

레일절손부에서의 차량-궤도 동적상호작용

Dynamic interaction of track and train system with rail open gap

강 윤 석* 강 영 중** 양 신 추*** 조 선 규****
Kang, Yun-Suk Kang, Young-Jong Yang, Sin-Chu Cho, Sun-Kyu

ABSTRACT

In this study, the track and train coupled model with 10 degree of freedom was developed for dynamic interaction analysis in two dimensional space. Linear track and train systems was coupled by the nonlinear Herzian contact spring. And then the dynamic solution technique for the coupled equation of motion using was applied to minimize the errors. An iteration scheme such as modified Newton-Raphson methods was employed to solve these nonlinear equations. Interaction phenomenon considering open gap, which has not been clear yet, was toughly defined by assigning the irregularity functions, which express the open gap width and height difference between the two sides of a gap. And then numerical studies are performed to assess the effect of various parameters of track system with open gap. A track-train interaction model with open gap developed in this study is verified by the other numerical studies and the field test results. The solution technique of track and train coupled system considering rail open gap developed herein may predict the dynamic response of train and track quite properly, apply to various speeds, open gap size and the support stiffness of rail.

1. 서 론

장대레일은 동절기에 레일절손이 발생할 경우 절손부 양단 레일은 기온하강으로 인한 인장력을 받고 있기 때문에 절손부에 간격이 발생하게 된다. 이 간격을 개구부라고 하고 벌어진 량을 개구량이라 한다. 이 개구부를 차륜이 통과하게 되면 레일의 불연속부에서의 열차충격이 크게 증가하고 궤도 부담력도 급격하게 증가한다. 레일절손은 수직횡렬(Transverse Type Broken Rail)의 한 형태로 궤도손상으로 인한 궤도구조안정성과 주행안정성에 큰 영향을 미치게 된다. 그러므로 개구량은 일본 신간선 건조물 표준, AREMA 코드, ACI 등에서는 한계 값을 정하여 레일 파단시 안전을 확보하도록 하고 있다. 이러한 규정이 있음에도 불구하고 해석기법에 대한 연구는 많지 않았으며 현장실험도 선례가 드문 실정이었다. 일본 RTRI에서는 신간선 고속철도 운행시 개구부의 거동

* 한국철도기술연구원/궤도토목연구본부 선임연구원/공학박사/정회원

** 고려대학교 사회환경시스템 공학과 정교수/공학박사/정회원

*** 한국철도기술연구원/궤도토목연구본부 책임연구원/공학박사/정회원

**** 서울 산업대학교 철도전문대학원 주임교수/공학박사/평생회원

을 파악하기 위하여 1983년 1월 모터카에 의한 100mm까지의 개구부 주행시험을 수행한 바 있다. 궤도와 차량의 상호작용 해석기법에 대한 연구가 수행되었지만 절손부를 고려한 해석기법은 거의 없었으며 실제 절손부 주행시험에서도 축중이 낮은 차량이 저속에서 시험을 하였기 때문에 축중이 무겁고 열차속도가 빠른 고속선의 현장조건과도 많이 다르다.

본 연구에서는 레일절손부를 고려할 수 있는 궤도-차량 해석기법을 개발하고 예제 및 매개변수를 수행하여 기존 정적 이산지지이론으로 설명되지 못하는 개구부에서의 궤도와 차량의 동적응답을 분석하였다.

