

교체정책에 대한 베이지안 접근법

정기문¹

요약

본 논문에서는 최소수리를 갖는 수리가 가능한 시스템의 최적의 교체정책에 대한 베이지 접근방법을 제안하였다. 특히, 시스템을 운용하는데 필연적으로 발생하는 비용과 비가동시간을 함께 고려하여 기존의 비용에 근거한 연구결과를 확장하고자 하였다. 이를 위해서 단위시간당 기대비용과 단위시간당 기대비가동시간을 구하고, 이 두 기준을 동시에 고려한 최적의 교체주기를 결정하는 방법을 제시하였다. 또한, 순응적 교체정책에 대해서도 살펴보았다.

주요용어 : 교체정책, 기대비용, 기대비가동시간, 총백류합수, 최소수리.

1. 서론

수리가 가능한 시스템에 대한 최적의 보전정책(maintenance policy)에서의 관심은 언제까지 최소수리(minimal repair)와 예방보전(preventive maintenance; PM)을 수행하고 시스템을 새 것으로 교체(replacement)하는가 하는 문제이다. 즉, 주어진 기준 하에서 최적의 예방보전 주기(optimal PM period)와 최적의 교체주기(optimal replacement period)를 결정하는 것이다.

Boland(1982)는 최소수리를 갖는 수리가 가능한 시스템에 대한 교체모형(replacement model)을 고려하였다. 특히, 그는 최소수리의 비용을 고장시간의 증가함수로 고려하여 최적의 교체정책을 설정하였다. Mazzuchi와 Soyer(1996) 그리고 Sheu, Yeh, Lin과 Juang(1999)은 Boland(1982)가 고려한 교체모형에 대하여 베이지 관점에서의 최적의 교체정책을 고려하였다. Park, Jung과 Yum(2000)은 수리가 가능한 시스템에 대한 예방보전모형을 고려하였고, Sheu, Yeh, Lin과 Juang(2001)은 베이지 관점에서의 최적의 예방보전정책을 설정하였다.

이러한 기존의 수리가 가능한 시스템에 대한 보전모형에 있어서 최적의 보전정책을 결정하기 위해서 사용한 기준은 단위시간당 기대비용(expected cost rate per unit time)이다. 그러나, 시스템을 운용하는데 있어서 시스템의 비가동시간(downtime)은 필연적으로 발생하게 될 뿐만 아니라 사용자에 의해서 중요하게 고려되어야 할 요인이기 때문에 본 연구에서는 단위시간당 기대비용과 단위시간당 비가동시간(expected downtime per unit time)을 함께 고려하고자 한다. 즉, 기대비용과 기대비가동시간에 근거한 베이지안 측면의 교체정책을 제안하고자 한다.

¹608-736 부산 남구 대연동 110-1, 경성대학교 정보통계학과 조교수. E-mail : kmjung@ks.ac.kr

본 연구에서는 보전기간(x) 동안에 시스템에 고장이 발생하면 최소수리를 수행하고, 시점 x 에서 사용자에게 의해서 새 시스템으로 교체되는 교체모형에 대하여 단위시간당 기대비용과 단위시간당 기대비가동시간에 근거한 베이지안 측면의 최적의 교체정책을 제시하고자 한다. 특히, 측정단위가 서로 틀린 단위시간당 기대비용과 기대비가동시간이라는 두 기준을 고려한 최적의 교체정책을 설정하기 위해서 Jiang와 Ji(2002)이 제안한 총밸류함수(overall value function)를 이용한다.

본 논문은 다음과 같은 내용으로 구성된다. 2절에서는 보전기간 동안에 시스템에 고장이 발생하면 최소수리를 하고 시점 x 에서 교체하는 모형에 대하여 고전적인 방법으로 단위시간당 기대비용과 단위시간당 기대비가동시간을 구하고 최적의 교체정책을 결정한다. 3절에서는 2절에서 고려한 교체모형에 대하여 베이지안 측면의 단위시간당 기대비용과 단위시간당 기대비가동시간을 구하고, 이 두 기준을 이용한 총밸류함수를 정의하며, 이에 근거한 최적의 교체정책을 설정한다. 또한, 모수에 대한 불확실성을 개정하기 위한 순응적 교체정책(adaptive replacement policy)에 대하여 설명한다.

