

확률계수 열화모형하에서 열화자료의 분석방법 비교 연구1)

A Comparative Study on the Analysis Methods of Degradation Data under Random Coefficient Model

조유희*, 서순근**, 이수진**

* 부산품질혁신센터(yhcho@bicq.or.kr)

**동아대학교 산업경영공학과(skseo@dau.ac.kr, lee78546@hanmail.net)

Abstract

최근 들어 전통적인 (가속)수명시험으로도 고 신뢰도 제품의 신뢰도 평가가 힘들므로 제품의 성능열화를 관측하여 수명 정보를 추정하는 열화 시험에 대한 관심이 증대되고 있다.

본 논문은 대수정규분포를 따르는 확률계수 열화율 모형 하에서 분포 모수 및 수명분포의 분위수를 추정하는 세 가지 통계적 분석법(근사적, 해석적, 수치적 방법)의 통계적 성능을 비교하였다. 즉, 다양한 수치실험상황 하에서 모형에 포함되는 (측정)오차의 영향을 고려하여 세 방법의 우월성을 조사하였다.

1. 서론

오늘날의 첨단기술을 바탕으로 제조업체들은 고 신뢰도 제품을 생산하여 소비자의 요구를 만족시키고 있다. 이에 따라 고 신뢰도 제품을 전통적인 수명시험을 이용하여 분석할 때, 허용가능한 단기간의 수명시험시간동안 고장이 발생하지 않거나 혹은 매우 적은 수의 고장이 발생하는 결과가 나타나게 되었다. 이 때, 단지 고장시간만을 기록하는 전통적인 수명시험을 이용하여 제품의 수명시간을 평가하는 것은 어려운 일이다. 왜냐하면 고 신뢰도 제품은 관측중단(censoring) 혹은 높은 스트레스 수준에서의 가속시험(Accelerated test)과 같은 기법을 채택하더라도 고 신뢰도 제품의 중요한 품질 특성치인 수명에 관한 정보를 획득하기 어렵고 또한 실제 사용현장으로부터도 역시 수명정보를 획득하기가 어렵기 때문이다.

일반적으로, 대다수의 고장 메카니즘은 열화과정을 따르고 이 열화는 최종적으로 고장의 원인이 되는 제품의 쇠퇴를 초래한다. 만약 열화의 측정이 가능하다면, 이런 열화자료는 제품 신뢰도를 평가하고 향상시키는데 고장시간자료보다 더 많은 정보를 제공한다. 일반적으로 열화량은 시간에 대한 함수로 표현할 수 있다.

따라서 이런 열화 자료를 이용한 통계적 분석과 활용방법은 제품의 신뢰성 평가 및 향상에 매우 중요하다. 본 논문에서는 다음과 같은 연구 상황에서 열화 자료의 분석방법을 제시하고자 한다.

열화 자료의 고장 메커니즘을 모형화하기 위해

서는 열화경로모형을 이용하며 이 열화경로모형은 단순 일정비율(Simple Constant Rate)모형, 확률계수(Random Coefficients)모형 등으로 구분할 수 있다. 본 논문에서는 시간의 멱함수 형태로 지수(m)값에 따라 다양한 제품에 적용이 가능하여 실용성이 높고 효율성이 넓은 확률계수모형을 채택하며, 통계적 추정방법을 이용해 확률계수 열화 모형의 모수와 관심 있는 분위수를 추정하고자 한다. 통계적 방법의 종류는 근사적 방법(approximation method), 해석적 방법(analytical method), 수치적 방법(numerical method)의 3가지로 대별할 수 있으며 이중 근사적 방법은 고장이 발생하지 않은 시험단위에 대한 의사(pseudo) 고장시간을 추정하여 이 고장시간을 수명분포에 적합하여 모수와 관심 있는 분위수를 추정하는 방법이며, 해석적 방법은 특정 열화모형하에서 열화율이 특정(예를 들면, 대수정규분포)를 따를 경우 수명은 널리 수명분포로 알려진 특정분포(대수정규 분포)를 따르는 점을 이용해 수명분포의 모수와 관심 있는 분위수를 추정하는 방법이다. 마지막으로 수치적 방법은 비선형 및 선형변량(random effects)/혼합(mixed effects) 모형에 적용할 수 있도록 Pinheiro와 Bates(1995)에 의해 개발된 NLME(Nonlinear Mixed Effect)와 LME(Linear Mixed Effect)알고리즘을 이용해 열화율의 모수를 추정하며 추정된 모수를 이용한 Monte Carlo simulation을 실시하여 수명의 분위수 등을 추정하는 방법이다.

