

# 도심-전단중심 정식화를 이용한 개선된 곡선보이론

## Curved Beam Theory Based On Centroid-Shear Center Formulation

김 남 일\* · 경 용 수\*\* · 김 문 영\*\*\*

Kim, Nam-Il · Kyung, Yong-Soo · Kim, Moon-Young

### ABSTRACT

To overcome the drawback of currently available curved beam theories having non-symmetric thin-walled cross sections, a curved beam theory based on centroid-shear center formulation is presented for the spatially coupled free vibration and elastic analyses. For this, the elastic strain and kinetic energies considering the thickness-curvature effect and the rotary inertia of curved beam are derived by degenerating the energies of the elastic continuum to those of curved beam. And then the equilibrium equations and the boundary conditions are consistently derived for curved beams having non-symmetric thin-walled cross section. It is emphasized that for curved beams with L- or T-shaped sections, this thin-walled curved beam theory can be easily reduced to the solid beam theory by simply putting the sectional properties associated with warping to zero. In order to illustrate the validity and the accuracy of this study, FE solutions using the Hermitian curved beam elements are presented and compared with the results by previous research and ABAQUS's shell elements.

**Keywords:** curved beam, non-symmetric thin-walled cross section, free vibration analysis, elastic analysis

### 1. 서 론

곡선보 구조물은 스프링, 타이어의 해석 및 설계, 곡선 거더교, 항공기구조물의 보강재 등의 많은 기계학, 항공학 그리고 토목공학 등에 사용되어왔다. 또한 곡선보요소는 쉘 구조물의 단순모델에도 사용된다.

일반적으로 박벽 곡선보 구조물의 진동과 처짐 거동은 신축과 휨, 비틀변형과 곡률효과와의 연계효과 때문에 매우 복잡하다. 최근까지 박벽 곡선부재의 거동에 관해서는 많은 연구자들에 의하여 연구되어왔다.

도심-전단중심 정식화에 근거한 곡선보의 처짐 및 안정이론에 관한 대부분의 선행연구 (Kang and Yoo (1994), Yang and Kuo (1987, 1986))는 이축대칭 박벽단면을 가지는 것에 제한되었다. 더 나아가 Gendy and Saleeb (1992)는 도심-전단중심에 근거한 이론은 보의 곡률면에 대하여 대칭단면을 갖는 곡선보의 경우 가능

\* 성균관대학교 건설환경연구소 연구교수 E-mail: kni8501@dreamwiz.com

\*\* 성균관대학교 건설환경시스템공학과 박사과정 E-mail: sosory@dreamwiz.com

\*\*\* 정희원, 성균관대학교 건설환경시스템공학과 교수 E-mail: kimye@skku.ac.kr

하다는 결과를 발표하였다. 이 같은 이유로 비대칭 단면을 갖는 대부분의 박벽 곡선보이론은 도심축 (Kim *et al.* (2002, 2000a, b), Hu *et al.* (1999))에서 정의된 변위파라미터에 근거하여 개발되어왔다. Kim *et al.* (2002)은 전단변형효과를 무시한 비대칭 단면을 갖는 박벽 곡선보의 3차원 자유진동해석을 위하여 면내진동에 관하여 엄밀해를 제시하고 3차원 진동해석을 위하여 유한요소해를 제시하였다. Gendy and Saleeb (1994)는 전단변형과 회전관성을 포함하는 임의의 박벽 곡선보의 3차원 자유진동에 관한 효과적인 유한요소해를 제시하였다. 그러나 그들은 두께-곡률효과와 전단변형을 부분적으로 고려하였다.

L형 및 T형 단면을 가진 박벽 곡선보의 진동해석과 탄성해석에 대한 도심정식화에 근거한 이론은 도심에서 단면의 뒹(warping) 함수가 영이되지 않기 때문에 뒹과 관련된 추가적인 단면상수의 계산이 필요하였다. 최근 Tong 과 Xu (2002)는 도심-전단중심에 근거한 비대칭 단면을 가진 곡선보이론을 발표하였다. 그러나 그들은 곡선보의 두께-곡률효과를 고려하지 않았고, 해석은 곡선보의 처짐해석에 국한되었다.

