

# 개구부의 위치변화에 따른 변단면 후판의 동적 안정해석

## Dynamic Stability Analysis of Tapered Thick Plate according opening position

김 일 중\* · 이 용 수\*\* · 오 속 경\*\*\*

Kim, Il-Jung · Lee, Yong-Soo · Oh, Soog-Kyoung

### Abstract

This paper has the objects of deciding dynamic instability regions of thick plates on Pasternak foundation by finite element method and providing kinematic design data for mats and slabs of building structures.

In this paper, dynamic stability analysis of tapered opening thick plate is done by use of Serendipity finite element with 8 nodes considering shearing strain of plate. To verify this finite element method, buckling stress and natural frequencies of thick pate with or without in-plane stress are compared with existing solutions.

The results are as follow that this finite element solutions with 4×4 meshes are shown the error of maximum 0.56% about existing solutions, and obtained dynamic instability graph according with variation of opening positions.

Keywords : Dynamic instability, Inplane stress, Tapered ratio, Opening

### 1. 서 론<sup>1)</sup>

판 부재는 건축, 토목, 항공, 우주, 선박 등의 구조물을 구성하는 기본 부재중의 하나이다.

판 부재는 작용하는 면내력 종류에 따라서 좌굴에 의해 발생하는 정적 불안정과 진동에 의해 발생하는 동적 불안정을 가져올 수 있다. 그 동안 대부분의 연구들은 정적인 안정과 동적인 안정을 별개의 경우로 해석을 하여왔으나 정적인 안정과 동적인 안정상태가 동시에 만족해야만 부재가 안정하다고 할 수 있다.

그동안 판의 동적안정에 관한 연구동향은 호렌버그와 커스텐(Horenberg & Kerstens, 1985)은 Modal Constraint 법을 이용하여 박판에 대해 동적 해석하였다. 사하와 칼, 다타(Saha, Kar & Datta, 1997)등은 Galerkin 법을 이용하여 비균질 지반에 지지된 판의 동적문제를 다루었고, 케릭과 세이건(M. Celik & A. Saygun 1998) 2변수지반에 지지된 판을 해석하였고 마즈나가(Matsunaga, 2000)는 탄성지반에 지지된 후판의 진동과 안정해석에 대해 발표하였다.

본 연구에서는 면내력을 받는 개구부가 있는 변단면판에 대한 동적안정해석을 행하였다. 개구부의 위치 변

\* 정회원 · 전북과학대학 건축토목계열 교수 E-mail: platepro@jbsc.ac.kr

\*\* 정회원 · 원광대학교 건축학부 교수 E-mail: struct@wonkwang.ac.kr

\*\*\* 정회원 · 원광대학교 건축학부 강의전담교수, E-mail: osk0921@dreamwiz.com

화에 따라 면내력과 진동수에 의한 영향이 고려된 판의 안정영역을 구하여 판 부재의 동적안정 설계에 도움이 되고자 한다. 동적안정 해석을 하기 위하여 판은 집수정과 같은 개구부가 있는 후판으로 모델링하였다. 지반은 탄성지반 중의 하나인 Pasternak 지반으로 하였으며, Serendipity 유한요소를 이용하여 후판의 동적 안정해석을 행하였다.

본 연구는 탄성지반위에 놓인 바닥 구조물의 동적안정 해석시 필요한 불안정 영역들을 결정하고 지반의 특성에 따른 판의 거동을 파악함으로써 건축물의 기초 구조 및 바닥슬래브의 효율적인 설계를 하는데 그 목적이 있다.

## 2. 유한요소 해석

### 2-1. 탄성지반

구조물을 지지하는 지반은 탄성매개체로 고려하여 일반적으로 1변수(One Parameter) 지반과 2변수(Two Parameter) 지반으로 모델링 할 수 있다. 2변수 지반 모델 중 하나인 Pasternak 지반은 Winkler 지반층 위에 전단층을 둠으로써 인접 지반간의 상호 연관성을 충족시키는 지반 모델이다. 본 연구에서는 실제 지반에 가까운 Pasternak 지반 모델을 사용하여 후판의 안정해석을 행하였다.