본 논문에서는 열화율이 대수정규 분포를 따른다고 가정하며 위의 3가지 통계적 추정방법을 이용하여 두 분포의 열화율의 모수와 관심 있는 낮은 분위수를 추정하고, 시료크기, 측정회수, 시험 종결시간에 따라 추정된 결과를 서로 비교하기 위한 기준으로 평균제곱오차(Mean squared Error, MSE)와 편기(bias)를 채택한다. 또한 열화 모형에 오차와 열화율의 표준편차의 비가 변함에 따라 3가지 방법에 의한 두 분포의 모수와 관심 있는 분위수의 추정치에 대한 통계적 효율성도 조사하고자 한다.

2. 열화시험자료의 분석법

열화시험은 수명에 관련된 성능 특성치의 관측을 통해서 열화자료를 획득하고, 이 열화자료를 다양한 열화모형을 통해 제품의 고장시간을 예측하는데 활용하는 방법이다. 고 신뢰도 제품의 신뢰도를 측정할 경우 열화시험은 이런 제품의 성능열화를 측정함으로써 수명시험보다 제품 신뢰도에 관해 많은 정보를 제공하면서 시험비용도 적게 드는 장점을 가진다.

1) 이 논문은 정부(교육인적자원부)의 재원으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 수행된 연구임(R05-2004-000-10410-0).

2.1 열화모형

열화고장의 메커니즘을 묘사하는 모형을 열화모형이라 하며, 이는 고장과 관련된 제품의 특성 모수의 경시적 변화를 나타내는 모형을 통칭하는 것이다. 열화(경로)모형은 일반적으로 단순 일정비율모형, 확률계수모형, 확률증분모형으로 구분할 수 있다(Nelson, 1990).

단순 일정비율은 열화율이 제품에 관계없이 시간에 비례하는 일정한 모형으로 가장 단순하며, 확률계수 모형은 열화율이 확률변수가 되어 각 시험단위의 가변성을 수용할 수 있으므로 단순 일정비율모형에 비하여 현실적이며 활용도가 높은 모형이다. 확률증분(Random Increments) 모형은 확률계수 모형의 다른 형태로 짧은 구간별로 각 시험표본의 열화율이 확률적으로 변하는 모형이며 확률계수 모형으로 변환이 가능하다. 따라서 본 논문에서는 다른 열화모형에 비해 활용도가 높고 적용범위가 넓은 확률계수모형을 채택하며, Nelson(1990)의 단순 선형모형을 확장하여 다음과 같이 설정하고자 한다.

$$n_i(t) = \theta t^m \quad (1)$$

여기서 $n_i(t)$ 는 i 시점에서 제품의 품질 특성치(열화경로)를 나타내고 θ 는 열화율(확률계수)을 나타낸다. 그리고 열화량은 시간 t 의 멱함수 형태로, m 은 이의 지수를 나타내며 미지라고 가정한다. 확률계수 모형에서 m 값에 따라 여러 가지 제품에 적용이 가능한데, 예를 들어 $m=0.5$ 일 경우는 발광다이오드(LED) 램프 제품의 열화경로를 설명하는데 이용되고 있으며(Yu, 2003), $m=1$ 일 경우는 자동차 타이어의 마모(열화)경로를 설명할 수 있고(Oliveira and Colosimo, 2004), $m=2$ 일 경우는 방사능에 쬐인 금속 연료 핀의 열화경로로 예시할 수 있으므로(Yacout et al., 1996), Nelson(1996)의 단순 선형모형보다 활용도가 매우 높다.

2.2 확률계수 열화율 모형과 수명분포와의 관계

확률계수 열화율이 대수정규 분포를 따르면 수명 역시 대수정규 분포를 따른다(서순근과 하천수(2004), Lu and Meeker(1993)). 이에 따라 열화율을 이용한 수명에 관한 추정이 가능하다.

