직렬-병렬 시스템의 중복설계 문제에 대한 알고리듬의 성능비교

A Comparison of Algorithms for Solving the Series-Parallel Redundancy Allocation Problems

김 재 환

한국해양대학교 공과대학 수리정보전공 (jhkim@mail.hhu.ac.kr)

Abstract

직렬-병렬 시스템의 중복설계 문제는 비용, 무게등을 고려한 다양한 제약 조건하에서 시스템의 신뢰도를 최대화하기 위해 하부시스템의 중복설계의 최적 개수를 결정해주는 것이다. 일반적으로 이 문제는 다루기 힘든 *NP-hard* 문제로 분류된다. 특히 Coit과 Smith가 제시한 문제에 대해 유전자 해법 등의 다양한 발견적 해법(Heuristic methods)들이 개발되었으나 이 문제에 대한 전역 최적해(Globally optimal solution)는 아직 알려져 있지 않다. 따라서 본 논문에서는 기존의 해법들이 다루었던 이 문제에 대한 전역 최적해를 구하여 그 성능을 비교하고자 한다.

1. 서론

본 논문에서 다루고자 하는 중복설계문제는 선박, 비행기, 통신시스템 등의 신뢰도를 높이기 위해 비용, 무게 등을 고려한 다양한 제약하에서 하부시스템의 중복설계를 최적화하는 것이다. 특히 이 문제는 만족스러운 서비스 제공이나 경제적인 효유성 제고 뿐만 아니라 생명의 안전과도 밀접한 관계가 있다.

중복설계 문제는 크게 다음과 같은 5가지의 시스템에 대한 문제로 분류된다(Tillman, 1977).

- 직렬 시스템(Series system)
- 병렬 시스템(Parallel system)
- 직렬-병렬 시스템(Series-parallel system)
- 병렬-직렬 시스템(Parallel-series system)
- 콤플렉스 시스템(Complex system)

본 논문에서는 위의 모형 중 세 번째 경우인 직렬-병렬 시스템에 대한 중복설계 문제를 다루고자 한다. 이 문제에 대한 이해를 돕기 위해 먼저 단순한 구조인 직렬시스템에 대해 살펴보면, Bellman과 Dreyfus(1958)는 처음으로 중복설계 모형을 제시하였으며 동적계획법(Dynamic programming)으로 최적해를 구하였다. 또한, Ghare와 Taylor(1969)는 0/1 이진변수을 이용하여 풀기 쉬운 0/1 정수계획 문제로 변환하였다. Nakagawa와 Nakashima(1978)는 이 문제의 효율적인 정수계획법(Integer programming) 알고리듬을 개발하여 Ghare와 Taylor(1969)의 방법과 비교하였으며, Bulfin과 Liu(1985)는 보다 큰 규모의 문제를 풀기 위한 발견적 해법인 BLH를 개발하였다.

본 논문에서 다루고자하는 직렬-병렬 시스템은 직렬시스템의 구조에 병렬 시스템을 하부구조로 복합시킨 형태이며 그 모형은 Fyffe 등(1968)에 의해 처음으로 제시되었다. 한편, Coit과 Smith(1996)는 각 하부시스템내에 동일한 부품을 중복설계하는 Fyffe 등(1968)의 모형과는 달리, 서로 다른 부품을 혼합하여 중복설계함으로써 시스템의 신뢰도를 향상시키는 좀 더 효율적인 모형을 제시하였으며 유전자 해법으로 최적해를 구하였다. Kulturel-Konak 등(2003, 2004)은 효율적인 TS(Tabu Search)를 개발하여 그 해를 개선시켰다.

Coit과 Liu(2000)는 Fyffe의 모형에 대해 0/1 이진변수 변환을 이용하여 전역최적해를 구하였으나, Coit과 Smith(1996)가 제시한 모형에 대해서는 아직 전역 최적해가 알려져 있지 않다. 따라서 본 논문에서는 Coit과 Smith(1996)의 문제에 대한 전역 최적해를 구하여 기존의 발견적 해법인 TS 등과의 성능을 비교하고자 한다.