### 2-2 변단면 후판

장방형 후판의  $x$ 축 두께만 선형으로 증가하는 변단면 후판을 고려하면 판의 두께는 다음과 같다.

$$h(x) = h_0 \left( \alpha \frac{x}{a} + 1 \right) \tag{1}$$

여기서,

$$\alpha = \frac{h_1 - h_0}{h_0} : \text{변단면률}$$

$$h_0 : x=0 \text{일 때 판두께}$$

$$a : \text{판의 } x \text{축 방향 길이}$$

$$h_1 : x=a \text{일 때 판두께}$$

변단면 후판의 휨 강성은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$D = D_0 \left( \alpha \frac{x}{a} + 1 \right) \tag{2}$$

$$\text{여기서, } D_0 = \frac{E h_0^3}{12(1-\nu)}$$

### 2-3. 강성 행렬 구성

판요소의 변형에너지, 운동에너지 및 외력이 한 일을 구하고 가상일의 원리를 이용하여 이들 변분을 썸으로 놓아 고유치 방정식을 얻는다.

판요소 해석을 위해 8절점 Serendipity 요소계를 사용하며, 임의 점의 변위와 회전 변위의 관계를 행렬 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} = [N] \{ \delta_e \} \tag{3}$$

여기서,  $w$  : 판요소의 수직변위,  $\theta_x, \theta_y$  : 판요소의  $x, y$ 방향 회전변위,

$$\{ \delta_e \} = [ w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ w_2 \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ \dots \ w_8 \ \theta_{x8} \ \theta_{y8} ]$$



여기서

$[K_{GS}]$ : 평균응력  $\sigma_0$  에 의한 기하강성행렬  $[K_{Gt}]$ : 주기응력 진폭  $\sigma_t$  에 의한 기하강성행렬

식(8)의 해는  $\alpha(t) = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \left( a_k \sin \frac{k\omega}{2} t + b_k \cos \frac{k\omega}{2} t \right)$  로 가정할 수 있으므로, 이 해를 식(8)에 대입하고 계수  $a_k$  와  $b_k$  에 관한 항을 정리하여  $a_k$  와  $b_k$  에 의한  $k \times k$  행렬식이 짝이 되어야하므로 일차 근사화하면 다음 식이 된다.

$$\left\{ [K_E] - \alpha \sigma_{cr} [K_{GS}] \pm \frac{1}{2} \beta \sigma_{cr} [K_{Gt}] - \frac{\omega^2}{4} [K_M] \right\} = 0 \tag{9}$$

평균응력과 응력진폭의 영향을 동일하게 취하여  $[K_{GS}] = [K_{Gt}] = [K_G]$  로 하면 식(9)는 다음과 같다.

$$\left\{ [K_E] - \left( \alpha \pm \frac{1}{2} \beta \right) \sigma_{cr} [K_G] - \frac{\omega^2}{4} [K_M] \right\} = 0 \tag{10}$$

식(10)에서 정적응력 계수비  $\alpha$  와 동적응력계수비  $\beta$  값에 따른 면내응력 진동수와 판의 진동수비를 구하여 동적 안정의 영역을 얻을 수 있다.

### 3. 비교 분석 및 적용

본 연구에서는 2장의 이론을 근거로 개발된 동적안정프로그램을 이용하여 좌굴응력, 고유진동수 및 정면내 응력을 받는 경우 고유진동수를 구하고, 수렴성 및 정밀도를 기존해와 비교한다.

#### 3-1 비교분석

유한요소 해석 프로그램을 개발하고 기존 이론해와 비교하여 해석의 정확성을 검토하였다.

표 1은  $SFP$ 가 10일 때  $WFP$ 의 변화에 따라 평판의 고유진동수를 산출하여 기존해와 비교한 것으로 최대 0.28%이내의 오차를 보였다.

