

효율적 포트폴리오 결정을 위한 휴리스틱 알고리즘

김보람*, 김혜진*, 신현준*

*상명대학교 산업정보시스템공학과

e-mail: uniquebr@smu.ac.kr

khjmild84@hanmail.net

hjshin@smu.ac.kr

A Heuristic Algorithm for Determining an Efficient Portfolio

Bo Ram Kim*, Hye-Jin Kim*, Hyun Joon Shin*,

*Department of Industrial Information & Systems Engineering

*Sangmyung University

요 약

본 연구에서는 효율적 포트폴리오의 선택을 주어진 수준의 기대수익률을 달성하면서 위험을 최소화하는 것으로 정의한다. 이를 위해서는 주식시장에 자산을 투자하고자 하는 투자자가 기대수익률과 위험간의 이상적인 절충을 고려해야 한다. 이 때 사용되는 포트폴리오 최적화 모형은 그 대상이 되는 주식의 종류가 많아지면 최적해를 구하는 것이 쉽지 않다. 그러므로 실제 크기의 문제를 짧은 시간에 풀 수 있는 휴리스틱 알고리즘이 필요하다. 본 연구에서는 실제 주식시장과 관련된 특성을 제약으로 하고 평균 회수율 이하의 절대편하의 평균을 위험함수로 사용하는 포트폴리오 최적화 모형을 분석하고 현실적인 크기의 문제에 대해서 효율적인 해를 도출할 수 있는 해법을 제시하고자 한다.

1. 서론

1.1 연구의 배경과 목적

증권시장이 발달하면서 주식 시장에서 투자에 대한 이익의 기회도 늘었지만 투자에 대한 손해 가능성 또한 크게 늘어났다. 그래서 과학적이고 전문적인 포트폴리오의 선택 및 투자가 요구되고 있다. 투자를 할 때 위험 부담을 줄이고 좀 더 높은 수익을 내기 위해서 효율적인 포트폴리오 선택이 중요하다 [1-4]. 투자자들은 하나하나의 개별 주식을 독립적으로 선택하는 것이 아니라, 복수의 주식을 결합하여 위험을 최소화하고자 한다. 이때 투자자들은 동일한 수준의 기대 수익률을 갖는 포트폴리오 중에서는 분산(예상위험)이 가장 적은 포트폴리오를 선택할 것이고, 동일한 수준의 분산(예상위험)을 갖는 포트폴리오 중에서는 가장 높은 기대수익률을 갖는 포트폴리오를 선택하고자 할 것이다. 즉 효율적인 포트폴리오의 선택은 주어진 수준의 기대 수익률을 달성하

면서 분산(예상위험)을 최소화 하고자 하는 행동으로 정의할 수 있다. 이와 같은 효율적 포트폴리오 선택을 위해서는 수학적인 포트폴리오 최적화 모형이 필요하다[9].

본 논문에서 대상으로 하는 효율적 포트폴리오의 일반적인 모형은 투자자의 요구 수익률을 만족시켜 줄 수 있는 포트폴리오들 중에서 가장 낮은 예상위험을 갖는 포트폴리오를 구성하는 모형이다. 이와 같은 예상위험과 수익률간의 이상적인 절충을 통한 효율적 포트폴리오의 선택을 위해서는 합리적이고 수리적인 포트폴리오 최적화 모형이 필요하다. 이에 본 논문에서는 투자 상황의 실질적인 특성을 포함하는 포트폴리오 최적화 모형을 구성하고 그 해를 구하기 위한 알고리즘을 제시하고자 한다.

2. 포트폴리오 최적화 모형

2.1 기호의 정의

본 연구에서 사용되는 기호는 다음과 같다.

첨자(index)

j : 투자가능한 주식을 나타내는 첨자($j \in J$)

t : 단위기간($t = 1, 2, \dots, T$)

T : 주식보유기간

집합(set)

J : 투자대상이 되는 주식의 집합

입력변수(input variable)

r_{jt} : t 시점에서 주식 j 의 실제 수익률

r_j : 주식 j 의 평균 수익률

C_0 : 투자자산의 하한값

C_1 : 투자자산의 상한값

\bar{C} : 실제 투자한 자산액

C_j : 주식 j 의 단위 거래량 구매비용

d_j : 주식 j 의 비례거래비용

l_j : 주식 j 의 최소투자량

u_j : 주식 j 의 최대투자량

ρ : 요구 수익률

결정변수(decision variable)

x_j : 주식 j 의 투자량

y_t : 기간 t 의 수익률의 편차의 합

2.2 모형의 재정리

일반적인 포트폴리오 최적화모형의 위험 함수를 나타내는 목적식은 다음과 같다[5-8].