2. 최적의 교체정책

2.1 단위시간당 기대비용

본 논문에서 고려하는 수리가 가능한 시스템에 대한 보전모형에 대하여 단위시간당 기대비용에 근거한 최적의 교체정책을 고려하자. 최적의 교체정책을 설정하기 위해서는 단위시간당 기대비용을 구하여야 하는데, 이는 시스템의 기대순환길이(expected cycle length)와 총기대비용(total expected cost)을 구함으로써 결정된다. 그런데, 총기대비용은 보전기간 동안에 이루어지는 기대최소수리비용과 교체시점 x 에서의 기대교체비용의 합으로 구해진다. 그러므로 본 논문에서 고려되는 교체모형에 대한 단위시간당 기대비용은 다음과 같이 구해진다.

$$C(x) = \frac{c_r + c_m \int_0^x h(t) dt}{x} . \quad (1)$$

여기서, c_r 은 시스템의 교체비용이고, c_m 은 시스템의 최소수리비용이며, $h(t)$ 는 시스템의 고장을 함수이다.

신뢰성이론에서 고장시간 T 의 분포로 가장 널리 사용되는 분포 중의 하나인 와이불분포를 고려하면 시스템의 고장율함수는 다음과 같다.

$$h(t) = \alpha \beta t^{\beta-1}, \quad t > 0, \alpha > 0, \beta > 0. \quad (2)$$

만약, 시스템의 고장시간이 와이불분포를 한다고 가정하면 식 (1)에 주어진 단위시간당 기대비용

은 다음과 같이 된다.

$$C(x) = \frac{c_r + c_m \int_0^x a\beta t^{\beta-1} dt}{x} \quad (3)$$

2.2 단위시간당 기대비가동시간

단위시간당 기대비가동시간은 2.1절의 단위시간당 기대비용과 유사하게 구할 수 있다. 즉, x 에서 시스템을 새 것으로 교체하는데 발생하는 기대비가동시간과 보전기간 동안에 시스템에 고장이 발생하여 최소수리를 함으로써 발생하는 기대비가동시간을 구하여 다음과 같이 단위시간당 기대비가동시간을 구할 수 있다.

$$D(x) = \frac{d_r + d_m \int_0^x h(t) dt}{x + d_r}. \quad (4)$$

여기서, d_m 은 최소수리를 위한 비가동시간이고, d_r 은 x 에서 시스템 교체에 의한 비가동시간이다. 만약, 시스템의 고장시간이 식 (2)와 같은 고장률함수를 갖는 와이블분포를 한다고 가정하면 식 (4)에 주어진 단위시간당 기대비가동시간은 다음과 같이 된다.

$$D(x) = \frac{d_r + d_m \alpha x^\beta}{x + d_r}. \quad (5)$$

2.3 최적의 교체정책

이 절에서는 식 (1)의 단위시간당 기대비용과 식 (4)의 단위시간당 기대비가동시간을 함께 고려한 최적의 교체정책을 고려하고자 한다. 이러한 두 기준에 근거한 최적의 교체정책을 설정하기 위해서 단일 기준에 의한 최적의 교체정책을 살펴보자. 식 (1)에 있는 단위시간당 기대비용을 최소화하는 최적의 보전기간 x_c^* 와 식 (4)에 있는 단위시간당 기대비가동시간을 최소화하는 최적의 보전기간 x_d^* 는 Boland(1982)의 결과로부터 각각 다음을 만족하는 x 값이 됨을 알 수 있다.

$$\frac{dC(x)}{dx} = 0, \quad \frac{dD(x)}{dx} = 0.$$

이제, 두 기준에 근거한 최적의 교체정책을 살펴보자. 단위시간당 기대비용과 단위시간당 기대비가동시간은 서로 다른 측정 단위를 사용하고 있기 때문에 이러한 문제를 해결하기 위한 방법이 필요하다. 이를 위해서 Jiang와 Ji(2002)에 의해서 제안된 총벨류함수를 이용한다. $v_1(x)$ 을 단의시

간당 기대비용에 대한 벨류함수(value function)라고 하자. 이때, 식 (1)에 있는 단위시간당 기대비용은 유일한 최소값 $C_{\min}(x_c^*)$ 을 갖기 때문에 $v_1(x)$ 을 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$v_1(x) = \frac{C_{\min}}{C(x)}. \quad (6)$$

그리고, $v_2(x)$ 를 단위시간당 기대비가동시간에 대한 벨류함수라고 하면, 식 (4)에 있는 단위시간당 기대비가동시간은 유일한 최소값 $D_{\min}(x_d^*)$ 을 갖기 때문에 $v_2(x)$ 는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$v_2(x) = \frac{D_{\min}}{D(x)}. \quad (6)$$