본 연구에서는 처음으로 도심-전단중심정식화에 근거하여 비대칭단면을 가진 곡선보이론을 제시한다. 특히 L형 과 T형 단면을 가진 곡선보에서는 전단중심에서 뒹이 영이 되는 것과 관련하여 뒹상수를 무시함으로써 식이 간편화될 수 있다. 본 연구에서의 중요사항은 아래에 요약하였다.

1. 일정한 곡률을 가지는 비대칭 박벽곡선보의 변위장은 도심에서 정의된 축변위와 두개의 휨에 의한 회전, 전단중심에서 정의된 뒹함수와 두개의 횡변위 및 비틀변위를 포함한다.
2. 다음으로 두께-곡률효과를 고려하는 변위장을 일반적인 좌표계에서 엄밀하게 유도하였다.
3. 도심-전단중심정식화에 근거한 탄성변형에너지와 운동에너지를 박벽단면을 갖는 비대칭 곡선보의 자유진동해석과 탄성해석을 위하여 각각 새로이 제시하였다.
4. 추가적으로 Hermitian 곡선보요소를 사용하여 비대칭 곡선보 해석을 수행하였다. 제안된 연구의 타당성을 검증하기 위하여 본 연구의 결과를 문헌의 값과 ABAQUS 셸요소를 사용한 결과와 비교하였다.

## 2. 도심-전단중심에 근거한 곡선보 이론

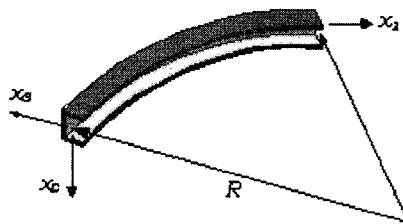
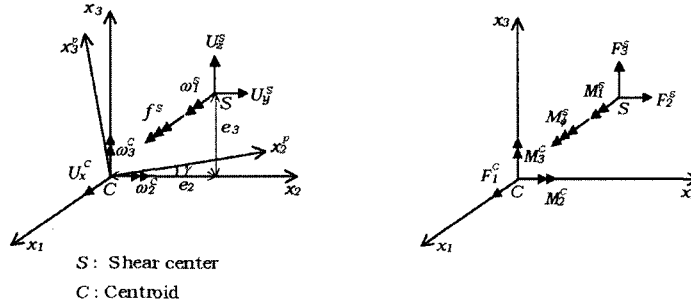


그림 1. 박벽곡선보의 형상

본 논문에서는 박벽 곡선보의 3차원 연속체에 대한 자유진동이론과 탄성이론을 설명하기 위해 다음의 가정을 도입한다.

1. 박벽 곡선보는 선형탄성이고, 부재축을 따라 균일단면을 갖는다.
2. 단면은 뒹변형을 제외하고 면내변형에 대해서 강체거동한다.
3. 부재 곡률의 축은 주축과 일치할 필요가 없다.

그림 1은 곡률  $R$ 을 반지름으로 하는 곡선보를 보여주고 있다. 여기서  $x_1$  축은 도심축을 나타내고,  $x_2, x_3$  축은 주축과 일치할 필요가 없다. 그림 2는 비대칭 박벽단면의 변위장을 도입하기 위해 7개의 변위파라미터와 작용힘을 보여주고 있다. 여기서  $x_2^c, x_3^c$  는 주축을 나타낸다.