2. 레일 절손부의 현황 및 허용개구량 산정

레일의 절손부에서는 개구부의 동적충격으로 인하여 차륜과 궤도에 손상과 열차주행 안정성이 영향이 우려된다. 실제로 개구부 사이를 함몰되는 탈선형태와 궤도부정합에 의한 Wheel climbing derailment 등이 발생하므로 주행안정성 측면에서 검토가 필요하다. 레일 절손은 영국 Railtrack의 집계(1990~2000년)에 의하면 300건~600건 발생할 정도로 빈도수가 높다. 절손 형태중에서 테르밋트 용접부의 수직절손이 35.3% 이상이 발생한 것으로 보고(SNCF,1999) 되고 있다. 그리고 동절기에 주로 발생하는 것(국내 기존선 ○○지역 사무소,1999년)으로 나타났다. 절손발생시 개구량을 제한하는 것이 중요한데 궤도 축력 설계 시에 중요한 고려사항이 되고 있으며 자갈도상구간 외에 교량구간, 콘크리트 궤도구간 설계에 영향을 준다. 일본 신간선 건조물 표준에서는 교량상의 장대레일을 설계시에 개구량(허용치 6.9cm)과 레일좌굴강도(허용치는 1레일당 100t)를 허용값 이내에서 제한한다. 이외에 AREMA 코드, ACI Manual of Concrete Practice의 PART 4 등에서도 허용개구량을 차륜반경에 따라 규정하고 있다. 국내에서는 고속선 대구-부산간 콘크리트 궤도실시설계에서 검토된 바 있고 이로 인한 축력, 신축영향범위, 개구량 설정식에 적용하고 있다.

실제 절손부의 허용개구량 산정을 하기 위해서는 레일의 수직 처짐량은 짐머만(Zimmermann)의 탄성체 지지이론에 의하여 절손 레일 위에 차륜 접촉점과 파단 레일의 수직처짐, 차륜반경의 기하학적인 관계에서 허용개구량을 구한다. 그러나 이 모델에서는 동적영향으로 인한 궤도부담력 증가나 윤중 변동등의 영향을 검토할 수 없으므로 동적해석이 필요하다.

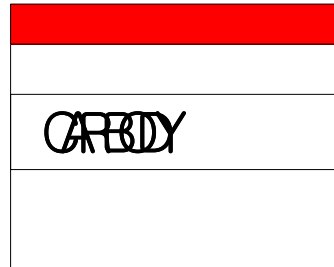
3 동적해석 모델

3.1 궤도와 차량의 모델링

본 연구에서 궤도와 차량이 차륜과 휠이 헤르찌안 접촉 스프링에 의하여 연성(coupled)된 하나의 시스템으로 모델링 하였고 접촉점에서 궤도틀림과 불연속성을 고려하였다. 본 연구에서는 유한요소법을 이용하여 레일은 요소당 2개 절점과 4개 자유도를 가진 보요소로 모델링 하였다. 레일패드는 강성과 감쇠를 가지는 스프링 요소로 모델링 하였다. 침목과 도상은 모두 5개의 층으로 구성된 이산지지(Discrete Rail Modeling) 하고 있는 스프링으로 모형화 하였다. 전체 보요소의 휨 강성행렬과 전단 강성행렬을 구하였고 각각의 형상함수를 D'Alebert원리를 이용하여 일관 질량행렬(consistent mass matrix)을 구하였다. 차량은 축중효과가 큰 동력차에 대하여 2개의 동력대차와 4개의 윤축이 고려된 10자유도의 모델로 모형화 하였으며 차체와 대차의 2차원 병진자유도와 피칭(pitching)등의 회전자유도를 고려하였다. 차량의 운동방정식은 Lagrange방정식을 이용하여 유도하였다.

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_i} \right\} - \left\{ \frac{\partial T}{\partial q_i} \right\} + \left\{ \frac{\partial V}{\partial q_i} \right\} + \left\{ \frac{\partial D}{\partial \dot{\phi}_i} \right\} = P_i \quad (1)$$

여기서, T는 차량전체의 운동에너지로 차체, 대차, 휠의 운동에너지를 나타내는 것이며, 위치에너지 V는 차체, 대차, 헤르쯔안 접촉스프링의 상대변위와 속도를 고려하였다. 분산에너지 D에서 차체, 대차의 상대속도를 고려하였다.



$$[M_{total}]\{\ddot{u}\} + [C_{total}]\{\dot{u}\} + [K_{total}]\{u\} = \{P\} \quad (2)$$

여기서 $[M_{total}]$, $[C_{total}]$, $[K_{total}]$ 이며 $\{\ddot{u}\}$, $\{\dot{u}\}$, $\{u\}$ 는 각각 가속도, 속도, 변위 벡터이며 그림 1은 해석모델이다.