2. 직렬-병렬 시스템의 중복설계 문제

직렬-병렬 시스템의 중복설계 문제는 비용, 무게 등을 고려한 다양한 제약 조건하에서 시스템의 신뢰도를 최대화하기 위해 하부시스템의 중복설계의 최적 개수를 결정해주는 것이다. 일반적으로 이 문제는 다루기 힘든 *NP-hard*(Chern, 1992) 문제로 분류된다. 따라서 다양한 발견적 해법들이 개발되었다(Glover와 Laguna(1997), Kuo와 Prasad(2000)).

이 문제는 Fyffe 등(1968)에 의해 처음으로 제시되었으며 동적계획법(Nakagawa와 Miyazaki(1981))과 정수계획법(Misra와 Sharma(1991), Coit과 Liu (2000))등에 의해 최적해가 구해졌다. Nakagawa와 Miyazaki(1981)는 무게의 제약식의 계수를 159부터 191까지 변동시킴으로써 Fyffe의 문제를 33개의 문제로 확장시켰으나, Fyffe 등(1968)에서 처럼 각 하부시스템 내에서는 동일한 부품만을 중복설계 하도록 제한하였다. 한편, Coit과 Smith(1996)는 이러한 제한없이 서로 다른 부품을 혼합하여 중복설계하는

좀 더 효율적인 다음과 같은 새로운 모형을 제시하였다.

(P1) Maximize $R(\mathbb{X}) = \prod_{i=1}^{s}(1-\prod_{j=1}^{m_i} q_{ij}^{x_{ij}})$

subject to

$$\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{m_i} c_{ij}\, x_{ij} \le C,$$

$$\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{m_i} w_{ij}\, x_{ij} \le W,$$

$$\sum_{j=1}^{m_i} x_{ij} \ge 1, \quad i = 1, \ldots, s,$$

$$x_{ij} \in \{0, 1, 2, \ldots, U\}.$$

여기서,

$R(\mathbb{X})$: 시스템 신뢰도,
x_{ij} : i 번째 하부시스템의 j번째 대안부품의 중복개수,
m_i : i 번째 하부시스템의 대안부품의 개수
s : 하부시스템의 개수,
C, W : 비용, 무게 제약식의 사용 가능계수,
c_{ij}, w_{ij}, q_{ij} : i 번째 하부시스템의 j번째 대안부품의 비용, 무게, 비신뢰도의 계수,
U : 부품 중복 개수의 상한치

를 각각 의미한다.

Kulturel-Konak등(2003,2004)은 Coit과 Smith(1996)가 제시한 유전자 해법보다 더 효율적인 TS(Tabu Search)알고리듬을 개발하였다. 하지만, 이 알고리듬에 의해 구해진 해들은 전역 최적해임을 보장하지 못하므로, 본 논문에서 전역 최적해를 구하여 그 성능을 비교하고자 한다.

3. 알고리듬의 성능 비교

알고리듬의 성능을 비교하기 위해 (P1) 모형에서 Coit과 Smith(1996)가 다룬 $s=14$, $C=130$, $W=159, \ldots, 191$의 33개의 문제에 대한 전역 최적해를 구하여 비교하였다. $c_{ij}, w_{ij}, q_{ij}, m_i$의 계수들의 값은 Nakagawa와 Miyazaki(1981)에 주어져 있다. 전역 최적해를 구하기 위해 Coit과 Liu(2000)에서와 유사하게 0/1 변수 변환기법을 이용하였다.

Coit과 Smith(1996)의 $s=14, C=130$, $W=174$의 경우에 대한 0/1 변수를 이용하여 0/1 정수계획법 문제로 변환한 모형은 다음과 같다.