그러므로, 벨류함수 $v_1(x)$ 와 $v_2(x)$ 를 이용하여 다음과 같은 총벨류함수를 정의할 수 있다.

$$V(x) = w_1 v_1(x) + w_2 v_2(x) \quad (7)$$

여기서, w_1 은 단위시간당 기대비용에 대한 가중치이고 w_2 는 단위시간당 비가동시간에 대한 가중치로써 $w_1 + w_2 = 1$ 을 만족한다. 따라서, 식 (7)에 있는 총벨류함수를 최대화하는 값이 두 기준을 함께 고려한 최적의 보전기간 x^* 가 된다.

만약, 시스템의 고장시간이 와이블분포를 한다고 가정하면 식 (3)과 (5)를 이용하여 식 (6)과 (7)에 있는 벨류함수 $v_1(x)$ 와 $v_2(x)$ 를 구할 수 있고, 구해진 벨류함수로부터 식 (7)의 총벨류함수를 구하여 단위시간당 기대비용과 단위시간당 기대비가동시간에 근거한 최적의 교체주기를 결정할 수 있다.

3. 베이지안 측면의 최적의 교체정책

3.1 단위시간당 기대비용

고장시간 T 가 식 (2)의 고장률함수를 갖는 와이블분포를 한다고 가정하자. 이 때, 식 (2)에서 정의된 고장률함수 $h(t)$ 에 포함된 두 모수 α 와 β 에 대한 사전확률분포를 Mazzuchi와 Soyer(1996)의 연구에서와 같이 고려하자. 즉, α 는 다음과 같은 감마분포를 따른다고 가정하자.

$$f(\alpha) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \alpha^{a-1} e^{-b\alpha}, \quad \alpha > 0. \quad (9)$$

여기서, $a, b > 0$ 이고, 이 값은 사전확률분포의 초모수(hyperparameter)를 나타낸다. 또한, 형태모수 β 의 사전확률분포를 가정하기 위해 다음과 같은 베타분포를 고려하고자 한다.

$$g(\beta) = \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(x)\Gamma(d)} \frac{(\beta - \beta_L)^{c-1}(\beta_U - \beta)^{d-1}}{(\beta_U - \beta_L)^{c+d-1}}, \quad 0 \leq \beta_L \leq \beta \leq \beta_U. \quad (10)$$

식 (10)에 정의된 베타분포에서 사전정보의 불확실성을 가능한 잘 나타내도록 하기 위해서는 다음과 같이 이산형 베타분포(discretization of bata density)의 형태로 변형시켜 사용하는 것이 좋다 (Soland(1969) 참조).

$$\begin{aligned} P_l &= \Pr(\beta = \beta_l) \\ &= \int_{\beta_l - \delta/2}^{\beta_l + \delta/2} g(\beta) d\beta, \quad l = 1, 2, \dots, k. \end{aligned} \quad (11)$$

여기서, $\beta_l = \beta_L + \delta(2l-1)/2$, $\delta = (\beta_U - \beta_L)/k$ 이다.

그리고, 모수들이 사전독립(prior independent)이라고 가정하면, α 와 β 의 결합사전확률분포(joint prior probability distribution)는 식 (9)와 (11)에 의해 다음과 같이 구해질 수 있다.

$$\begin{aligned} p(\alpha, \beta) &= f(\alpha) \Pr(\beta = \beta_l) \\ &= \frac{b^a}{\Gamma(a)} \alpha^{a-1} e^{-b\alpha} P_l. \end{aligned} \quad (12)$$

이제 베이즈관점에서의 단위시간당 기대비용은 모수 α 와 β 의 사전확률분포를 고려하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} E[C(x)] &= E_{\alpha, \beta}[E[C(x) | \alpha, \beta]] \\ &= \sum_{l=1}^m \frac{c_r + c_m \left(\frac{a}{b}\right) x^{\beta_l}}{x} P_l. \end{aligned} \quad (13)$$