$R(X_1, \dots, X_n)$: 위험함수식

$$= \frac{\sum_{t=1}^T -\{\min(0, \sum_{j \in J} (r_{jt} - r_j)x_j)\}}{T}$$

새로운 변수와 제약식을 도입해서 목적식을 선형으로 변형하는 것이 가능하다. 변수 $y_t, t=1, \dots, T$ 를 도입하면 목적식은 다음과 같이 바뀐다.

$$\min \frac{\sum_{t=1}^T y_t}{T} \quad (1)$$

subject to

$$y_t \geq - \sum_{j \in J} (r_{jt} - r_j)x_j, \quad t=1, \dots, T \quad (2)$$

$$y_t \geq 0, \quad t=1, \dots, T \quad (3)$$

$$\sum_{j \in J} (1 + d_j)c_j x_j \geq c_0 \quad (4)$$

$$\sum_{j \in J} (1 + d_j)c_j x_j \leq c_1 \quad (5)$$

$$\sum_{j \in J} (r_j - \rho - \rho d_j)c_j x_j \geq 0 \quad (6)$$

$$l_j \leq x_j \leq u_j, \quad j \in J \quad (7)$$

$$x_j \text{ Integer } j \in J \quad (8)$$

제약식 (2)와 (3)은 원문제의 목적함수식을 선형으로 변환하는 제약식이다. 제약식 (4)와 (5)는 투자액의 상한과 하한을 나타내는 제약식이고, 투자자의 요구수익률은 제약식(6)에 지정되어 있다. 따라서, 선택된 포트폴리오의 수익률은 거래비율과 요구 수익률의 합보다 커야 실수익을 올릴 수 있게 된다.

3. 휴리스틱 알고리즘 제시

본 연구에서는 효율적인 포트폴리오 구성을 위해 다음과 같은 2개의 휴리스틱 알고리즘을 제시한다.

3.1 휴리스틱 알고리즘 1(Algo_1)

원문제의 X변수를 실수화 시켜서 LP모형으로 이완시켜서 LINGO를 풀어서 문제의 해를 구한다. 이때, 양의 값을 갖는 선택된 변수들로 LP포트폴리오를 구성한다. Algo_1의 절차는 [그림 1]과 같다.

