\{\frac{1 - S_2^*(\phi)}{\phi} \cdot z_2 + \frac{z_2 - S_2^*(\phi)}{S_1^*(\phi) - z_1} \cdot \frac{1 - S_1^*(\phi)}{\phi} \cdot z_1\right\} \\ &+ \frac{1 - S_1^*(\phi)}{S_1^*(\phi) - z_1} \cdot z_1\end{aligned}\right] \quad (4.7)$$

Remark 4. (4.7)식에 $z_2 = 1$ 과 $z_1 = 1$ 를 각각 대

입하면, 임의시점의 클래스-1의 고객과 클래스-2의 고객의 주변 분포의 PGF를 각각 구할 수 있다.

$$\Pi(z_1,1) = \frac{\left\{(1-\rho)(1-z_1)+\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\cdot\left\{1-S_2^*(\lambda_1-\lambda z_1)\right\}\right\}\cdot S_1^*(\lambda_1-\lambda z_1)}{S_1^*(\lambda_1-\lambda z_1)-z_1} \tag{4.8}$$

$$\Pi(1,z_2) = \frac{(1-\rho)\left\{(1-z_2)+\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\cdot\left\{1-S_1^*(\phi_0)\right\}\right\}\cdot S_2^*(\lambda_2-\lambda_2 z_2)}{S_2^*(\phi_0)-z_2} \tag{4.9}$$

(4.8)과 (4.9)은 [1의 p. 566 식 (9.3.25)], [9의 p294의 식 (2.29a)]에서 제시된 임의시점의 클래스별 고객수의 주변 분포의 PGF와 같음을 확인할 수 있다.

참고문헌

[1] 이호우, [대기행렬이론], 개정판, 시그마프레스, 1998.

[2] Boxma, O. J. and Takine T., The M/G/1 FIFO Queue with Several customer Classes, *Queueing Systems* 45 (2003), p.185-198.

[3] Chae, K. C, Lee, H. W., Ahn, C. W., An arrival time approach to M/G/1-type queues with generalized vacations, *Queueing Systems* 38 (2001), p.91-100.

[4] Green, L., A limit theorem on subintervals of interrenewal times, *Oper. Res. 30* (1982), p.210-216.

[5] Jaiswal, N. K. *Priority Queues*, Academic Press, New York, 1968.

[6] Lee, Y., Kim, Y. H., and Huh J. D., Discrete-time $Geo^X/G/1$ queue with non-preemptive priority, *Comput. Math. Appl.* 46 (2003), p.1625-1632.

[7] Miller, R. G., Jr., Priority queues, *The Annals of Mathematical Statistics,* .31 (1960), p.86-103.

[8] Sugahara A. Takine T. et al., Analysis of a nonpreemtive priority queue with SPP arrivals of high class, *Performance Evaluation* 21 (1995), p.215-238.

[9] Takagi, H. *Queuing Analysis, Vol. 1: Vacation and Priority Systems, Part 1*, North-Holland, Amsterdam, 1991.

[10] Welch, P. D., Some contribution to the theory of priority queues. Ph.D. Thesis, Department of Mathematical Statistics, Colombia University; IBM Research Report RC-922, IBM Research Center, Yorktown Heights, New York.

[11] Wolff, R. W., Poisson arrivals see time averages, *Oper. Res.* 30 (1982), p.223-231.