3.2 단위시간당 기대비가동시간

고장시간 T 가 식 (2)와 같은 고장률함수를 갖는 와이블분포를 한다고 가정하자. 그리고, 식 (2)에서 정의된 고장율함수 $h(t)$ 에 포함된 두 모수 α 와 β 에 대한 사전확률분포도 3.1절에서와 같이 α 는 식 (9)와 같은 감마분포를 고려하고, β 는 식 (11)의 이산형 베타분포를 고려하자. 그러면, 베이즈관점에서의 단위시간당 기대비가동시간은 3.1절에서와 같이 모수 α 와 β 의 사전확률분포를 고려하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} E[D(x)] &= E_{\alpha, \beta}[E[D(x) | \alpha, \beta]] \\ &= \sum_{l=1}^m \frac{d_r + d_m \left(\frac{a}{b}\right) x^{\beta_l}}{x} P_l. \end{aligned} \quad (14)$$

3.3 최적의 교체정책

이 절에서는 식 (13)에 주어진 베イズ관점에서의 단위시간당 기대비용과 식 (14)에 주어진 베イズ관점에서의 단위시간당 기대비가동시간을 함께 고려한 최적의 교체정책을 고려하고자 한다. 이러한 두 기준에 근거한 최적의 교체정책을 설정하기 위해서 단일 기준에 의한 최적의 교체정책을 살펴보자. 식 (13)에 있는 단위시간당 기대비용을 최소화하는 최적의 보전기간 $x_{B,c}^*$ 와 식 (14)에 있는 단위시간당 기대비가동시간을 최소화하는 최적의 보전기간 $x_{B,d}^*$ 는 Mazzuchi와 Soyer(1996)의 결과를 이용하여 구할 수 있다.

이제, 두 기준에 근거한 최적의 교체정책을 살펴보자. 단위시간당 기대비용과 단위시간당 비가동시간은 서로 다른 측정 단위를 사용하고 있기 때문에 이러한 문제를 해결하기 위해서 Jiang와 Ji(2002)에 의해서 제안된 총밸류함수를 이용하고자 한다. 즉, $v_{B1}(x)$ 을 단위시간당 기대비용에 대한 밸류함수라고 하자. 이때, 식 (13)에 있는 단위시간당 기대비용은 유일한 최소값 $C_{\min}(x_{B,c}^*)$ 을 갖기 때문에 $v_{B1}(x)$ 을 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$v_{B1}(x) = \frac{C_{\min}}{E[C(x)]}. \quad (15)$$

그리고, $v_{B2}(x)$ 를 단위시간당 비가동시간에 대한 밸류함수라고 하면, 식 (14)에 있는 단위시간당 기대비가동시간은 유일한 최소값 $D_{\min}(x_{B,d}^*)$ 을 갖기 때문에 $v_{B2}(x)$ 는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$v_{B2}(x) = \frac{D_{\min}}{E[D(x)]}. \quad (16)$$

그러므로, 밸류함수 $v_1(x)$ 와 $v_2(x)$ 를 이용하여 다음과 같은 총밸류함수를 정의할 수 있다.

$$V_B(x) = w_1 v_{B1}(x) + w_2 v_{B2}(x). \quad (17)$$

여기서, w_1 은 단위시간당 기대비용에 대한 가중치이고 w_2 는 단위시간당 비가동시간에 대한 가중치로써 $w_1 + w_2 = 1$ 을 만족한다. 따라서, 식 (17)에 있는 총밸류함수를 최대화하는 값을 두 기준을 함께 고려한 베イズ관점에서의 최적의 보전기간 x_B^* 가 된다.

3.4 순응적 교체정책

이 절에서는 순응적 교체정책을 고려하고자 한다. 이를 위해서 x 에서 새로운 시스템으로 교체할 때 까지 발생한 고장시간(failure time)을 t_1, t_2, \dots, t_n 라 하자. 이때, 고장시간의 밀도함수는

$$f(t_1, t_2, \dots, t_n) = \left\{ \prod_{i=1}^n h(t_i) \right\} \exp\{-H(x)\}$$

이다. 여기서, $H(t) = \int_0^t h(t) dt = \alpha t^\beta$ 이다. 그러므로 t_1, t_2, \dots, t_n 의 우도함수(likelihood function)는 다음과 같이 구해진다.

$$L(\alpha, \beta | t_1, t_2, \dots, t_n) = \left\{ \prod_{i=1}^n \alpha \beta t_i^{\beta-1} \right\} \exp\{-\alpha x^\beta\}. \quad (18)$$

따라서, 식 (12)에서 정의된 모수들의 결합사전확률분포와 식 (18)의 우도함수를 이용하면 α 와 β 의 결합사후확률분포(joint posterior probability distribution)는 다음과 같다.

