D-MAP 도착과정을 갖는 이산시간 대기행렬모형에서의 분포적 Little 의 법칙과 D-MAP/D/c 모형에의 응용

김남기
전남대학교 산업공학과
광주광역시 북구 용봉동 300 번지

Abstract

For a broad class of discrete-time FIFO queueing systems with D-MAP (discrete-time Markovian arrival process) arrivals, we present a *distributional Little's law* that relates the *distribution* of the stationary number of customers in system (queue) with that of the stationary number of slots a customer spends in system (queue). Taking the multi-server D-MAP/D/c queue for example, we illustrate how to utilize this relation to get the desired distribution of the number of customers.

Little 의 법칙의 일반성과 유용성

Little 의 법칙 (Little, 1961), $L=\lambda \cdot w$ 은 (고객 입력률 λ 와 출력률이 같은) 안정된 대기행렬시스템에서 안정상태 시스템 내 평균고객수(L)와 시스템 내 평균체류시간(w)의 사이에 항상 성립하는 관계식이다. Little 의 법칙을 활용하면, 평균고객수와 평균체류시간 중, 하나만 구함으로써 다른 하나를 자동적으로 구할 수 있다. Little 의 법칙은 본 논문의 주요 연구대상인 대기행렬시스템 뿐만 아니라 임의의 (입력률과 출력률이 같은) 안정된 입출력시스템에 대해서 (심지어 blackbox 에 대해서도) 항상 성립하는 매우 일반적인 관계식이다. 예를 들어, A 대학 B 학과에 입학하는 평균 입학생의 수가 연당 50 명이라 하자. 입학생이 이 학과에서 (졸업, 전과, 자퇴까지) 평균적으로 재학하는 시간이 3.5 년이라고 한다면, 이 학과에 (임의시점) 평균 재학생 수는 Little 의 법칙에 의해 $50\times 3.5=175$ 명이다.

분포적 Little 의 법칙

안정상태 시스템 내 고객수와 시스템 내 체류시간의 평균값(혹은 일차 모멘트) 간의 관계인 Little 의 법칙을 일반화하여, 고객수와 체류시간의 이차모멘트 이상 간의 관계 혹은 고객수와 체류시간의 분포간의 관계를 규명하고자 하는 연구들(예를 들어, Haji and Newell 1971, Bertsimas and Nakazato 1995, Bertsima and Mourtzinou 1996, 등)이 수행되어왔다. 이의 결과로서 정립된 고객수분포와 체류시간분포 사이의 관계식을 '*분포적 Little 의 법칙*(*Distributional Little's Law*)'라고 한다. 이 분포적 Little 의 법칙을 활용하면 고객수와 체류시간의 분포 중, 하나만 알면 다른 하나는 자동적으로 구해진다.

최근 각광을 받고 있는 이산시간 대기행렬시스템

최근, 디지털 컴퓨터/통신시스템으로의 다양한 응용가능성으로 인하여 이산시간 대기행렬모형에 대한 연구가 증대되고 있다. (예를 들어, QUESTA 특별호 Miyazawa and Takagi, 1994). 이는 시간축이 슬랏(slot) 단위로 나누어진 이산시간 모형이 비트, 셀, 패킷 단위로 운용되는 디지털 시스템을 (연속시간모형에 비해) 보다 정확하게 모형화할 수 있기 때문이고, 따라서 연속시간 대기행렬모형을 통한 분석보다 좀 더 정확한 분석을 기대할 수 있기 때문이다. 이산시간 대기행렬모형은 컴퓨터/통신시스템 뿐만 아니라, 운송시스템, 댐 등의 다양한 확률시스템에도 널리 응용될 수 있다 (Bruneel 과 Kim, 1993, pp.2).

다재다능한 D-MAP (Discrete-time Markovian Arrival Process) 도착과정

Blondia and Casals (1992)에 의해 소개된 D-MAP 도착과정은 (1) 이론적인 면에 있어서, Bernoulli 도착과정, Markov modulated Bernoulli 도착과정, 다양한 이산시간 재생과정(renewal process)등을 모두 포괄하는 다재다능한(versatile) 도착과정이다. (2) 실용적인 면에 있어서, D-MAP 도착과정은 컴퓨터/통신 시스템에서의 패킷들의 bursty 한 도착양상(강하게 correlated 된 도착간격)을 수리적으로 잘 모형화할 수 있다.. 이러한 이유로 D-MAP 도착과정을 갖는 대기행렬시스템에 대한 연구가 최근 활발히 진행되고 있다.