그림 1 . 궤도-차량 상호작용 해석모델(10자유도)

3.2 차륜과 레일의 접촉강성 모델

차륜의 운동방정식은 다음과 같이 유도된다.

$$m_w \frac{d^2 y_w}{dt^2} + P(t) - P_0 = 0 \quad (3)$$

$$P(t) = \begin{cases} 0 & (\Delta < 0) \\ k_c \Delta & (\Delta \geq 0) \end{cases} \quad (4)$$

$$k_c = \frac{3}{2} C_H \Delta^{1/2} \quad \Delta \geq 0, \quad k_c = 0 \quad \Delta < 0 \quad (5)$$

$$\Delta = y_w - y(x_w) - y_{w/r}(x_w) \quad (6)$$

여기서 m_w :차량스프링하질량 (1 차륜당), y_w :차륜상하변위, P_0 : 정지윤중, Δ : 차륜·레일의 상대변위 $= y_w - y(x_w) - y_{w/r}(x_w)$, k_c : 차륜·레일간 접촉강성계수 (Hertz의 접촉 스프링계수), $y_{w/r}$:레일 또는 차륜담면의 조도(Roughness) 이다. 식 (5)에서 $\Delta < 0$ 은 차륜이 레일로부터 떨어져 공중에 위치하는 것을 의미하고, 이 경우에 차륜은 P_0 에 의하여 가속도를 받아 낙하한다. 또한 차륜·레일간의 접촉스프링에 대해서는 상호의 상대변위에 의존하는 헤르쯔안(Hertzian)의 비선형 접촉강성을 고려하였다. 식 (6)에서 k_c 는 차륜과 레일의 접촉강성이며 헤르쯔안 스프링계수으로서 C_H 를 차륜과 레일의 상대변위(Δ)의 함수로 나타낼 수 있다.

3.3 레일절손부의 모델링

레일절손부는 개구부 전후로 하여 절손부 전방레일과 후방레일로 분리가 되며 이 위를 차륜이 지나가게 되면 전후방 레일의 변위에 따라 접촉점이 다르게 형성된다. 후방레일과 전방레일 그리고 차륜과 접촉점은 각각의 기하학적인 관계에 의해서 차륜의 수직방향 변위를 결정할 수 있다. 그림 2의 (a)는 전·후방레일의 차륜 접촉점에서 직각을 이루며 (b)는 후방레일과 차륜이 수직을 이룬다. (c)는 개구량이 20mm 이상인 상태로 전·후방레일과 휠이 직각을 이루지 않는다. (a) 상태를 나타내는 식은 식(7)과 같고 그림 2의 (d)는 실제 차륜중심이 절손부를 움직이는 궤적을 나타낸다.

$$X_o = X_n + r \sin \theta_i, \quad Z_o = Z_n + r(1 - \cos \theta_i), \quad i=1,2 \quad \theta_i \approx \tan \theta_i = Z'_n(X_n) \quad (7)$$