(a) 곡선보의 변위장 (b) 곡선보의 작용힘

그림 2. 곡선보의 변위장과 작용힘

주기적으로 진동하는 연속체에 대한 가상일의 원리는 다음과 같이 표현된다.

$$\int_V \tau_{ij} \delta e_{ij} dV - \omega^2 \int_V \rho U_i \delta U_i dV = \int_S T_i \delta U_i dS \quad (1)$$

첫 번째 항은 탄성변형에너지로 주어지는 내적인 가상일의 원리를 나타내며, 두 번째 항은 운동에너지를 나타낸다. 박벽 곡선보의 경우, 식 (1)로부터 포텐셜에너지  $\Pi$ 를 계산할 수 있으며 결과적으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Pi = \Pi_E - \Pi_M - \Pi_{ext} \quad (2)$$

여기서 탄성변형에너지와 운동에너지는 다음과 같이 계산이 되어진다.

$$\begin{aligned} \Pi_E = & \frac{1}{2} \int_0^l \left[ EA \left( U_x' + \frac{U_z}{R} - \frac{e_2}{R} \theta \right)^2 + EI_2 \left( \frac{e_2}{R} U_y'' + U_z'' + \frac{U_z}{R^2} + \frac{e_2 e_3}{R} \theta'' - \frac{e_2}{R^2} \theta \right)^2 \right. \\ & + EI_3 \left( \frac{R - e_3}{R} U_y'' - \frac{e_3^2}{R} \theta'' - \frac{\theta}{R} \right)^2 + EI_\theta \left( \frac{U_y''}{R} + \frac{R + e_3}{R} \theta'' \right)^2 + GJ \left( \frac{U_y'}{R} + \frac{R + e_3}{R} \theta' \right)^2 \\ & + 2EI_{23} \left( \frac{e_2}{R} U_y'' + U_z'' + \frac{U_z}{R^2} + \frac{e_2 e_3}{R} \theta'' - \frac{e_2}{R^2} \theta \right) \left( \frac{R - e_3}{R} U_y'' - \frac{e_3^2}{R} \theta'' - \frac{\theta}{R} \right) \\ & - 2 \frac{EI_{\theta 22}}{R} \left( \frac{U_y''}{R} + \frac{R + e_3}{R} \theta'' \right) \left( \frac{e_2}{R} U_y'' + \frac{U_z}{R^2} + U_z'' + \frac{e_2 e_3}{R} \theta'' - \frac{e_2}{R^2} \theta \right) \\ & \left. - 2 \frac{EI_{\theta 23}}{R} \left( \frac{U_y''}{R} + \frac{R + e_3}{R} \theta'' \right) \left( \frac{R - e_3}{R} U_y'' - \frac{e_3^2}{R} \theta'' - \frac{\theta}{R} \right) \right] dx_1 \quad (3) \end{aligned}$$