열화율 θ 가 대수정규 분포($\theta \sim LM(\mu_D, \sigma_D^2)$)를 따를 때 확률밀도함수와 누적분포함수는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$g(\theta) = \frac{1}{\sigma_D \theta} \Phi\left(\frac{\ln \theta - \mu_D}{\sigma_D}\right) \quad (2)$$

$$G(\theta) = \Phi\left(\frac{\ln \theta - \mu_D}{\sigma_D}\right) \quad (3)$$

단, $\Phi(\cdot)$: 표준정규분포의 누적분포함수
 $\phi(\cdot)$: 표준정규분포의 확률밀도함수

시험제품의 측정된 열화량이 고장으로 판정할 수 있는 기준 열화량(critical degradation) D 를 초과하면 고장이라고 판정되며, 고장시간은 오차가 존재하지 않거나 무시할 수 있을 정도로 작다면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$T = \left(\frac{D}{\theta}\right)^{1/m} \quad (4)$$

식 (4)를 이용하여 수명 T 의 분포함수를 구하면 식 (5)와 같이 나타낼 수 있다.

$$F_T(t) = \Pr\left[\left(\frac{D}{\theta}\right)^{1/m} \leq t\right] \\ = \Phi\left[\frac{\ln t - \frac{1}{m}(\ln D - \mu_D)}{\sigma_D/m}\right] \quad (5)$$

즉, 수명 T 는 대수정규 분포($LN(\mu = (\ln D - \mu_D)/m, \sigma^2 = (\sigma_D/m)^2)$)를 따른다. 따라서 열화율 θ 는 $LN(\mu_D = \ln D - \mu m, \sigma_D^2 = (\sigma m)^2)$ 로 표현된다.

2.3 통계적 추정방법

고장시간분포 $F(t)$ 는 다음 단계로 구성된 3가지 통계적 추정방법을 이용하면 쉽게 구할 수 있다.

2.3.1 근사적 방법

- i) 열화자료를 대수변환(log transform)하여 비선형인 열화모형을 선형($\ln[n_i(t_{ij})] = \ln \theta_i + m_i \ln t_{ij}$)으로 바꾼다. 단, i : 시험단위의 번호, j : i 번째 관측시간.
- ii) 각 시험단위의 대수변환된 열화자료에 최소제곱법(least squares method)을 적용하여 $\hat{\beta}_{0i} = \widehat{\ln \theta}_i$ 와 \hat{m}_i 를 추정한다.
- iii) $\hat{\beta}_0$ 와 \hat{m}_i 를 이용하여 i 번째 시험단위의 의사 고장시간 $\left(\hat{t}_i = \exp\left(\frac{\ln D - \hat{\beta}_0}{\hat{m}_i}\right)\right)$ 을 구한다. 그리고 \hat{m} 은 \hat{m}_i 의 평균으로 설정한다.
- iv) iii)에서 구한 n 개의 의사고장시간에 대해 $F(t)$ 를 적합한다.

의사고장시간을 이용한 근사적인 방법은 열화자료를 수명자료로 변환하여 비교적 단순하게 분석할 수 있지만, 비교적 단순한 열화경로, 충분한 열화자료, 적은 오차 크기와 외삽량 등 기본적인 전제조건이 만족되어야 한다(Meeker and Escobar, 1998).

2.3.2 해석적 방법

근사적 방법에서 추정된 $\hat{\beta}_0$ 와 \hat{m}_i 를 이용한다. 먼저, i 번째 시험단위에서 $\hat{\beta}_0$ 가 $\widehat{\ln \theta}_i$ 로 추정되었으므로 열화율로 표현하면 $\hat{\theta}_i = e^{\hat{\beta}_0}$ 가 되며, 이 열화율이 대수정규 분포($\theta \sim LM(\mu_D, \sigma_D^2)$)를 따를 때 식 (5)로부터 수명 T 도 대수정규 분포($T \sim LM((\ln D - \mu_D)/m, (\sigma_D/m)^2)$)를 따르고 있으므로 수명분포가 $LN(\mu, \sigma^2)$ 를 따르면 다음과 같은 열화율과 수명분포의 모수 관계를 이용하여 대응되는 모수를 추정할 수 있다.

$$\hat{\mu}_D = \sum_{i=1}^n \hat{\beta}_{0i} / n, \quad \hat{m} = \sum_{i=1}^n \hat{m}_i / n \quad (6)$$

$$\hat{\mu} = (\ln D - \hat{\mu}_D) / \hat{m}, \quad \hat{\sigma} = \hat{\sigma}_D / \hat{m} \quad (7)$$