표 1. Pasternak지반에 지지된 평판의 고유진동수 비교  $(\lambda^2 = \alpha \alpha^2 \sqrt{\rho/D_0})$

WFP	Reference 3)	This Study	Error(%)
0	22.21	22.25	0.18
10	22.41	22.47	0.25
$10^2$	24.27	24.31	0.15
$10^3$	38.06	38.09	0.08
$10^4$	99.45	99.66	0.21

표 2. 변단면 후판의 고유진동수 비교  $(\lambda^2 = \alpha \alpha^2 \sqrt{\rho/D_0})$

Taper Ratio	Reference <sup>3)</sup>	This Study	Error(%)
0.2	21.59	21.59	0.01
0.4	23.51	23.45	0.19
0.6	25.38	25.29	0.33
0.8	27.23	27.08	0.56

표 3은 지반이 없는 상태에서의 변단면 후판의 Taper Ratio의 변화에 따른 고유진동수를 유한요소 프로그램해와 참고 문헌해와 비교한 것이다. 이 경우 최대 0.56%의 오차를 나타내어 본 연구를 위한 신뢰성을 확인할 수 있었다.

표 4. 정방형 후판의 좌굴계수 비교

$h/b$	좌굴응력 $\sigma_{cr}$		좌굴계수 $k$	
	이론해	본 연구	본 연구	참고문헌(8)
0.001	759.200	761.920	4.0143	3.997
0.002	3036.800	3029.4490	3.9903	3.990
0.05	18980.008	18689.620	3.9388	3.937
0.1	75920.034	71742.340	3.7799	3.787
0.2	303680.135	247430.800	3.2591	3.264

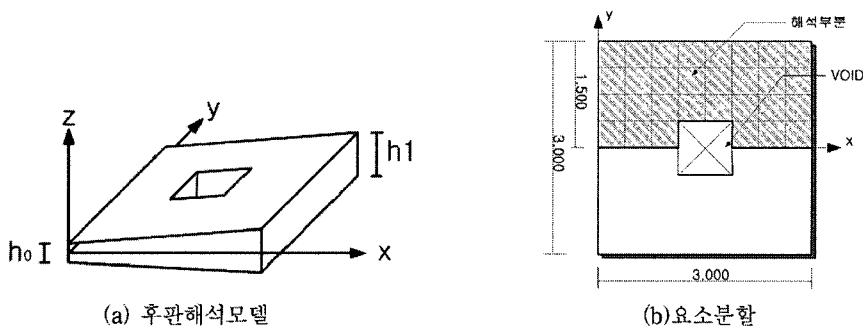
표 4에서 좌굴계수  $k$ 를 기존해와 본 해석해와 비교한 결과 요소분할 4x4의 유한요소를 사용할 경우 기존해와 0.43%의 오차를 나타내어 높은 정밀도를 나타내고 있다. 표 5는 면내응력을 후판에 가했을 경우 고유진동수비를 구하여 기존해와 비교한 결과로 응력비 0.8인 경우 0.05%의 오차를 보여 높은 정밀도를 가짐을 알 수 있다.

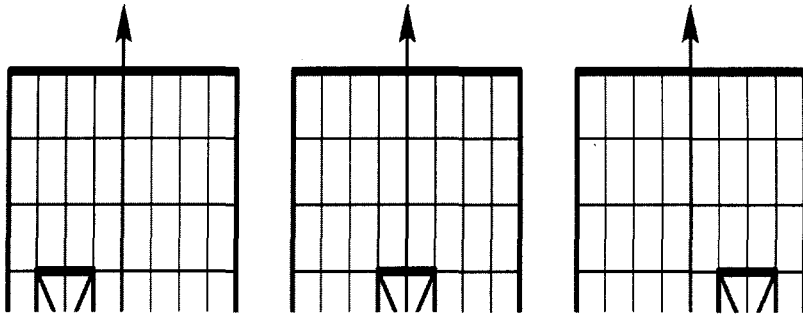
표5. 정면내응력을 받는 후판의 고유진동수( $\bar{\omega}/\omega$ ) 비교

요소분할수	$\sigma_0/\sigma_{cr}$				
	0	0.2	0.4	0.6	0.8
4x4	1	0.8944	0.7746	0.6324	0.4470
참고문헌(8)	1	0.8944	0.7746	0.6325	0.4472

### 3-2. 해석 예제

본 연구에서 개발한 프로그램을 이용하여 그림1에서 보는 바와 같이 탄성지반에 지지된 개구부를 갖는 변단면 후판의 동적 안정영역을 결정한다.