또한 운동에너지  $\Pi_M$  는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Pi_M = & \frac{1}{2} \rho \omega^2 \int_0^l \left[ A \left\{ U_x'^2 + U_y'^2 + U_z'^2 + \theta^2 (e_2^2 + e_3^2) + 2\theta (e_3 U_y' - e_2 U_z') \right\} + \tilde{I}_3 \left( \frac{R - e_3}{R} U_y' - \frac{e_3^2}{R} \theta' \right)^2 \right. \\ & + \tilde{I}_2 \left( U_z' - \frac{U_x'}{R} + \frac{e_2}{R} U_y' + \frac{e_2 e_3}{R} \theta' \right)^2 + \tilde{I}_\phi \left( \frac{R + e_3}{R} \theta' + \frac{U_y'}{R} \right)^2 - 2 \frac{I_{23}}{R} U_x' \left( \frac{R - e_3}{R} U_y' - \frac{e_3^2}{R} \theta' \right) \\ & - 2 \frac{I_2}{R} U_x' \left( U_z' - \frac{U_x'}{R} + \frac{e_2}{R} U_y' + \frac{e_2 e_3}{R} \theta' \right) + 2 \tilde{I}_{23} \left( \frac{R - e_3}{R} U_y' - \frac{e_3^2}{R} \theta' \right) \left( U_z' - \frac{U_x'}{R} + \frac{e_2}{R} U_y' + \frac{e_2 e_3}{R} \theta' \right) \\ & + 2 \frac{I_{\phi 23}}{R} \left( \frac{R - e_3}{R} U_y' - \frac{e_3^2}{R} \theta' \right) \left( \frac{R + e_3}{R} \theta' + \frac{U_y'}{R} \right) + \left( \tilde{I}_o - 2 \frac{I_2 e_3}{R} - 2 \frac{I_{23} e_2}{R} \right) \theta^2 + 2 \frac{\theta}{R} (I_{23} U_z' - I_2 U_y') \\ & \left. + 2 \frac{I_{\phi 22}}{R} \left( U_z' - \frac{U_x'}{R} + \frac{e_2}{R} U_y' + \frac{e_2 e_3}{R} \theta' \right) \left( \frac{R + e_3}{R} \theta' + \frac{U_y'}{R} \right) \right] dx_1 \end{aligned} \quad (4)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \tilde{I}_2 = I_2 + \frac{I_{222}}{R}, \quad \tilde{I}_3 = I_3 + \frac{I_{233}}{R}, \quad \tilde{I}_{23} = I_{23} + \frac{I_{223}}{R} \\ \tilde{I}_\phi = I_\phi + \frac{I_{\phi \phi 2}}{R}, \quad \tilde{I}_o = I_2 + I_3 + \frac{I_{222} + I_{233}}{R} \end{aligned} \quad (5)$$

또한 외력에 의한 포텐셜에너지  $\Pi_{ext}$  는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\Pi_{ext} = \int_0^l [p_1 U_x + p_2 U_y + p_3 U_z + m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 + m_3 \omega_3 + m_\phi f] dx_1 \quad (6)$$

여기서,  $p_1, p_2, p_3$  는  $x_1, x_2, x_3$  방향에 대한 분포력(distributed forces)이고,  $m_1, m_2, m_3, m_\phi$  는 분포 모멘트(distributed moments)를 나타낸다.

앞에서도 언급했듯이, L형 단면이나 T형 단면을 갖는 곡선보의 경우 전단중심에서의 뒹함수가 무시되게 된다. 또한 비대칭 폐합단면을 가진 곡선보에서 뒹에 관련된 단면상수는 곡선보의 변형에너지에서 극단적으로 큰 값을 가진다. 결과적으로 뒹과 관계되는 변형에너지와 운동에너지의 항은 L형, T형 단면, 또는 폐합단면을 갖는 곡선보의 도심-전단중심정식화에서 영이 되는 것을 의미한다. 그러므로 전단중심에서 영이 되는 뒹함수를 가지는 박벽 개단면이나, 폐단면에 대한 곡선보의 3차원 자유진동해석과 탄성해석에 대해 탄성변형에너지와 운동에너지는 각각 식 (7)과 (8)로 매우 간단하게 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \Pi_E^* = & \frac{1}{2} \int_0^l \left[ EA \left( U_x' + \frac{U_z'}{R} - \frac{e_2}{R} \theta \right)^2 + EI_2 \left( \frac{e_2}{R} U_y'' + \frac{U_z''}{R^2} + U_z'' + \frac{e_2 e_3}{R} \theta'' - \frac{e_2}{R^2} \theta' \right)^2 \right. \\ & + EI_3 \left( \frac{R - e_3}{R} U_y'' - \frac{e_3^2}{R} \theta'' - \frac{\theta}{R} \right)^2 + GJ \left( \frac{U_y'}{R} + \frac{R + e_3}{R} \theta' \right)^2 \\ & \left. + 2EI_{23} \left( \frac{e_2}{R} U_y'' + U_z'' + \frac{U_z''}{R^2} + \frac{e_2 e_3}{R} \theta'' - \frac{e_2}{R^2} \theta' \right) \left( \frac{R - e_3}{R} U_y'' - \frac{e_3^2}{R} \theta'' - \frac{\theta}{R} \right) \right] dx_1 \end{aligned} \quad (7)$$