$$\text{단, } \widehat{\sigma}_D^2 \text{는 } \Theta \text{의 표준편차}$$

$$\Theta = \frac{n(t)}{t^m} \sim LN(\ln D - \widehat{\mu}, \widehat{\sigma}^2)$$

2.3.3 수치적 방법

열화 모형이 하나 혹은 둘 이상의 확률계수를 포함할 때, 그 모형의 수명분포 $F(t)$ 의 closed-form을 구하는 것은 매우 어렵다. 확률계수 Θ 가 평균 벡터 μ_D 와 공분산 행렬 Σ_D 로 표현되는 다변량 정규분포를 따른다고 가정하면 제품의 실제경로에 대한 심각한 정보 손실이 없이 모수 μ_D 와 Σ_D 에 집중하여 추정할 수 있다. 모수 $\mu_D, \Sigma_D, \sigma_\epsilon^2$ 를 추정하기 위해서는 우도함수가 필요한데, 이로부터 도출된 우도방정식을 풀기 위해서는 여러 회의 수치적 근사방법이 필요하다. 만약 열화모형이 선형함수가 아니라면 오늘날의 컴퓨터 능력을 활용하더라도 모수 $\mu_D, \Sigma_D, \sigma_\epsilon^2$ 를 직접적으로 구하기는 매우 어렵다. Pinheiro and Bates(1995)는 모수 $\mu_D, \Sigma_D, \sigma_\epsilon^2$ 의 근사적 최우추정량을 구하는 LME(Linear mixed effect models)와 NLME(Nonlinear Mixed Effect) 알고리즘을 개발하였으며 이를 S-Plus(2001)로 구동할 수 있는 프로그램을 작성하였다.

그리고 $F(t)$ 는 모수 $\mu_D, \Sigma_D, \sigma_\epsilon^2$ 를 추정된 후에, 이 추정된 모수를 이용한 Monte Carlo simulation을 통해서 수치적으로 추정할 수 있다.

3. 통계적 분석법의 비교실험

3.1 대상 열화모형

확률계수 열화모형 $n(t) = \Theta t^m$ 를 확장하여 다음과 같이 대수변환하면 선형이 되는 승법모형으로 정의하고자 한다.

$$y_i(t_j) = \Theta_i t_j^m \cdot \epsilon_{ij} \quad (8)$$

열화경로를 $n(t)$ 와 같이 완벽한 함수형태로 표현이 불가능한 것이 일반적이며, 또한 측정 시 오차가 존재할 경우를 고려하여 이를 반영한 모형을 설정하였다. 여기서 s 는 시험단위의 번호, j 는 j 번째 관측시간, $\ln(\epsilon_{ij})$ 는 오차항이며 $M(0, \sigma^2)$ 를, 또한 Θ_i 는 대수정규 분포를 따른다고 가정한다. 여기서 가법모형보다 승법모형을 택한 이유는 대수정규 분포를 따를 경우에 일관성을 유지하고 현실적으로 더 유용한 모형이 될 수 있기 때문이다(Wasserman, 1996).

본 논문에서 사용되는 통계적 추정방법은 Meeker and Escobar(1998)의 연구결과를 이용한 Oliveira and Colosimo(2004)의 논문을 확장한 것이다. 이 연구와의 차이점은 첫째, 선행연구가 열화현상이 시간에 대해 선형으로 증가하는 열화 모형 ($y = \Theta t + \epsilon$)을 이용한 것과 달리 본 논문에서는 시간에 대해 멱함수 형태(m)로 증가하는 보다 포괄적인 열화율 모형을 채택하며 전술한 바와 같이 가법모형보다 승법모형을 선정하였다. 둘째, 앞의 연구가 특정 사례에만 적용한 것과 달리 본 논문에서는 (측정)오차의 영향을 고려한 다양한 수치실험조건 하에서 Monte Carlo simulation을 통하여 3가지 통계적 방법의 우월성을 조사하고자 한다.

3.2 실험계획

3가지 통계적 추정법의 우월성을 조사하기 위한 실험조건으로 특히 열화 모형의 불완전성 또는 측정오차를 반영하여, 측정오차와 열화율의 두 표준편차의 비가 변함에 따라 3가지 분석법의 통계적 효율성을 중점적으로 조사하고자 한다.

실험을 수행하기 위해서는 먼저 열화율의 분포를 알아야 한다. 본 논문에서는 해석적 방법을 적용할 경우, 수명분포로 가장 널리 알려진 대수정규 분포와 관련지을 수 있도록 열화율이 대수정규 분포 ($\Theta \sim LN(\mu_D, \sigma_D^2)$)를 따른다고 가정한다. 그리고 실험에 사용되는 시료의 수(m)는 3가지 경우 ($m=5, 15, 30$), 열화 측정회수(k) 2가지 경우 ($k=3, 10$), 시험 종결시간은 제 1과 10백분위수 근처값인 2가지 경우($t_c \approx B_1, B_{10}$)에 대해서 실험을 수행한다. 여기서 2가지 시험 종결시간은 일반적으로 신뢰성 연구에서 많이 사용되는 원 자료의 B_1, B_{10} 수명 근처인 값을 이용한다.