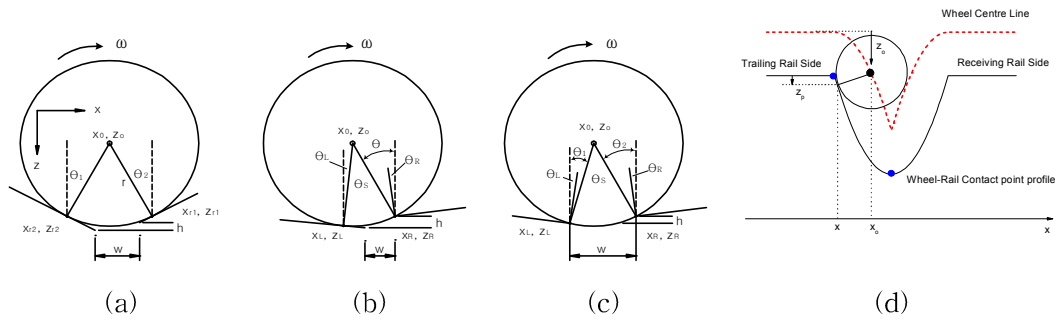


그림 2 . 질손부 해석모델

실제 궤도와 차륜은 완전강체가 아니기 때문에 차륜중심의 이동경로는 훨씬 복잡하지만 Conservative Force System으로 미소변위가 생기는 것으로 가정하여 차륜 중심경로를 계산하였다. 레일 파단점에서는 전·후방레일의 컨스트레인을 릴리즈(release)시켜서 레일의 불연속 효과를 모형화 했다. 수치해를 얻기 위해 Newmark β 방법을 사용하였고 평균가속도법(Average acceleration method)를 사용하여 무조건 안정(unconditionally stable)하도록 하였고 $\beta=0.25$ $\gamma=0.5$ 를 사용하여 시스템 방정식을 풀었다.

4. 검증 및 예제해석

4.1 현장 계측값과와의 비교

본 해석의 안정성을 검증하기 위해서 질손부 모터카 실험을 한 결과와 해석결과를 상호 비교 분석하였다. 질손부(gap size=40mm, 60mm, 80mm, 100mm) 위를 모터카가 주행하였을 때 동적 해석을 한 측정값과 해석결과를 비교한 것이 그림 4-그림 5이다. 비교를 위해서 레일 수직변위 질손부 전방과 후방에서의 레일압력 그리고 전방레일에서의 레일압력, 차축가속도의 결과를 비교분석을 하였다. 각각의 해석결과는 17.2%와 0.27%를 차이를 나타내었고 대체로 비슷한 경향을 보였다.

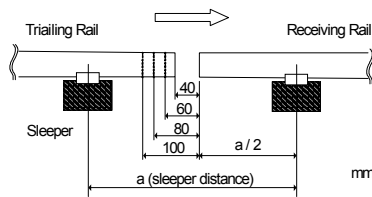


그림 3. 검증을 위한 질손부의 실험조건과 해석모형

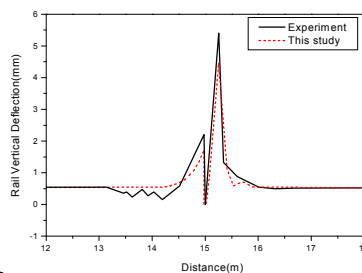


그림 4. 레일의 변위비교

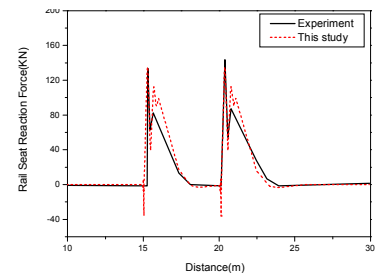


그림 5. 레일지압력 비교

4.2 궤도 및 차량 해석모델

본 해석을 위해서 새롭게 개발된 TDYN(궤도 비선형 동적 해석프로그램)으로 예제해석을 수행하였다. 궤도구조는 고속선의 UIC 60레일, PC침목과 35cm-40cm 두께의 도상을 가졌으며 차량은 KTX차량의 동력차를 모델링하였고 해석에 사용한 주요 특성 값은 표 1과 같다.

표 1. 궤도, 차량의 물성값

궤도의 물성값		차량의 특성값	
Rail Mass per Unit Length (kg/m)	60.3	Carbody Mass (kg)	54960
Rail Bending Stiffness (kN/m ⁴)	3090×10 ⁸	Carbody Mass Inertia (ton·m ²)	1131.9
Rail Section Area (m ²)	7.687×10 ⁻³	Bogie Mass (kg)	2420
Rail Pad Stiffness (kN/m)	150×10 ³	Bogie Mass Inertia (ton·m ²)	2.593
Rail Pad Damping (kN·s/m)	20.0	Wheelset Mass (kg)	2048
Shear Form Factor	0.34	Primary Suspension Stiffness (kN/m)	2504
Sleeper Mass (kg)	260	Primary Suspension Damping (kN·sec/m)	32
Sleeper Support Stiffness (kN/m)	1980×10 ³	Secondary Suspension Stiffness (kN/m)	2536
Sleeper Support Damping (kN·s/m)	600	Secondary Suspension Damping (kN·sec/m)	57
Upper Ballast Stiffness (kN/m)	890×10 ³	Wheel Diameter (mm)	460
Upper Ballast Damping (kN·s/m)	980	Bogie Distance (m)	14.0
Lower Ballast Stiffness (kN/m)	810×10 ³	Wheel Distance (m)	3.0
Subgrade Ballast Stiffness (kN/m)	100×10 ³		