그리고

$$\begin{aligned} \Pi_M^* = & \frac{1}{2} \rho \omega^2 \int_0^l \left[ A \left\{ U_x^2 + U_y^2 + U_z^2 + \theta^2 (e_2^2 + e_3^2) + 2\theta (e_3 U_y - e_2 U_z) \right\} + \tilde{I}_3 \left( \frac{R - e_3}{R} U_y' - \frac{e_2}{R} \theta' \right)^2 \right. \\ & + \tilde{I}_2 \left( U_z' - \frac{U_x}{R} + \frac{e_2}{R} U_y' + \frac{e_2 e_3}{R} \theta' \right)^2 - 2 \frac{I_{23}}{R} U_x' \left( \frac{R - e_3}{R} U_y' - \frac{e_2}{R} \theta' \right) + 2 \frac{\theta}{R} (I_{23} U_z - I_2 U_y) \\ & - 2 \frac{I_2}{R} U_x' \left( U_z' - \frac{U_x}{R} + \frac{e_2}{R} U_y' + \frac{e_2 e_3}{R} \theta' \right) + 2 \tilde{I}_{23} \left( \frac{R - e_3}{R} U_y' - \frac{e_2}{R} \theta' \right) \left( U_z' - \frac{U_x}{R} + \frac{e_2}{R} U_y' + \frac{e_2 e_3}{R} \theta' \right) \\ & \left. + \left( \tilde{I}_o - 2 \frac{I_2 e_3}{R} - 2 \frac{I_{23} e_2}{R} \right) \theta^2 \right] dx_1 \end{aligned} \quad (8)$$

### 3. 유한요소 정식화

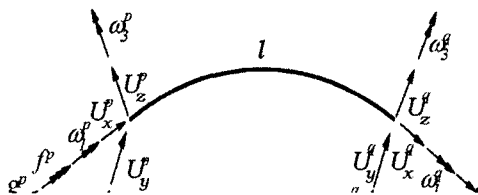
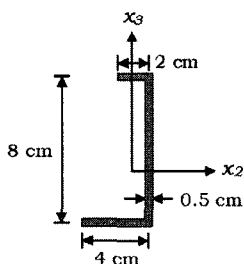


그림 3. Hermitian 곡선 보요소의 절점 변위

본 연구에서는 앞장에서 유도한 탄성변형에너지와 운동에너지에 근거하여 임의의 박벽단면을 가지는 Hermitian 곡선보요소를 사용하여 곡선보 구조의 자유진동 및 처짐해석을 수행한다. 그림 3은 뒀효과를 포함하는 박벽 Hermitian 곡선보의 절점변위벡터를 보여준다. 이 곡선보 요소는 두개의 절점과 절점당 8개의 자유도를 가지고 있다. 요소 변위파라메타  $U_x, U_y, U_z, \theta$ 는 절점변위에 대해 보간할 수 있으며, 이에 대한 자세한 내용은 Kim *et al.* (2002)에 나타나 있다.

### 4. 수치예제

본 장에서는 비대칭단면을 갖는 곡선보의 자유진동해석 및 탄성해석을 수행하고, Kim *et al.* (2002)에 의 해 제시된 해와 다른 연구자들 및 ABAQUS 쉘요소를 사용하여 구한 해와 비교한다.