그리고 오차(ϵ_{ij})는 평균이 0이고 분산이 σ_ϵ^2 인 대수정규 분포($\epsilon_{ij} \sim LN(0, \sigma_\epsilon^2)$)을 따른다고 가정한다. 고장발생이 (측정)오차의 존재유무에 의존하지 않으므로 열화율 Θ 와 (측정)오차 ϵ_{ij} 는 서로 독립이다. 오차의 영향을 알아보기 위해서 (측정)오차와 열화율의 표준편차의 비(R_{SD})를 0, 1/100, 1/10, 1/2, 1로 설정하였다. 즉, R_{SD} 의 값이 0이면 오차가 존재하지 않는다고 가정한 경우가 된다.

또한 3가지 통계적 추정방법인 근사적 방법, 해석적 방법, 수치적 방법의 결과를 비교하기 위해서 모수의 참값에 대한 평균제곱오차와 편기를 이용한다. 예를 들어 대상모수가 100 q백분위수일 경우 측정오차가 존재하지 않을 경우의 참값이 t_q 이면 이에 대한 표준화 평균제곱오차(MSE_S)와 편기($Bias_S$)의 식은 다음과 같다.

$$MSE_S = \left(\frac{\sum (\widehat{t}_q - t_q)^2}{N} \right) / t_q^2 \quad (9)$$

$$Bias_S = \left(\frac{\sum (\widehat{t}_q - t_q)}{N} \right) / t_q$$

단, N 은 simulation의 횟수

본 논문에서 관심수명측도는 일반적으로 신뢰성 연구에서 많이 사용되는 B_1, B_5, B_{10} 수명에 대한 분위수를 채택하였다.

3.3 수치예제

다음의 수치예제는 본 수치실험에서 고려하고 있는 특정한 한 가지 경우를 택하여 자세히 기술하고자 한다.

본 예제는 Yu(2004)에서 인용된 식 (8)의 열화모형에서 m 이 0.5(LED 램프)이고 오차와 열화율의 표준편차의 비가 1/10이며 기준 열화량은 $D=0.15$ 일 경우로 가정한다. 열화량은 위치모수 μ_D 가 -5.77 이고 척도모수 σ_D 가 0.4인 대수정규분포를 따른다며, S-Plus 프로그램을 이용해 LED 램프의 성능 열화자료를 생성하였다.

<그림 1>은 LED 램프 15개의 각각의 열화경로를 나타내고 있다. 시험 시작시간($t=0$)부터 $B_{10}=830$ 근처인 시험 종결시간까지 총 10회의 열화측정

을 수행하였고 15개의 제품 모두 고장판정 기준 열화량($D=0.15$)을 초과하지 않음을 알 수 있다.

(1) 근사적 방법을 이용한 $F(t)$ 추정
 15개 시험단위의 각각에 대해 대수 선형모형에 적합시켜 최소제곱법을 이용해 $\hat{\beta}_0$ 와 $\hat{\beta}_1$ 을 추정하여 i 번째 LED 램프의 j 번째 의사고장시간을 $\hat{t}_i = \exp[(\ln D - \hat{\beta}_0) / \hat{\beta}_1]$ 에 의해 계산된 의사고장시간은 <표 1>과 같다.
 구해진 의사고장시간을 이용하여 적합한 대수정

규분포의 모수 $\hat{\mu}=7.8828$, $\hat{\sigma}=0.8130$ 이며, 이로부터 열화율의 모수를 추정하면 $\hat{\mu}_D = \ln D - \hat{\beta}_1 \hat{\mu} = -5.8359$, $\hat{\sigma}_D = \hat{\beta}_1 \hat{\sigma} = 0.4062$ 가 된다. \hat{m} 은 $\hat{\beta}_1$ 이므로 0.4997이 된다. 그리고 적합한 대수정규분포로부터 추정된 제 1 분위수는 $\hat{t}_{0.01} = 400.05$ 시간, 제 10 분위수는 $\hat{t}_{0.1} = 935.39$ 시간이 된다. <그림 2>는 추정된 의사고장시간을 대수정규 분포에 적합한 것이다. 대부분의 점들이 직선근처에 타점되어 있고 95% 신뢰 구간 안에 포함되어 있으므로 대수정규 분포가 적절한 수명분포로 여겨진다.