4.3 해석 기법별 궤도 동적거동 비교

궤도-차량 모델링 방법에 따른 동적응답 결과를 비교하였다. 120mm의 개구량이 발생하였을 때 KTX열차가 시속 100km/h로 주행할 때의 궤도응답을 나타낸 그림이다. 그림 6의 (a)는 궤도와 차량이 비연성(decoupled)된 모델(TDM)이며, (b)는 차량-궤도를 하나의 시스템 방정식으로 해석한 모델(TCM)로 차량의 피칭(Pitching) 효과를 고려한 것이다. 시간 간격을 줄이더라도 절손부에서 그 값이 수렴하기는 어렵지만 TCM모델에서는 비교적 수렴이 잘되는 것으로 나타났다. 그림 6 (b)에서는 절손부 전방레일의 수직변위와 후방레일의 수직변위(1.64mm)를 나타내는데 후방레일의 변위(3.14mm)가 더 크게 나타난다. 즉 차량이 절손부를 지나서 레일 전방부와 차량이 접촉할 때의 충격효과가 1.915배의 큰 것을 알 수 있다.

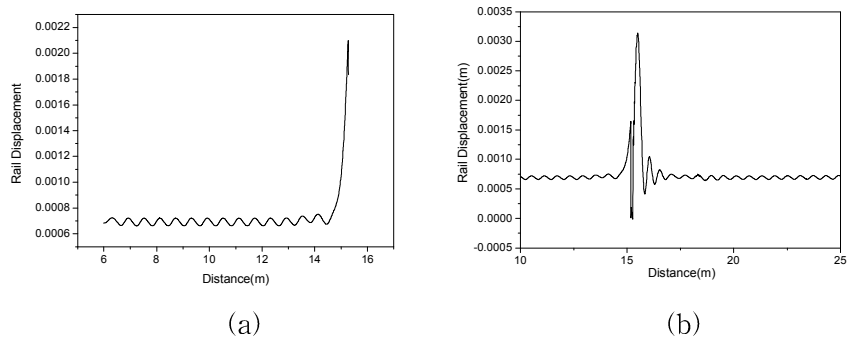


그림 6. 각 해석모델의 궤도 응답값

4.4 속도효과

KTX의 속도증가로 인한 절손부 궤도의 속도효과를 나타낸 것이 그림 7이다. 속도향상에 따라 충격률은 대체로 증가하는 경향을 보였으나, 폭이 좁은 20mm에서 60mm의 속도향상으로 속도충격효과는 크지 않다. 그림 7의 (a)는 운중의 속도 충격률을 나타낸다. 40mm이하의 개구량 발생시 속도에 따른 운중과 차축가속도는 증가경향이 없었지만 60mm이상의 개구량 발생시 속도에 따른 운중과 차축가속도는 크게 증가하였다. 속도영역에서는 100km/h이하에서는 증가경향이 커졌고 150km/h 이상 속도에서는 증가폭이 둔화되었다. 차축가속도는 50km/h이상 속도에서는 이상 차축가속도 70m/s²를 넘었다. 150km/h에서의 증가폭은 침목 통과주파수인 69.4Hz의 영향이 큰 것으로 나타났고 이러한 영향으로 인하여 150km/hr부근에서 운중과 차축가속도가 크게 증가하였다. 속도

에 따른 전방레일의 수직변위는 후방레일보다 최대 2.35배 이상 커지며 후방레일 침목지지부의 압력은 속도증가에 따라 감소되었다. 그러나 전방레일 침목지지부의 압력은 100km/h의 저속영역에서도 최고 6.0배 이상 큰 것으로 나타나 전방레일의 충격효과가 큰 것으로 나타났다. 그리고 열차 속도향상에 따라 시속 150km/h 전후에서 값이 증가하는 것을 알 수 있다.

