k-서버 네트워크 단절문제

Approximation of the k-server disconnection problem

홍성필*, 최병천**

* 서울대학교 산업공학과 (sphong@snu.ac.kr)
** 서울대학교 산업공학과 (cbc@optima.snu.ac.kr)

Abstract

본 논문에서는 기존의 노드 단절 문제와 관련이 있는 k-서버 단절 문제를 정의하고, 계산 복잡도 및 근사해성에 대해 규명하였다. k-서버 단절 문제는 비근사성(inapproximaton)을 갖으며, 우리는 k가 고정됐을 때 0.5-근사해법을 갖는다는 것을 보였다.

1. 서론

k개의 서버들이 존재하는 무향 완전 그래프 $G=(V,E)$를 생각하자. 호 e와 노드 i에 각각 비음 가중치 c_e와 $(d_i^1,\cdots,d_i^k)\in Z_+^n$가 주어졌다고 하자. 서버 j와 노드 i가 단절됐다면, d_i^j의 이익과 c_{ij}의 비용이 발생한다고 하자. 문제의 목적은 전체 이익에서 단절 비용을 뺀 순이익을 최대화하는 컷(cut)을 구하는 것이다. 이 문제를 k-서버 단절 문제라고 하자. 이 문제의 정수 계획 모형은 다음과 같다.

$$\max \sum_{l\in K}\sum_{i\in N} d_i^l y_i^l - \sum_{e\in E} c_e x_e$$

$$s.t.\ \sum_{e\in P} x_e \geq y_i^l,\quad \forall P\in P_l(i),\ \forall i\in N, \forall l\in K,$$

$$x_e \in \{0,1\},\ \forall e\in E,$$

$$y_i^l \in \{0,1\},\ \forall i\in N,\ \forall l\in K.$$

여기서 $P_l(i)$는 서버 l과 노드 i 이어주는 경로(path)들의 집합을 의미하고, K는 서버 집합을 의미한다.
Martel et al. (2001)은 비용에 제약이 있는 단일 서버 단절 문제를 연구하였다. 그들은 계산 복잡도가 NP-har임을 증명하였으며, 컷-비용 부분모듈성(submodularity)의 열거(enumeration)에 기반한 최적해를 구하는 알고리듬을 제안하였다.
본 논문의 구성은 2장에서 k-서버 단절 문제와 관련 있는 기존 연구와 문제의 근사성에 대해 논의하고, 3장에서 k가 고정됐을 경우, 0.5-근사해법이 존재함을 보일 것이다.

2. 관련 연구 및 비근사성

2장에서는 k-서버 단절 문제의 비근사성과 k-터미널 컷(cut) 최소화 문제, k-멀티컷(multicut) 문제의 관계에 대해 규명할 것이다.

정리 2.1 k-서버 단절 문제는 근사해법이 존재하지 않는다. (Hong and Choi (2006))

문제 2.2 k-터미널 컷 최소화 문제 : k개의 터미널 서버들이 존재하는 무향 그래프 $G=(V,E)$를 생각하자. 호 e에 비음 가중치 c_e가 주어졌다고 하자. 노드 i와 노드 j가 단절할 때, c_{ij}의 비용이 발생한다고 하자. 문제의 목적은 최소 비용으로 모든 터미널을 단절하는 컷을 구하는 것이다.

Chopra and Rao (1985)는 2.2 k-터미널 컷(cut) 최소화 문제의 정수 계획 모델을 제안하였고, 다면체 특성을 연구하였다. Calinescu et al. (1998)는 $(\frac{3}{2}-\frac{1}{k})$-근사해법을 제안하였으며, Karger et al. (1993) 1.343-근사해법을 제안하였다.

k-터미널 컷 최소화 문제가 $(k-1)$-서버 단절 문제로 다항 시간 안에 변환(reduction)되어 다음 정리가 성립한다.

정리 2.3 : $k\geq 2$일 때, k-서버 단절 문제는 NP-hard이다.

보조 정리 2.4 2-서버 단절 문제에 α-근사해법이 존재한다면, 3-터미널 컷 최소화 문제는 $\frac{14-11\alpha}{3}$-근사해법이 존재한다.

$k\geq 3$일 때, k-터미널 컷 최소화 문제는 MAX SNP-hard이므로 (Dahlhaus et al. (1994)), 보조 정리 2.4는 다음 정리를 암시한다.