<표 1> LED 자료의 의사고장시간

단위번호	1	2	3	4	5	6	7	8
고장시간	8317.8222	2707.9104	1460.0603	981.6140	1174.3770	937.3326	2504.2381	1311.4034
단위번호	9	10	11	12	13	14	15	
고장시간	8243.3714	1946.2877	998.8307	1684.3518	3270.8435	3302.1105	6608.4830	

<그림 1> LED 자료의 열화량

| u Mar 16 10 |

<그림 2> LED 자료를 대수정규 분포에 적합한 결과 : 근사적 방법

(2) 해석적 방법을 이용한 $F(t)$ 추정

근사적 방법에서 구한 $\hat{\beta}_0$ 과 $\hat{\beta}_1$ 값을 이용해 대수정규 분포에 적합한 결과 추정된 값은 $\hat{\mu}_D = -5.8361$, $\hat{\sigma}_D = 0.4227$ 이 된다. 수명분포의 모수를 추정하면 $\hat{\mu} = (\ln D - \hat{\mu}_D) / \hat{\beta}_1 = 7.8832$, $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_D / \hat{\beta}_1 = 0.8460$ 이 되며 \hat{m} 값은 근사적 방법과 같이 0.4997이다. 관심 있는 분위수를 추정하면 제 1 분위수($\hat{t}_{0.01}$)는 370.62, 제 10 분위수($\hat{t}_{0.1}$)는 896.98이 된다.

(3) 수치적 방법을 이용한 $F(t)$ 추정

모수 $\mu_D, \Sigma_D, \sigma_\epsilon^2$ 에 대한 최우추정치는 S-Plus 프로그램의 LME 함수를 이용해서 구할 수 있다. 추정된 모수 값은 $\hat{\mu}_D = -5.8361$, $\hat{\Sigma}_D = 0.4214$, $\hat{\sigma}_\epsilon^2 = 0.038^2$ 으로, 이로부터 $F(t)$ 는 Monte Carlo simulation을 이용하여 수치적으로 추정할 수 있다. <그림 3>은 추정된 모수 $\mu_D, \Sigma_D, \sigma_\epsilon^2$ 을 이용해 100,000회의 simulation을 수행하여 수치적 방법의 수명분포 $F(t)$ 를 도시한 것이다.

<그림 3>으로부터 관심 있는 분위수를 추정하면 제 1 분위수($\hat{t}_{0.01}$)는 373.66, 제 10 분위수($\hat{t}_{0.1}$)는 895.72가 된다.

세 가지 방법을 적용한 결과가 <표 2>에 요약되어 있는데, 참값은 추정오차가 없다고 가정할 경우에 구한 값이며, 하나의 특정 case이지만 해석적과 수치적 방법이 근사적 방법보다 참값에 근접함을 보여 주고 있다.

4. 수치실험 결과 고찰

근사적과 해석적 방법은 오차의 존재를 고려하지 않는 방법이며, 수치적 방법은 이를 고려하지만 근사적인 수치해법을 이용하며 (대수변환된) 열화율과 오차의 분포가 (다변량)정규분포를 따른다고 가정하고 있는 단점을 가지고 있다.

수치실험에 사용되는 시료의 수는 3가지 경우 ($n = 5, 15, 30$), 열화 측정회수(k)는 등간격으로 2가지 경우 ($k = 3, 10$), 시험 종결시간(t)는 2가지 경우 ($t; B_1 \approx 360, B_{10} \approx 830$)이며, 수치예와 같이 위치 모수 $\mu_D = -5.77$, 척도모수 $\sigma = 0.4$, $m = 0.5$, 기준 열화량은 $D = 0.15$ 일 경우로 가정한다. 각 시험 조건에서 다양한 R_{SD} 값에 따라 1,000회의 simulation을 수행하여 분포에 따른 모수와 3가지 분위수 ($\hat{t}_{0.01}, \hat{t}_{0.05}, \hat{t}_{0.1}$)를 추정하고 각 모수와 분위수에 대한 표준화 제곱오차와 편기값을 지면 제약상 일부 분만 <표 3>과 <표 4>에 정리하였다. 이 중 편기에 관한 표는 <표 3>의 실험조건 중에서 일부분만 수록하였다. 여기서 오차가 존재하지 않을 경우 위치 모수의 MSE는 근사적과 해석적 방법의 분석과정이 같기 때문에 동일한 값을 가진다.