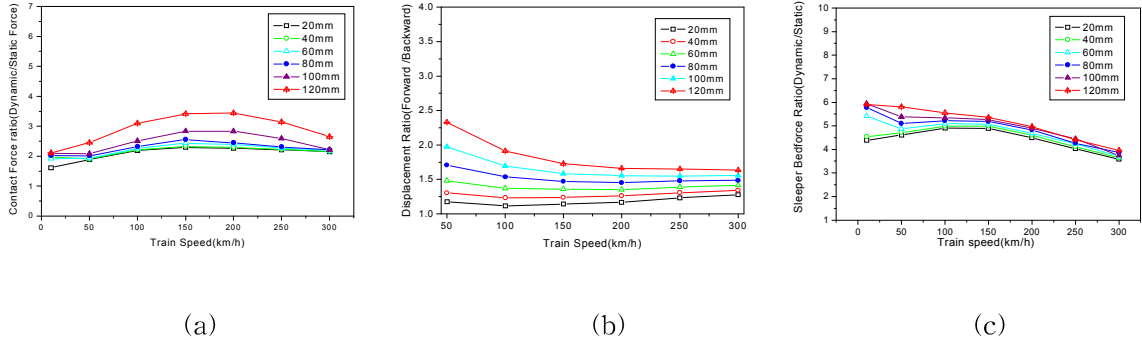


그림 7. 열차속도에 따른 궤도의 동적응답
(a) 운중의 속도충격률 (b) 후방레일의 레일변위 충격률 (c) 전방레일 침목부의 레일압력

4.5 개구량 크기(open gap size)에 따른 효과

그림 8은 개구량 크기에 따른 시스템의 동적응답을 나타내고 있다. 60mm이상의 개구량 발생시 동적인 거동이 급격하게 증가하는 것을 알 수 있으며 그 이하의 개구량에서는 증가효과가 작아지며 속도에 의한 충격효과보다 개구량 크기 변화 더 민감한 것으로 판단된다. 그림 8 (b)는 전방 레일에서의 궤도의 수직방향 변위비를 나타낸 것으로 최고 2.3배가 더 큰 것으로 나타났다. 개구량 크기에 따라서 증가 추세는 뚜렷한 것으로 나타났다. 그림 8(c)는 전방레일 침목 지지부에서의 침목압력으로 개구량 증가에 따른 지압부의 효과가 크지는 않은 것으로 나타났다.