(c) 개구부 위치

그림1. 유공 변단면 장방형 후판 해석예제모델링

유한요소법을 적용한 해석을 위한 제원은 다음과 같다.

탄성계수(E) :  $2.1 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$

포와송비( $\nu$ ) : 0.167

판 지지상태 : 4변 단순지지

판의 체적당 질량( $\rho$ ) :  $2.448 \times 10^{-6} \text{ kg/cm}^3$

판의 크기 : 300cm × 300cm

▨ : 동적불안정영역    □ : 동적안정영역

판의 동적안정문제는 좌굴응력과 정응력계수  $\alpha$ , 동응력계수  $\beta$ 를 적용하고 고유값문제를 풀므로써  $\alpha, \beta$  및 후판의 고유진동수에 대한 비  $\bar{\omega}/\omega_n$ 의 관계를 곡선으로 표시하여 불안정영역의 경계를 나타내게 된다.

그림2~4는 면내응력을 받는 변단면 유공 후판의 동적안정 해석을 한 것으로 그래프내 곡선은 동적안정과 불안정영역의 경계를 나타낸다. 각 그래프에서 5개로 분리된 곡선군은 좌측 수직축으로부터 1차 진동 mode에서 5차 진동 mode를 나타낸 것이다. 판에 면내응력이 가해진 경우 해당되는 변수를 찾아 그래프상의 점의 위치로 후판의 안정상태 혹은 불안정상태를 규명할 수 있다.