정리 2.5 고정된 k에 대해, k 서버 단절 문제는 PTAS가 존재하지 않는다.

문제 2.6 k-멀티컷 문제 : k 마디 쌍 집합 $\{(s_1,t_1),\cdots,(s_k,t_k)\}$을 갖는 무향 그래프 $G=(V,E)$를 생각해보자. 호 e는 비음 가중치 c_e가 주어졌다. 문제의 목적은 모든 마디 쌍을 최소의 비용으로 절단하는 호 집합을 구하는 것이다.

k-멀티컷(multicut) 문제는 정리 2.3 증명과 비슷하게 k-서버 단절 문제로 다항 시간 안에 변환된다.

명제 2.7 k-서버 단절 문제는 $2kn$-멀티컷 문제로 다항 시간 안에 변환된다.

3. k가 고정됐을 경우, k-서버 단절 문제의 근사성

명제 3.1 비대각(off-diagonal)에 있는 원소들의 부호가 비음인 제약이 없는 0-1 2차 수리계획 모형(unconstrained 0-1 quadratic programming)은 다항 시간 안에 최적해를 구할 수 있다. (Piccard and Ratliff (1974))

다음과 같은 조건들을 만족하는 k-서버 단절 문제는 비대각(off-diagonal)에 있는 원소들의 부호가 비음인 제약이 없는 0-1 2차 수리계획 모형으로 다항 시간 안에 변환될 수 있다.

정리 3.2 다음 조건을 만족하는 k-서버 단절 문제는 다항 시간 안에 최적해를 구할 수 있다.

1) $k=1$
2) 최적해가 두 개의 부분(partition)으로 나누어지는 경우.

p개의 부분들로 나누어진 해들 중 최적을 z_p^*라고 하자. (당연히 $z_1^*=0$) 정리 3.2에 의해, z_2^*는 다항 시간 안에 구할 수 있다.

명제 3.3 $z_2^*>0$이라면, $p\geq 3$에 대해,

$$z_2^* \geq \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{k+1}-2}\right) z_p^*.$$

$p\geq 3$에 대해, $z_p^*\leq 0$이므로 다음 명제가 성립한다.

명제 3.4 $z_2^*\leq 0$이라면, z_1^*가 최적이다.

명제 3.3과 3.4에 의해 다음 0.5-근사해법이 존재한다.

알고리듬 3.6 근사해 알고리듬
단계 1 : z_2^*를 계산한다.
단계 2 : 만약 $z_2^*>0$이면, z_2^*를 근사해로 갖는다.
단계 3 : 그렇지 않으면, $F=\varnothing$가 최적해이다.

언급 3.5 컷 최대화 문제(Max Cut)를 k가 임의의 값을 갖는 k-서버 단절 문제의 z_2^*를 계산하는 문제로 다항 시간 안에 변환 할 수 있다. 이는 z_2^*를 계산함에 있어서 알고리듬이 k에 지수 시간이 걸리는 것은 필연적임을 암시한다.

참고문헌

Calinescu, G. Karloff H. and Rabani, Y. (1998), An improved approximation algorithm for multiway cut, *Proc. 30th ACM Symposium on Theory of Computing, ACM*, 48-52.

Chopra, S. and Rao, M.R. (1991), On the multiway cut polyhedron, *Networks*, 21, 51-89.

Cunningham, W. (1985), Optimal attack and reinforcement of a network, *Journal of ACM*, **32**, 549-561.

Dahlhaus, E. Johnson, D.S. Papadimitriou, C.H. Seymour, P.D. and Yannakakis, M. (1994), The complexity of multiterminal cuts, *SIAM Journal on Computing*, **23**, 864-894.

Hong, S.P. and Choi, B.C. (2006), Computing the k-server network vulnerability for fixed k, Manuscript, Submitted for publication.

Karger, D. Klein, P. Thorup, M. Stein, C. and Young, N. (1993), Better rounding algorithm for a geometric embedding relaxation of minimum muliway cut, *STOC 99*.

Martel, C. Nuckolls, G. and Sniegowski, D. (2001), Computing the disconnectivity of a graph. manuscript, UC Davic.

Picard, J.C. and Ratliff, H.D. (1974), Minimum cuts and related problems, *Neworks*, **5**, 357-370.