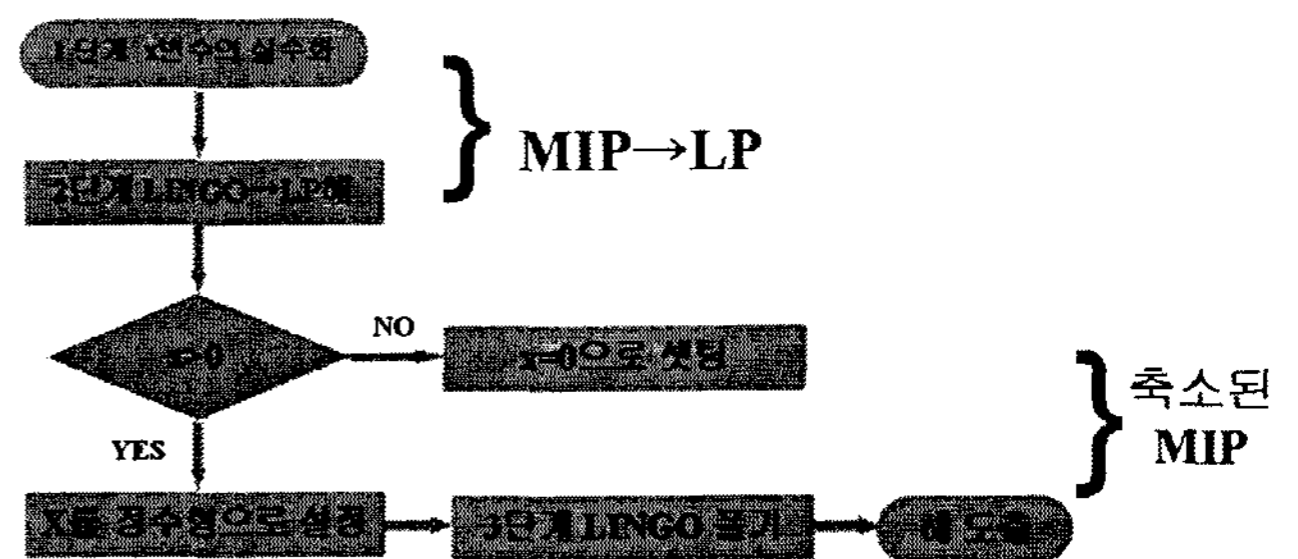


그림 1. Algo_1의 절차

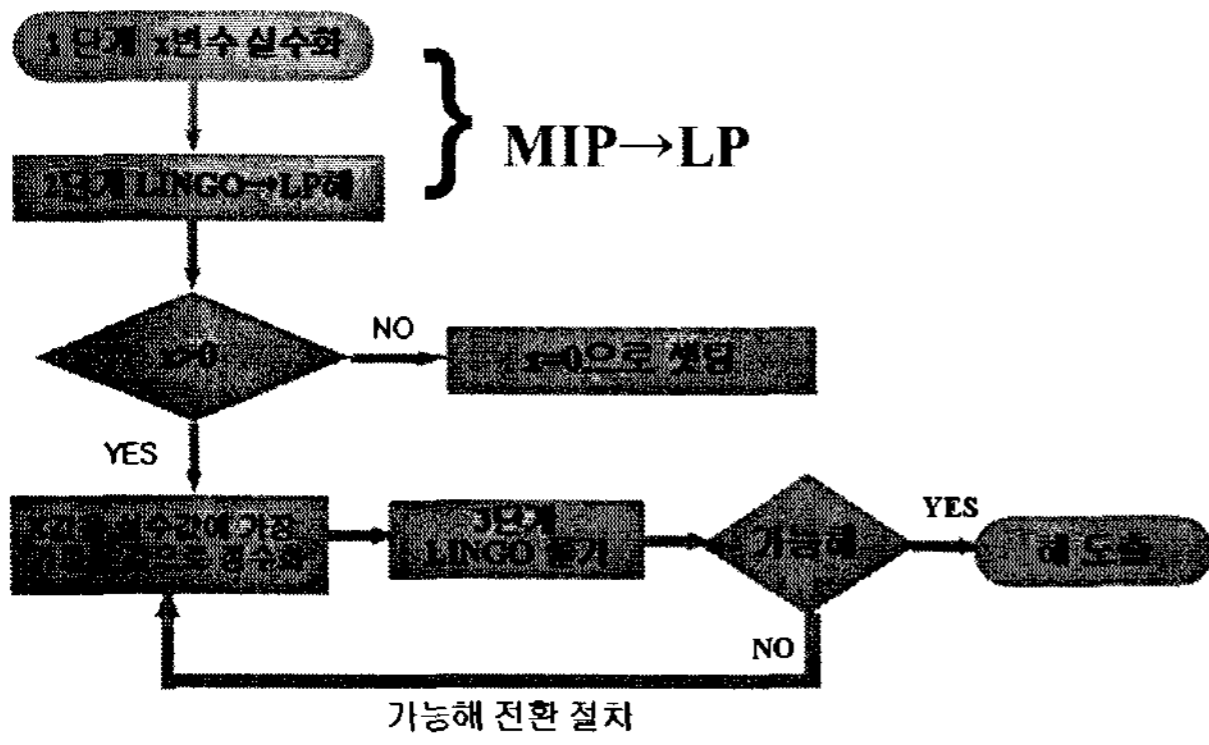


그림 2. Algo_2의 절차

3.2 휴리스틱 알고리즘 2(Algo_2)

Algo_1에서 구성된 LP포트폴리오를 대상으로 X를 정수형으로 설정하고 MIP로 재구성하여 LINGO로 풀어서 해를 도출한다. 이 때, 비가능해 (infeasible solution)이 나온다면 가능해로 바꿔주는 내부절차를 이용하여 해결한다. 자세한 Algo_2의 절차는 [그림 2]에 설명되어 있다.

표 1. 실험1의 결과

주식	A	B	투자량 (천원)	수익 (천원)	목적식 값	수행 시간
1	9	0	98,735	2,523	0.17	3,660 (초)
2	0	0				
3	6	0				
4	5	0				
5	349	493				
6	1	0				
7	1	0				
8	2030	1863				
9	6	0				
10	687	378				
11	12	237				
12	1178	1144				
13	179	169	99,078	2,218	2.74	1 (초)
14	0	0				
15	1	0				
16	250	0				
17	1050	1635				
18	0	0				
19	1388	1372				
20	1463	1363				
21	13	0				
22	1022	775				
23	6	0				
24	0	105				
25	181	186				

4. 실험 결과 및 분석

본 장에서는 앞에서 제안한 휴리스틱 알고리즘의 효율성과 정확성을 실험을 통하여 검증한다. 실험 데이터는 한국증권거래소에서 상장된 종목 중 임의

로 선택하여 2004년부터 2005년 까지 자료로 실험을 한다. 상장된 주식 중 금융, 전기·전자, 건설, 기계, 화학 5가지 업종을 대상으로 각 업종 당 5종목, 6종목씩 총 25종목, 30종목을 선택한다.(여기서 각 업종별 주식 선택은 랜덤하게 한다.) 또한 주식의 보유기간은 1년으로 하고 단위기간은 월 단위이다.

투자자산의 상한값은 100,000,000원으로 하고 하한값은 1%정도의 차이로 설정한다. 주식의 구매비용은 초기 구매월의 주가로 하고 수익률은 단위기간별 주가를 사용하여 계산한다. 최적화 모형과 알고리즘에 필요한 LP이완문제의 해는 LINGO9.0을 이용하여 계산하였다.