(P2)
Maximize
$R(\mathbb{X}) = r_{1,0,0,0,1} \times y_{1,0,0,0,1} + \ldots + r_{14,5,5,5,5} \times y_{14,5,5,5,5}$

subject to

$c_{14} \times y_{1,0,0,0,1} + 2 \times c_{14} \times y_{1,0,0,0,2} + \ldots.$
$5 \times (c_{14,1} + c_{14,2} + c_{14,3} + c_{14,4}) \times y_{14,5,5,5,5} \le 130,$
$w_{14} \times y_{1,0,0,0,1} + 2 \times w_{14} \times y_{1,0,0,0,2} + \ldots.$
$5 \times (w_{14,1} + w_{14,2} + w_{14,3} + w_{14,4}) \times y_{14,5,5,5,5} \le 174,$
$y_{1,0,0,0,1} + y_{1,0,0,0,2} + \ldots. + y_{1,5,5,5,5} = 1,$
$y_{2,0,0,1} + y_{2,0,0,2} + \ldots. + y_{2,5,5,5} = 1,$
·
·
$y_{14,0,0,0,1} + y_{14,0,0,0,2} + \ldots. + y_{14,5,5,5,5} = 1,$
$y_{1,0,0,0,1}, y_{1,0,0,0,2}, \ldots, y_{14,5,5,5,5} = 0$, 또는 1.

여기서, $r_{1,0,0,0,1} = log(1 - q_{11}^0 \times q_{12}^0 \times q_{13}^0 \times q_{14}^1)$이며, $y_{1,0,0,0,1} = 1$은 $x_{11} = x_{12} = x_{13} = 0, x_{14} = 1$을 의미한다. 또한 Kulturel-Konak 등(2003, 2004)은 부품 중복 개수의 상한치인 U의 값을 8을 사용하였으나, 전산실험 결과 위의 모형에서 처럼 U의 값이 5이면 충분한 것을 알 수 있었다. 이 경우에 소요되는 0/1 변수의 총개수는 9490($U^{m_1} + U^{m_2} + \ldots + U^{m_{14}} - 14$)개이며, GAMS 소프트웨어를 이용하여 전역 최적해를 구하였다. GAMS를 이용하여 IBM RS/6000P서버로 (P2) 문제의 전역 최적해를 구하는 데 걸리는 수행시간은 0.32(CPU sec.)가 소요되었다. 이 문제

< 표 1 > 알고리듬의 성능 비교

W	Konak(2003) TSRAP	Konak(2004) TS	Global Sol.
191	0.986811	0.986811	0.986811
190	0.986416	0.986416	0.986416
189	0.985922	0.985922	0.985922
188	0.985378	0.985378	0.985378
187	0.984688	0.984688	0.984688
186	0.984176	0.984176	0.984176
185	0.983505	0.983505	0.983505
184	0.982994	0.982994	0.982994
183	0.982256	0.982256	0.982256
182	0.981518	0.981518	0.981518
181	0.981027	0.981027	0.981027
180	0.980290	0.980290	0.980290
179	0.979505	0.979505	0.979505
178	0.978400	0.978400	0.978400
177	0.977474*	0.977596	0.977596
176	0.976690	0.976690	0.976690
175	0.975708	0.975708	0.975708
174	0.974788*	0.974926	0.974926
173	0.973827	0.973827	0.973827
172	0.973027	0.973027	0.973027
171	0.971929	0.971929	0.971929
170	0.970760	0.970760	0.970760
169	0.969291	0.969291	0.969291
168	0.968125	0.968125	0.968125
167	0.966335	0.966335	0.966335
166	0.965042	0.965042	0.965042
165	0.963712	0.963712	0.963712
164	0.962422	0.962422	0.962422
163	0.959980*	0.960642	0.960642
162	0.958205*	0.959188	0.959188
161	0.956922*	0.958035	0.958035
160	0.955604*	0.955714	0.955714
159	0.954325*	0.954565	0.954565

* 는 전역 최적해를 못 찾은 경우

에 대한 최적해는 $R(\mathbb{X})$=0.974926이다. 33개의 문제에 대해 전역 최적해를 구하여 기존의 발견적 방법들과 비교한 결과는 < 표 1 >에 나타나 있다.

<표 1>에서 Kulturel-Konak(2003)의 발견적 해법인 TSRAP와 TS의 메모리를 이용하여 TSRAP를 개선시킨 TS(Kulturel-Konak, 2004)의 성능을 비교해 본 결과, TSRAP는 33개의 문제 중에서 7개의 문제에 대해 전역 최적해를 찾지 못했고 TS는 모든 경우에 대해 전역 최적해를 찾는 것을 본 논문을 통해 알 수 있었다.