<표 3>(a)와 같이 열화율이 대수정규 분포를 따르고 오차가 존재하지 않거나 오차의 표준편차와 열화율의 표준편차의 비(R_{SD})가 낮을 때 m 이 적고 (즉, 15) 대상 모수가 가장 낮은 분위수일 경우 외는 거의 모든 모수의 MSE가 상당히 적으므로 어떤 방법도 유용하게 사용할 수 있을 것으로 판단된다.

<그림 3> LED 자료의 Monte Carlo simulation 결과 : 수치적 방법

<표 2> 수치예 요약 : 대수정규 열화율 분포

방법	$\hat{\mu}_D$	$\hat{\sigma}_D$	$\hat{t}_{0.01}$	$\hat{t}_{0.1}$	$\hat{\sigma}_\epsilon$
근사적 방법	-5.8359	0.4062	400.05	935.39	-
해석적 방법	-5.8361	0.4227	370.62	896.99	-
수치적 방법	-5.8361	0.4214	373.66	895.72	0.0380
참 값	-5.77	0.4	359.49	829.25	0.04

<표 3>(b)의 MSE 결과를 보면 오차의 표준편차와 열화율의 표준편차의 비가 같을 때($R_{SD}=1$)라도 세 방법의 MSE가 비교적 적음을 알 수 있다. 이 실험상황에서 분포모수일 경우와는 달리 저 분위수를 추정 시 해석적과 근사적 방법이 수치적 방법보다 대체적으로 우수하다. 그리고 <표 3>을 보면 표본크기가 증가하면 MSE는 제법 감소하지만 시험종결시간의 영향은 크지 않음을 알 수 있다.

따라서 측정오차가 제법 크더라도 해석적과 근

사적 방법을 충분히 사용할 수 있음을 보여주고 있다. 또한 <표 4>에서 실험결과의 일부분만 정리되어 있지만 모든 경우에 편기값은 상당히 작으며 특히 <표 4>와 같이 세 방법 모두 R_{SD} 가 1일 때만 저 분위수의 추정 시 과소 추정됨을 알 수 있다.

그리고 수치실험에서 측정회수의 증가는 모수 추정의 정밀도에 큰 영향을 미치지 않음을 파악할 수 있다.

<표 3>(a) 열화율이 대수정규 분포를 따를 경우의 MSE : $R_{SD}=0$

n	k	t_c	방법	측정오차가 존재하지 않을 경우				
				$MSE_S(\mu_D)$	$MSE_S(\sigma_D)$	$MSE_S(t_{0.01})$	$MSE_S(t_{0.05})$	$MSE_S(t_{0.1})$
15	3	360	근사적	0.00032	0.03452	0.25862	0.14336	0.10397
			해석적	0.00032	0.03436	0.22295	0.12795	0.09475
			수치적	0.00032	0.13435	0.24975	0.13486	0.09696
	830	근사적	0.00032	0.03452	0.25862	0.14336	0.10397	
		해석적	0.00032	0.03436	0.22295	0.12795	0.09475	
		수치적	0.00034	0.03271	0.22838	0.12915	0.09526	
30	360	근사적	0.00016	0.01663	0.09980	0.05841	0.04348	
		해석적	0.00016	0.01667	0.09181	0.05485	0.04131	
		수치적	0.00016	0.01685	0.10891	0.06274	0.04648	
	830	근사적	0.00016	0.01663	0.09980	0.05841	0.04348	
		해석적	0.00016	0.01667	0.09181	0.05485	0.04131	
		수치적	0.00016	0.01685	0.10862	0.06258	0.04637	

<표 3>(b) 열화율이 대수정규 분포를 따를 경우의 MSE : $R_{SD}=1.0$

n	k	t_c	방법	측정오차와 열화율 표준편차의 비가 1.0일 경우				
				$MSE_S(\mu_D)$	$MSE_S(\sigma_D)$	$MSE_S(t_{0.01})$	$MSE_S(t_{0.05})$	$MSE_S(t_{0.1})$
15	3	360	근사적	0.00039	0.06482	0.17095	0.10990	0.08643
			해석적	0.00038	0.05288	0.17939	0.11523	0.09104
			수치적	0.00042	0.05850	0.28226	0.18787	0.14061
	830	근사적	0.00039	0.05894	0.17027	0.10875	0.08543	
		해석적	0.00038	0.05342	0.17822	0.11400	0.08964	
		수치적	0.00042	0.05850	0.28218	0.18764	0.14022	
30	360	근사적	0.00020	0.05595	0.11624	0.07412	0.05560	
		해석적	0.00020	0.03407	0.09426	0.06264	0.04925	
		수치적	0.00020	0.02844	0.28730	0.18211	0.12906	
	830	근사적	0.00020	0.04895	0.10807	0.06930	0.05246	
		해석적	0.00020	0.03446	0.09389	0.06210	0.04861	
		수치적	0.00020	0.02844	0.28746	0.18217	0.12901	