실험의 가정은 다음과 같다.

첫째, 비례거래비용은 0.5%로 전 종목이 동일하다.

둘째, 주식 구매수량의 하한값은 0, 상한값은 100,000이다.

셋째, 요구수익률 ρ 는 1.0%로 한다.

넷째, 수익률은 기간별 주가를 사용한다.

다섯째, 기준이 되는 혼합정수계획모형의 최적해를 구할 수 없을 경우 3660초까지 구한 근사해를 최적해의 대체해로 사용한다.

본 논문의 휴리스틱 알고리즘의 효율성 및 정확성을 평가하기 위해 포트폴리오 최적화 모형을 LINGO 통해 얻어진 답과 비교한다.

4.1 실험결과

실험 1.

종목수 : 25 보유기간 : 2년(2004/01~2005/12)

투자금액 : 최소 99,000,000 최대 100,000,000

실험1의 결과는 [표 1]과 같다.

실험 2.

종목수 : 30 보유기간 : 2년(2004/01~2005/12)

투자금액 : 최소 99,000,000 최대 100,000,000

실험2의 결과는 [표 2]와 같다.

	주식	A	B		투자량 (천원)	수익 (천원)	목적식 값	수행 시간
포트폴리오 최적화모형 (A)	1	5	73		98,526	2,074	0.61	3,660 (ch)
	2	6	0					
	3	5	0					
	4	0	0					
	5	335	327					
	6	0	0					
	7	0	0					
	8	1924	2045					
	9	1	0					
	10	1	562					
	11	31	22					
	12	885	1228					
포트폴리오 휴리스틱 알고리즘 (B)	13	25	104		99,497	2,578	2.45	1 (초)
	14	0	0					
	15	0	0					
	16	150	0					
	17	1526	1192					
	18	0	0					
	19	1197	1336					
	20	1378	1554					
	21	467	0					
	22	753	1041					
	23	0	0					
	24	50	0					
	25	158	186					
	26	2	0					
	27	26	0					
	28	0	0					
	29	4	0					
	30	304	0					

4.2 실험결과 분석

[표 1]과 [표 2]에서와 같이 본 연구에서 제안한 휴리스틱 알고리즘(Algo_1)이 목적식의 값은 다소 높았지만, 최적화알고리즘의 수행시간(3,660초)보다 현저히 적은 시간으로 해를 구함을 볼 수 있다. 여기서, Algo_1의 단점을 보완한 Algo_2을 이용하여 실험할 경우 목적식 값을 보다 낮출 수 있을 것으로 예상된다. 또한, [표 2]의 경우 Algo_1이 최적화알고리즘의 경우 보다 목적식 값은 높지만, 수익면에서 25%가량 높은 결과를 보임을 알 수 있다.

5. 결론

본 논문에서 제시한 해법은 주식시장에서 실제적인 투자 상황을 고려하는 효율적 포트폴리오 모형을 구성하고 이제까지 계산량의 어려움으로 인해 구성할 수 없었던 포트폴리오의 구성이 가능해졌을 뿐만 아니라, 더 적은 비용과 시간으로 투자자의 기대수익과 예상 위험간의 이상적인 절충이 가능하게 되었다. 포트폴리오 최적화 모형이 혼합정수계획모형으

로 구성되어있기 때문에 현실문제에 적용할 경우, 대상 주식시장의 종목수가 많아지면 적정 시간 내에 해를 구하는 것이 용이 하지 않다. 따라서 혼합정수 계획모형의 이완된 모형을 이용하여 효율적인 포트폴리오를 선택하는 알고리즘을 제시하였다. 향후 목적식의 값을 향상시킬 수 있는 탐색 알고리즘의 개발에 대한 연구가 필요하다.

참고문헌

- [1] 김건우, 투자론, 홍문사, 2002
- [2] 강병호, 이상빈 공저, 투자론, 박영사, 2004.
- [3] 장영광, 현대투자론, 신영사, 2004
- [4] 박정식, 현대투자론, 다산출판사, 2005
- [5] 임연재, 효율적 포트폴리오 결정을 위한 발견적 알고리즘, 한양대 대학원, 1998
- [6] 이동원, 포트폴리오 결정을 위한 표율적 알고리즘, 한양대 대학원, 2000
- [7] Kim, S.J., Kim, Y.C., Shin, K.Y., "An Algorithm for Portfolio Optimization Problem", Informatica, Vol. 16, 2005.
- [8] Speranza, M.G., "A Heuristic Algorithm for a Portfolio Optimization Model Applied to the Milan Stock Market," Computers and operations Research, Vol.23, No.5, 1996.
- [9] <http://www.samsungfn.com> [삼성증권] An Algorithm for Portfolio Optimization Problem