(a) 비대칭 단면

$$\begin{aligned} E &= 294300 \text{ N/cm}^2, G = 112815 \text{ N/cm}^2, \rho = 0.077009 \text{ N/cm}^3, A = 7 \text{ cm}^2, J = 0.56333 \text{ cm}^4, \\ e_2 &= 1.44846 \text{ cm}, e_3 = -2.04461 \text{ cm}, I_2 = 67.04762 \text{ cm}^4, I_3 = 8.42857 \text{ cm}^4, I_{23} = 9.14286 \text{ cm}^4, \\ I_{22} &= 52.24490 \text{ cm}^4, I_{23} = -20.02721 \text{ cm}^4, I_{33} = -17.41497 \text{ cm}^4, I_{33} = -13.38776 \text{ cm}^4, I_{\theta} = 42.48654 \text{ cm}^5, \\ I_{\theta 2} &= 24.48383 \text{ cm}^5, I_{\theta 3} = -42.48654 \text{ cm}^5, I_{\theta 3} = -10.53165 \text{ cm}^5, I_{\theta \theta} = 117.44909 \text{ cm}^7, l = 200 \text{ cm} \end{aligned}$$

(b) 재료 및 단면상수

그림 4. 비대칭단면을 갖는 곡선보

끝단이 고정-자유 및 고정-고정의 경계조건을 갖는 비대칭 곡선보를 생각한다. 그림 4는 비대칭 단면의 형상과 재료 및 단면상수를 보여준다. 먼저, 보의 총길이가 일정하게 유지되고 내부각이 각각 10° 와 90°인 캔틸레버보와 양단고정보에 대하여 본 연구에서 구한 10개의 고유 진동수를 표 1과 표 2에 각각 나타내었다. 비교를 위해, 도심정식화에 의한 Kim *et al.* (2002)의 해와 상용유한요소 프로그램인 ABAQUS의 300개의 9-noded 쉘요소(S9R5)를 사용한 결과를 함께 제시하였다. 표 1과 2로부터 알 수 있듯이 두 종류의 경계조건을 갖는 비대칭 단면을 갖는 곡선보 구조에 대하여 본 연구 즉, 도심-전단중심 정식화에 의한 결과가 도심정식화를 사용한 기존의 연구결과와 일치하는 것을 알 수 있으며 ABAQUS 쉘요소를 사용한 결과와 비슷한 결과값을 나타내는 것을 볼 수 있다.

표 1. 비대칭 단면을 갖는 박벽 캔틸레버보의 고유 진동수 (rad/sec)<sup>2</sup>

$\theta_0$		진동모드									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	본 연구	0.0290	0.2686	0.5963	1.5252	5.1373	7.7437	17.386	20.622	27.159	52.343
	Kim <i>et al.</i> (2002)	0.0290	0.2686	0.5963	1.5252	5.1373	7.7437	17.386	20.622	27.159	52.343
	ABAQUS	0.0299	0.2670	0.5887	1.5265	5.0520	7.7433	16.925	20.575	26.645	52.892
90	본 연구	0.0062	0.2061	0.2901	2.0272	5.2138	7.3645	17.473	32.844	37.949	47.720
	Kim <i>et al.</i> (2002)	0.0062	0.2061	0.2901	2.0272	5.2138	7.3645	17.473	32.844	37.949	47.720
	ABAQUS	0.0060	0.2043	0.2779	2.1714	5.0293	7.1815	17.079	32.233	36.624	43.574

표 2. 비대칭 단면을 갖는 박벽 양단고정보의 고유 진동수 (rad/sec)<sup>2</sup>

$\theta_0$		진동모드									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	본 연구	0.9488	4.4120	6.3262	17.731	18.778	21.295	49.633	59.534	99.774	119.58
	Kim <i>et al.</i> (2002)	0.9488	4.4120	6.3262	17.731	18.778	21.295	49.633	59.534	99.774	119.58
	ABAQUS	0.9679	4.3543	6.4045	16.946	18.565	21.369	50.231	58.585	100.44	105.01
90	본 연구	0.7223	3.9916	13.570	31.829	35.223	41.852	71.047	80.658	138.20	148.88
	Kim <i>et al.</i> (2002)	0.7223	3.9916	13.570	31.829	35.223	41.852	71.047	80.658	138.20	148.88
	ABAQUS	0.7020	3.9088	13.388	30.838	34.855	37.792	69.831	78.659	115.15	140.53

표 3. 비대칭 단면을 갖는 양단고정된 곡선보의 횡변위, 수직변위 및 비틀각 (cm, rad.)