$$f(\alpha, \beta | t_1, t_2, \dots, t_n) \propto \prod_{i=1}^n [\alpha \beta t_i^{\beta-1} \exp\{-\alpha x^{\beta_i}\}] \alpha^{a-1} \exp\{-b\alpha\} P_l. \quad (19)$$

또한, $f(\alpha | \beta_l, t_1, t_2, \dots, t_n) = f(\alpha \beta_l, t_1, t_2, \dots, t_n) / \Pr(\beta = \beta_l, t_1, t_2, \dots, t_n)$ 이므로 α 의 조건부사후확률분포(conditional posterior probability distribution)는 다음과 같다.

$$f(\alpha | \beta_l, t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{(b + x^{\beta_l})^{a+n}}{\Gamma(n+a)} \alpha^{(a+n)-1} \exp\{-\alpha(b + x^{\beta_l})\}. \quad (20)$$

위에서 정의된 식 (20)은 모수가 각각 $a^* = a + n$ 와 $b^* = b + \beta_l$ 인 감마분포임을 알 수 있다. 또한, 식 (19)와 식 (20)을 이용하면 P_l^* 는 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} \Pr(\beta = \beta_l | t_1, t_2, \dots, t_n) &= P_l^* \\ &= \frac{f(\alpha, \beta_l | t_1, t_2, \dots, t_n)}{f(\alpha | \beta_l, t_1, t_2, \dots, t_n)} \\ &= \frac{\beta_l^n \left\{ \prod_{i=1}^n t_i \right\}^{\beta_l-1} / (b + x^{\beta_l})^{a+n}}{\sum_{j=1}^m P_j \beta_j^n \left\{ \prod_{i=1}^n t_i \right\}^{\beta_j-1} / (b + x^{\beta_j})^{a+n}} P_l \end{aligned} \quad (21)$$

이제 α 와 β 의 주변사후확률분포는 더 이상 독립이 아니며, 최적의 보전정책은 식 (13)과 식 (14)에서 a, b, P_l 의 값을 위에서 구한 a^*, b^*, P_l^* 로 대체시킴으로써 얻을 수 있다. 즉, a^*, b^*, P_l^* 로 대체된 식 (13)과 식 (14)를 최소화하는 $x_{B,c}^*$ 과 $x_{B,d}^*$ 를 각각 구한 후 이를 이용하여 식 (17)의 총벨류함수를 새롭게 구할 수 있고, 이 총벨류함수를 최대화하는 값이 두 기준을 함께 고려한 최적의 보전기간 x_B^* 가 되는 것이다.

4. 결론

본 논문에서는 수리가 가능한 시스템에 대한 최적의 교체정책에 대한 베イズ 접근방법을 제안하였다. 특히, 시스템을 운용하는데 필연적으로 발생하는 비용과 비가동시간을 함께 고려하여 기존의 비용에 근거한 연구결과를 확장하였다. 고장시간이 불확실성을 내포하는 모수 α 와 β 를 갖는 와이블분포를 할 때 베イズ 관점에서 단위시간당 기대비용과 단위시간당 기대비가동시간을 구하고 이 두 기준을 동시에 고려한 최적의 교체주기를 결정하는 방법을 제시하였으며, 순응적 교체정책에 대해서도 살펴보았다.

참고문헌

- [1] Boland, P. J. (1982). Periodic replacement when minimal repair cost vary with time, *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol. 29, 541-546.
- [2] Jiang, R. and Ji, P. (2002). Age Replacement policy: a multi-attribute value model, *Reliability Engineering and System Safety*, Vol. 76, 311-318.
- [3] Mazzuchi, T. A. and Soyer, R. (1996), A Bayesian perspective on some replacement strategies, *Reliability Engineering and System Safety*, Vol. 51, 295-303.
- [4] Park, D. H., Jung, G. M. and Yum, J. K. (2000). Cost minimization for periodic maintenance policy of a system subject to slow degradation, *Reliability Engineering and System Safety*, Vol. 68, 105-112.
- [5] Sheu, S. H., Yeh, R. H., Lin, Y. B. and Juang, M. G. (1999). A Bayesian perspective on age replacement with minimal repair, *Reliability Engineering and System Safety*, Vol. 65, 55-64.
- [6] Sheu, S. H., Yeh, R. H., Lin, Y. B. and Juang, M. G. (2001). A Bayesian approach to an adaptive preventive maintenance model, *Reliability Engineering and System Safety*, Vol. 71, 33-44.
- [7] Soland, R. M. (1969). Bayesian analysis of the Weibull process with unknown scale and shape parameters, *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. 18, 181-184.