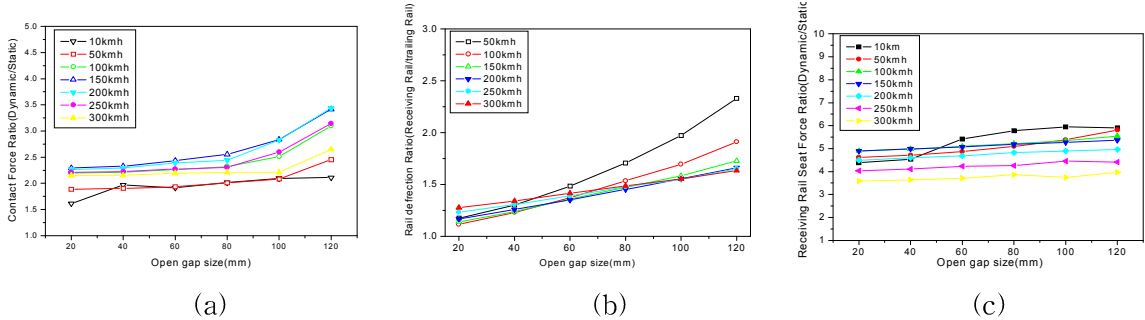


그림 8. 개구량 크기에 따른 시스템의 동적응답
(a) 운중의 속도충격률 (b) 전방레일 수직방향 변위비 (c) 전방레일 침목지지부의 레일압력

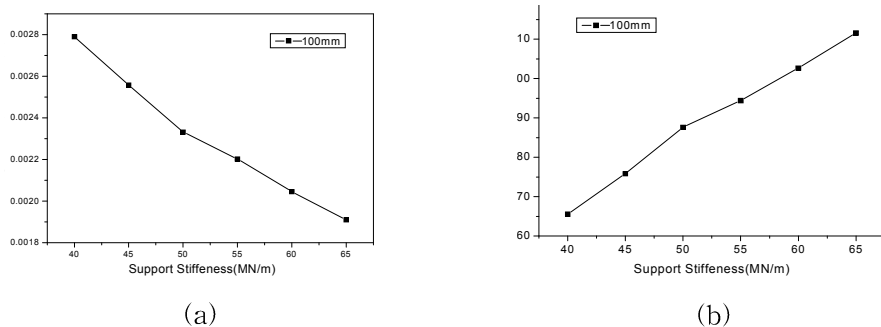


그림 9. 궤도지지강성에 따른 궤도의 동적응답 (a) 전방레일 변위 (b) 전방레일 침목지압력

4.6 궤도지지강성(open gap size)에 따른 효과

그림 9의 (a)와 (b)는 궤도지지강성 따른 궤도의 응답을 나타낸 것이다. 전방에서는 궤도지지강성이 커질수록 레일의 변위는 작아지게 된다. 레일의 변위가 작아지게 되지만 전방부 레일의 하부 지지압력은 점점 커져 궤도 구조안전성에 영향을 준다. 이러한 지지압력은 변위가 감소하기 때문에 더 큰 궤도 부담력을 줄 수 있으므로 여기에 대한 검토가 필요하다.

5. 결론 및 향후과제

본 연구에서는 겨울철에 발생하는 CWR의 레일 절손부 위를 열차가 주행하였을 때 시스템의 동적거동을 분석할 수 있도록 궤도-차량 상호작용 해석기법을 개발하였다. 헤르찌안 접촉강성을 고려한 궤도와 차량의 연성시스템(Coupling system)에 의한 방법으로 더 정확도가 높고 효율적으로 해를 구할 수 있도록 하였다. 예제해석과 매개변수 연구를 통하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) Coupling System의 비선형 동적해석을 수행한 결과 레일 개구부와 같이 급격한 궤도틀림이 발생되고 불연속 지점에 대하여 안정적인 해석 값을 얻을 수 있었다. 기존의 궤도-차량 상호작용 해석방법에서는 현재 시간단계에서 열차위치를 계산하고 가정된 궤도변위에서 궤도 차량의 상호작용력을 계산한 후에 궤도시스템의 운동방정식의 해를 구하게 된다. 궤도의 변위와 가정된 변위와의 차이가 허용오차에 들어올 때까지 반복해석을 수행하여 최종 변위를 구하게 된다. 그러나 본 연구에서는 각 시간단계에서 헤르찌안 접촉강성을 고려한 궤도-차량 상호작용을 고려한 운동방정식을 구성하여 해를 구하기 때문에 불필요한 반복해석 없이 효율적으로 해를 구할 수 있다.

(2) 불연속성(Discontinuity)과 차륜중심의 궤적(Wheel Centre Pass)를 동시에 고려한 절손모델을 제시하여 레일절손부의 동적해석을 수행하였다. RTRI(일본 철도총합연구소)에서 수행한 연구와 비교 검증한 결과 유사한 경향을 보였다.

(3) 궤도 및 차량거동의 특성을 분석한 결과, 개구부를 지난 개구부 전방레일의 충격이 크게 발생되며 이로 인하여 차축가속도, 윤중, 레일변위, 침목지압력등 궤도부담력이 개구부가 없는 경우보다 크게 발생한다. 충격과 관련된 궤도응답은 속도가 증가하면서 대체로 증가하였다. 특히 Wide Gap(60mm이상)에서 크게 증가하는 것으로 나타났다. Gap Size증가에 의해서 충격과 관련된 거동은 크게 발생하였다. 대체로 60mm이상의 개구량 발생시 동적인 거동이 급격하게 증가하는 것을 알 수 있으며 그 이하의 개구량에서는 증가효과가 작은 것으로 판단된다. 대체적으로 속도에 의한 효과보다 개구량 크기의 효과가 더욱 큰 것으로 판단된다.