D-MAP 도착과정을 갖는 이산시간 대기행렬시스템에서의 분포적 Little 의 법칙의 정립

본 논문에서는 D-MAP 도착과정을 갖는 이산시간 대기행렬시스템을 위한 분포적 Little 의 법칙을 수립한다. 이는 최근 Kim et al. (2002)이 유도한 불변의 관계식을 사용하여 얻을 수 있다. 이 분포적 Little 의 법칙을 활용하면, D-MAP 도착과정을 갖는 이산시간 대기행렬시스템의 체류시간분포로부터 고객수분포를 매우 쉽게 얻을 수 있다.

분포적 Little 의 법칙과 관련된 연구동향

연속시간 대기행렬시스템을 위한 분포적 Little 의 법칙은 Haji and Newell (1971) 이래로 많은 연구가 수행되어져 왔다 (최근 연구로는 Bertsimas and Nakazato 1995, Bertsima and Mourtzinou 1996, Takine 2001, 등). 반면, 이산시간 대기행렬시스템에서의 분포적 Little 의 법칙에 대한 연구는 그 효용성에도 불구하고 거의 연구되어 있지 않다 (Kim and Chae, 2001). 참고로, 본 연구에서 수립하는 이산시간 D-MAP 도착과정을 위한 분포적 Little 의 법칙은 Takine (2001)가 정립한 연속시간 MAP 도착과정을 위한 분포적 Little 의 법칙의 이산시간 형태로도 볼 수 있다.

분포적 Little 의 법칙의 활용: 복수서버 D-MAP/D/c 대기행렬모형의 분석

D-MAP 도착과정을 갖는 이산시간 대기행렬시스템에서 성립하는 분포적 Little 의 법칙의 강력한 활용도를 보이기 위하여, 본

논문에서는 복수서버 D-MAP/D/c 대기행렬모형을 고려한다. D-MAP/D/c 대기행렬모형에서는 고객들이 c 명의 서버 중 한 명으로부터 고정된(deterministic) 시간의 서비스를 받은 후 시스템을 떠난다. 복수서버 대기행렬모형의 분석은 특별한 경우(예를 들어 서비스시간이 Markovian 성질을 갖거나 고정된 서비스 시간인 경우)를 제외하고는 일반적으로 분석이 매우 까다로운 것으로 알려져 있다. D-MAP/D/c 대기행렬모형의 경우, Chaudhry et al.(2002)와 Alfa(2003)에 의해 체류시간분포에 대한 분석방법이 제시되어 있는 반면, 고객수분포에 대한 분석방법이 아직 제시되어 있지 않다. 본 논문에서 유도하는 분포적 Little 의 법칙을 활용하면, 알려진 체류시간분포로부터 알려져 있지 않은 고객수분포를 매우 쉽게 얻을 수 있다.

참고문헌

A. S. Alfa, Waiting time distribution of the MAP/D/k system in discrete time - A more efficient algorithm, Oper. Res. Lett. 31 (2003) 263-267.

C. Blondia, O. Casals, Statistical multiplexing of VBR sources: a matrix-analytic approach, Perform. Eval. 16 (1992) 5-20.

D. Bertsimas, G. Mourtzinou, A unified method to analyze overtake free queueing systems, Adv. Appl. Probab. 28 (1996) 588–625.

D. Bertsimas, D. Nakazato, The distributional Little's law and its applications, Oper. Res. 43 (1995) 298–310.

M. L. Chaudhry, B. K. Yoon, K. C. Chae, Waiting-time distribution of a discrete-time multiserver queue with correlated arrivals and deterministic service times: D-MAP/D/k system, Oper. Res. Lett. 30 (2002) 174-180.

R. Haji, G. F. Newell, A relation between stationary queue and waiting time distributions, J. Appl. Probab. 8 (1971) 617–620.

N. K. Kim, K. C. Chae, On the discrete-time version of the distributional Little's law, Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers 27 (2001) 374-378.

N. K. Kim, S. H. Chang, K. C. Chae. On the relationships among queue lengths at arrival, departure, and random epochs in the discrete-time queue with D-BMAP arrivals, Oper. Res. Lett. 30 (2002) 25–32.

J. D. C. Little, A proof for the queueing formula: $L = \lambda w$. Oper. Res. 9 (1961) 383-387.

M. Miyazawa, H. Takagi. Editors. Advances in Discrete-Time Queues, Queueing Systems 18 (1994).

T. Takine, Distributional form of Little’s law for FIFO queues with multiple Markovian arrival streams and its application to queues with vacations, Queueing Systems 37 (2001) 31-63.