4. 결론

Coit과 Liu(2000)는 Fyffe의 모형에 대해 0/1 이진변수 변환을 이용하여 전역최적해를 구하였으나, Coit과 Smith(1996)가 제시한 33개의 문제에 대한 전역 최적해는 아직 알려져 있지 않다. 따라서, 본 논문에서는 Coit과 Liu(2000)의 0/1 변수 변환과 유사한 방법을 이용하여 이 문제를 먼저 다루기 쉬운 0/1 정수계획법 문제로 변환한 다음, GAMS 소프트웨어로 전역 최적해를 용이하게 구하여 기존 알고리듬의 성능을 분석하였다. 분석한 결과, TSRAP 알고리듬을 개선한 TS은 33개의 모든 문제에 대해 전역 최적해를 다 찾아 주는 매우 효율적인 알고리듬 임을 본 논문을 통해 알 수 있었다.

본 논문에서 전역 최적해를 구하기 위해 9490개의 비교적 많은 0/1 변수가 소요되긴 하였지만 빠른 컴퓨터 수행시간(0.32 CPU sec.)으로 전역 최적해를 구할 수 있었다. 그러므로, 본 논문에서 제시한 방법은 대규모는 아니지만 다소 큰 규모의 문제에 대해서도 기존의 알고리듬(TSRAP, TS)의 성능을 비교하는데 유용한 대안이 되리라고 사료된다.

참고문헌

Bellman, R.E. & Dreyfus, E. (1958), "Dynamic programming and reliability of multicomponent devices", *Operations Research*, **6,** 200-206.

Bulfin, R.L. & Liu, C.Y. (1985), "Optimal allocation of redundant components for large systems", *IEEE Transactions on Reliability*, **34**, 241-247.

Chern, M.S. (1992), "On the computational complexity of reliability redundancy allocation in a series system ", *Operations Research Letters,* **11,** 309-315.

Coit, D.W. & Smith, A.E.(1996),"Reliability optimization of series-parallel systems using a genetic algorithm", *IEEE Transactions on Reliability*, **45**(2), 254-260.

Coit, D.W. & Liu, J. (2000),"System reliability optimization with k-out-of-n subsystems", *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*, **7**(2), 129-143.

Fyffe, D.E., Hines, W.W., & Lee, N.K. (1968),"Sysyem reliability allocation and a computational algorithm", *IEEE Transactions on Reliability*, **17**, 74-79.

Ghare, M. & Taylor, R.E. (1969),"Optimal redundancy for reliability in series system", *Operations Research*, **17**, 838-847.

Glover, F. & Laguna, M. (1997), *Tabu Search*, Kluwer, London, UK.

Kulturel-Konak, S., Smith, A.E., & Coit, D.W. (2003), "Efficiently solving the redundancy allocation problem using tabu search", *IIE Transactions*, **35**, 515-526.

Kulturel-Konak, S., Norman, B.A., Coit, D.W., & Smith, A.E., (2004),"Exploiting tabu search memory in constrained problems", *INFORMS Journal on Computing*, **16**(3), 241-254.

Kuo, W. & Prasad, V.R.(2000),"An annotated overview of system reliability optimization", *IEEE Transactions on Reliability*, **49**(2), 176-187.

Misra, K.B. & Sharma, U. (1991) "An efficient algorithm to solve integer programming problems arising in system reliability design",*IEEE Transactions on Reliability*, **40**, 81-91.

Nakagawa, Y. & Miyazaki, S. (1981)," Surrogate constraints algorithm for reliability optimization problems with two constraints", *IEEE Transactions on Reliability*, **30**, 175-180.

Nakagawa, Y., Nakashima, K., & Hattori, Y. (1978), " Optimal reliability allocation by branch and bound techniques", *IEEE Transactions on Reliability*, **27**, 175-180.

Tillman, F.A., Hwang, C.-L., & Kuo, Y. (1977), "Optimization techniques for system reliability with redundancy－a review", *IEEE Transactions on Reliability*, **26**(3), 148-155.