(4) 전방에서는 궤도지지강성이 커질수록 레일의 변위는 작아지게 된다. 레일의 변위가 작아지게 되지만 전방부 레일의 하부지지압력은 점점 커져 궤도구조안전성이 문제가 발생하게 된다. 이러한 지지압력은 변위가 감소하기 때문에 더 큰 궤도 부담력을 줄 수 있으므로 여기에 대한 검토가 필요하다.

(5) 허용개구량을 판단하기 위해서는 궤도부담력 뿐만 아니라 주행안전성의 영향을 검토할 필요가 있다. 그러기 위해서는 윤중과 횡압, 레일의 경합관계, 단차등이 고려될 필요가 있다. 충격효과를 지배적으로 고려할 경우에는 속도증가에 따라 허용개구량을 감소시킬 필요가 있다.

향후 허용개구량 산정을 위해서는 차량과 궤도의 복잡한 상호작용을 잘 모의할 수 있는 해석기법이 필요할 것으로 판단된다. 절손부 후방레일에서 전방레일로 옮겨가는 차륜의 동시접촉, 궤도 부정합을 고려할 수 있는 해석기법 개발과 시험선등에서의 실제 계측을 통한 검증을 통하여 매개변수 연구를 통하여 궤도-차량 시스템의 정확한 거동이 밝혀질 것으로 생각된다.

참고문헌

1. Coenraad Esveld. (2001). Modern Railway Track, MRT-Productions. pp. 157-170
2. Bathe, K.J. (1982). Finite Element Procedures in Engineering Analysis. Prentice-Hall, New Jersey.
3. FRA. (1997). Investigation on CWR Longitudinal Restraint Behavior in Winter Rail Break and Summer Destressing Operations, U.S.Department of Transportation Federal Railroad Administration.
4. Garg. (1984). Dynamics of Railway Vehicle Systems, ACADEMIC Press, pp. 58-102
5. J.C.O. Nielsen(2003),"Numerical Prediction of Rail Roughness Growth On Tangent Railway Tracks", Journal of Sound and Vibration 267. pp. 537-548, Sweden
6. J.C.O. Nielsen, A. Igeland. (1995) "Vertical Dynamic Interaction between Train and Track - Influence of Wheel and Track Imperfections" Journal of Sound and Vibration, Volume 245, Issue 1, 2 August 2001, Pages 79-92
7. Lim, Nam-Hyoung, Park, Nam-Hoi, Kang,Young-Jong. (2003). "Stability of Continuous Welded Rail Track", Computers and Structures 81. pp. 2219-2236, South Korea
8. Makoto Ishida, Shigeru Miura. (1998)."Track Deformation Characteristics and Vehicle Running Characteristics Due to Settlement of Embankment Behind the Abutment of Bridges", RTRI Report Vol 12. No. 3
9. Sato , Shina, Shinnoda(1985)."Running Test on Rail with Open Gap" , Railway Technical Research Institute, Tokyo Japan
10. T. X. Wu , D. J. Thompson. (2002). "A Hybrid Model For The Noise Generation Due To Railway Wheel Flats", Journal of Sound and Vibration 251(1). pp. 115-139, England
- UIC. (1979). Leaflet 712 R: Rail Defects, International Union of Railways , France
11. 선로공학 서사범 편저 삶과꿈
12. 新軌道力學 - 한글판- 佐藤吉彦 著
13. 양신추,강운석(1999) 레일용접부의 국부궤도틀림에 따른 차량 및 궤도 거동특성에 대한 연구, 1999년도 학술발표회 논문집(IV), 대한토목학회, pp 293-296.
14. 강기동,박대근,이지하(1999) 딥조인트 및 궤도틀림에 의한 윤중변동연구, 1999년도 학술발표회 논문집(IV), 대한토목학회, pp 301-304.

“이 논문은 2005년 정부(과학기술부)의 재원으로 한국과학재단의 지원을 받아 수행된 연구임”
(국가지정연구실사업-미래형 철도 구조 시스템 기술 구축)