Mode	본 연구	도심정식화에 의한 결과
$U_y$	-1.4185	-1.4185
$U_z$	0.12054	0.12054
$\theta$	0.16893	0.16893

추가적으로 양단고정보의 중앙지점에서 비틀모멘트 1000 N·cm를 받을 경우 중앙부의 변위 및 비틀각에 대하여 본 연구에 의한 결과 및 기존의 도심정식화에 결과 값을 표 3에 함께 제시하였다. 표 3에서도 볼 수

있듯이 곡선보의 처짐 및 비틀각에 대하여 본 연구에 의한 결과 값이 도심정식화에 의한 결과 값과 일치하는 것을 볼 수 있다.

## 5. 결 론

본 연구에서는 도심-전단중심정식화에 근거하여 비대칭 개단면과 폐단면을 갖는 박벽곡선보의 자유진동해석과 탄성해석을 수행할 수 있도록 개선된 곡선보 이론을 제시하였다. 이는 기존의 도심정식화에 의하여 L형 및 T형의 단면을 갖는 곡선보 구조의 해석 시 발생하였던 추가적인 단면 상수의 계산의 복잡함을 극복하였다. 수치해석 예제를 통하여 비대칭 단면을 갖는 박벽 곡선보의 진동해석 및 처짐해석 시 본 연구결과가 기존에 제시된 도심정식화에 근거한 곡선보 이론으로부터 얻어진 결과 값과 일치하였으며 ABAQUS 쉘요소를 사용한 값과 비슷한 결과를 보이는 것을 보였다.

## 감사의 글

이 연구는 교량설계핵심기술연구단을 통하여 지원된 건설교통부 건설핵심기술연구개발사업에 의하여 수행되었습니다. 연구 지원에 감사드립니다.

## 참고문헌

- Gendy, A.S. and Saleeb, A.F., (1994) "Vibration analysis of coupled extensional/flexural/torsional modes of curved beams with arbitrary thin-walled sections", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 174, pp. 261-274.
- Gendy, A.S. and Saleeb, A.F., (1992) "On the finite element analysis of the spatial response of curved beams with arbitrary thin-walled sections", *Computers & Structures*, Vol. 44, pp. 639-652.
- Hu, N., Hu, B., Fukunaga, H. and Sekine, H., (1999) "Two kinds of  $C^0$ -type elements for buckling analysis of thin-walled curved beams", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 171, pp. 87-108.
- Kang, Y.J. and Yoo, C.H., (1994) "Thin-walled curved beams. I: Formulation of nonlinear equations", *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, Vol. 120, pp. 2072-2101.
- Kim, M.Y., Kim, N.I. and Min, B.C., (2002) "Analytical and numerical study on spatial free vibration of non-symmetric thin-walled curved beams", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 258, pp. 595-618.
- Kim, M.Y., Min, B.C. and Suh, M.W., (2000a) "Spatial stability of non-symmetric thin-walled curved beams I : analytical approach", *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, Vol. 126, pp. 497-505.
- Kim, M.Y., Min, B.C. and Suh, M.W., (2000b) "Spatial stability of non-symmetric thin-walled curved beams II : numerical approach", *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, Vol. 126, pp. 506-514.
- Tong, G. and Xu, Q., (2002) "An exact theory for curved beams with any thin-walled open sections", *Advances in Structural Engineering*, Vol. 5, pp. 195-209.
- Yang, Y.B. and Kuo, S.R., (1987) "Effect of curvature on stability of curved beams", *Journal of Structural Engineering (ASCE)*, Vol. 113, pp. 1185-1202.
- Yang, Y.B. and Kuo, S.R., (1986) "Static stability of curved thin-walled beams", *Journal of Structural Engineering (ASCE)*, Vol. 112, pp. 821-841.