<표 4> $R_{SD}=1$ 일 경우의 편기

n	k	t_c	방법	$Bias_S(\mu_D)$	$Bias_S(\sigma_D)$	$Bias_S(t_{0.01})$	$Bias_S(t_{0.05})$	$Bias_S(t_{0.1})$
15	3	360	근사적	0.00265	0.13720	-0.11999	-0.08428	-0.05956
			해석적	0.00133	0.09591	-0.06344	-0.04655	-0.03250
			수치적	0.00008	-0.02350	-0.48899	-0.37880	-0.30833
	830	근사적	0.00242	0.11934	-0.09466	-0.06636	0.04590	
		해석적	0.00131	0.09755	-0.06677	-0.04938	-0.03506	
		수치적	0.00009	-0.02350	-0.48913	-0.37905	-0.30867	

5. 결론

본 논문은 열화시험자료를 통계적으로 분석하는 방법에 대해 다음과 같은 연구를 수행하였다.

첫째, 확률계수 열화모형 하에서 제품의 열화율이 대수정규 분포를 따르면 제품의 수명분포도 대수정규 분포를 따른다는 점을 이용하여 열화율이 이 두 분포를 따르는 제품의 분포모수와 분위수를 3가지 통계적 방법인 근사적 방법, 해석적 방법, 수치적 방법으로 추정하는 구체적 절차를 기술하였다.

둘째, 확률계수 열화모형에 오차가 존재할 경우에 오차의 영향을 파악하기 위하여 오차와 열화율의 표준편차의 비가 특정한 비율로 변할 때의 세가지 방법의 우월성을 수치실험을 통하여 조사하였다. Monte Carlo simulation을 이용한 수치실험을 통해 시료의 수, 열화 측정회수, 시험 종결시간에 대한 다양한 조건하에서 모수와 관심있는 분위수의 최우추정량에 대한 MSE와 편기를 구하여 3가지 추정방법의 통계적 효율성을 비교하였다.

수치실험의 결과를 정리하면 본 연구의 확률계수 열화율 모형을 따르면 (추정)오차가 존재하더라도 해석적과 근사적 방법을 충분히 적용할 수 있음을 파악하였다. 따라서 이런 정보를 이용하여 추정법을 선택하는 기준으로 삼을 수 있다.

참고문헌

- 서순근, 하천수 (2004), "강건 실험계획법을 이용한 열화자료의 분석", *품질경영학회지*, 32, 113-129.
- Insightful (2001), *S-Plus 6 for Windows: User's Guide*, Insightful Corp., Seattle.
- Lu, C. J. and Meeker, W. Q. (1993), "Using Degradation Measures to Estimate a Time-to-Failure Distribution", *Technometrics*, 35, 161-174.
- Meeker, W. Q. and Escobar, L. A. (1998), *Statistical Methods for Reliability Data*, John Wiley & Sons, New York.
- Nelson, W. (1990), *Accelerated Testing: Statistical Modes, Test Plans, and Data Analyses*, John Wiley & Sons, New York.
- Oliveira, V. R. B. and Colosimo E. A. (2004), "Comparison of Methods to Estimate the Time-to-Failure Distribution in Degradation Tests", *Quality and Reliability Engineering International*, 20, 363-373.
- Pinheiro, J. C. and Bates, D. M. (2000), *Mixed-Effects Models in S and S-Plus*, Springer, New York.
- Wasserman, G. S. (1996) "A Modeling Framework for Relating Robustness Measures with Reliability, Quality Engineering", 8, 681-692.
- Yacout, A. M., Salvatores S. and Orzechwa Y. (1996), "Degradation Analysis Estimates of the Time-To-Failure Distribution of Irradiated Fuel Elements", *Nuclear Technology*, 113, 177-189.
- Yu, H. F. (2003), "Designing an Accelerated Degradation Experiment by Optimizing the Estimation of the Percentile", *Quality and*

- Reliability Engineering International*, 19, 197-214.
- Yu, H. F. (2004), "Designing A Degradation Experiment with A Reciprocal Weibull Degradation Rate", *Journal of Quality Technology and Quantitative Management*, 1, 47-63.