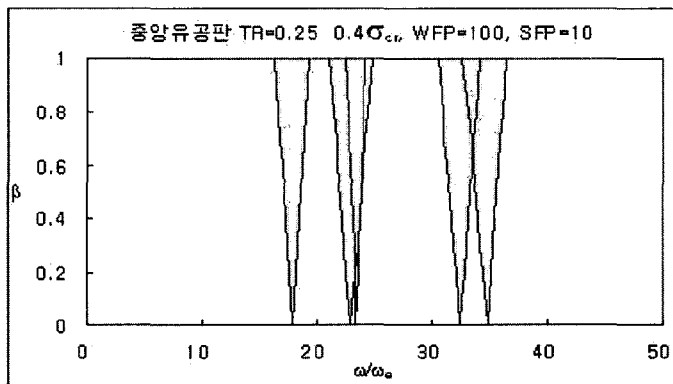


그림2. 중양유공판의 동적안정

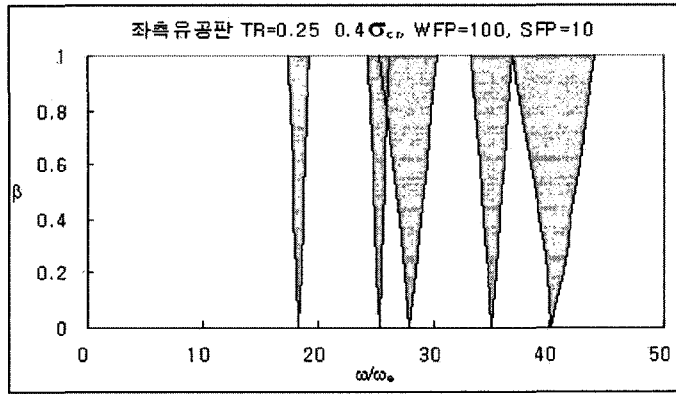


그림3. 좌측유공판의 동적안정

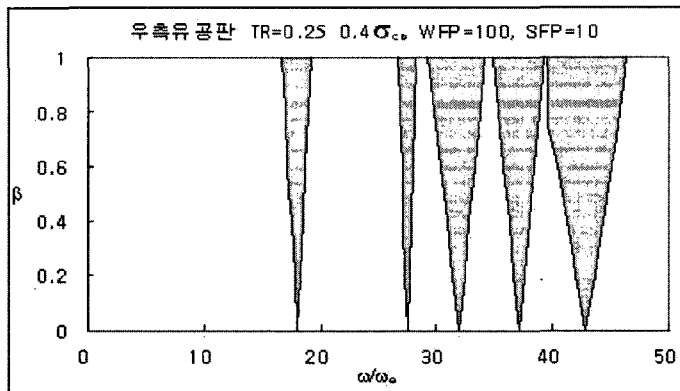


그림4. 우측유공판의 동적안정

그림2~4는 변단면률이 0.25, 면내응력은  $0.4\sigma_c$ , Winkler 지반 파라미터는 100, 전단 지반 파라미터는 10인 변단면 후판에 개구부의 위치 변화에 따라 각각의 동적안정영역을 표시하였다.

그림2는 개구부가 정중앙에 위치한 경우이며, 그림3은 개구부가 좌측에 위치한 경우로 개구부가 변단면판의 두께의 얇은 부분에 위치하였다. 개구부의 위치가 중앙에서 판의 두께가 얇은 부위로 이동함에 따라 각 mode의 불안정영역이 세로축에서 멀어졌으며, 각 mode의 불안정영역 또한 확대됨을 볼 수 있다.

그림4는 개구부가 우측에 위치한 경우로 개구부가 변단면판의 두께가 두꺼운 곳에 위치하였다. 개구부가 중앙에 위치한 경우에 비해 개구부가 변단면판의 두께가 두꺼운 부분에 위치한 경우 각 mode의 불안정영역은 세로축에서 멀어졌으며, 각 mode의 불안정영역이 확대되었고 2차와3차, 4차와 5차 mode 사이의 간격이 더 벌어져 불안정 영역이 확대됨을 볼 수 있다.

#### 4. 결 론

본 연구에서는 탄성지반 위에 놓인 개구부를 갖는 변단면 후판의 개구부 위치 변화에 따라 동적 안정 해석을 통해 변단면판의 불안정영역을 결정하였다.

그 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 변단면 후판의 좌굴응력, Pasternak 지반에 지지된 평판의 고유진동수, 면내응력이 가해진 경우 고유진동수를 구하여 기존해와 비교해 본 결과 각각 0.56%, 0.25%, 0.05%의 적은 오차를 보여 본 해석을 위한 프로그램의 신뢰성을 얻을 수 있었다.
2. 변단면판에 있는 개구부의 위치가 중앙에서 좌측이나 우측으로 이동할 경우 각 진동 mode는 세로축에 멀어지고, 각 mode의 불안정영역이 확대됨을 알 수 있다.

#### 참고문헌

- J.A.G. Horenberg and J.G.M. Kerstens (1985) Transverse Vibrations of Rectangular Plates on Inhomogeneous Foundation Part II : Model Constraint Method", J. of Computers and Structures, Vol.101, pp317~32
- K.N. Sahr, R.C. Kar and P.K. Datta (1997) Dynamic Stability of a Rectangular Plate on Non-homogeneous Winkler Foundation, J. of Computers and Structures, Vol.63, pp1213~1222
- M. Celik and A. Saygun (1998) A Method for the Analysis of Plates on a Two-parameter Foundation, J. of Computers and Structures, Vol.36, pp2891~2915,
- H. Matsunaga (2004) Vibration and Stability of Thick Plates in Elastic Foundation", J. of Engineering Mechanics, Vol.126, pp27~34
- C. Mei (1978) Large Amplitude Vibrations of Plates with Initial Stresses", J. of Sound and Vibration, Vol.60, pp461~464
- O. K. Bedair (1997), The Elastic Behaviour of Multi-Stiffened Plates Under Uniform Compression," Thin-Walled Structure Vol. 27
- 이병구 (1994) 전단층을 갖는 탄성지반위에 놓인 보의 자유진동 해석, 한국전산구조공학회 논문집 6(3), 1994
- 이용수, 김일중, 오숙경 (2003) 비균질 Pasternak 지반위에 놓인 정방형 후판의 동적안정해석", 대한건축학회 논문집 19권 4호(통권174)