

임의 단면형상을 갖는 보의 고유치 해석에 관한 연구

Study of Finite Element Eigen Analysis of Beam With Arbitrary Cross Section

박근만* · 조진래** · 정의봉*** · 배수룡****

Park, Keun-Man · Cho, Jin-Rae · Jung, Weui-Bong · Bai, Soo-Ryong

ABSTRACT

The use of 3-D finite elements for the eigen analysis of beam-like structures with arbitrary section shape may not be practical in certain cases, from the aspect of CPU time. In this connection, this paper presents a systematic algorithm for decomposing an arbitrary section into finite number of basic ones and computing essential sectional quantities required for the eigen analysis using the beam theory. The numerical accuracy of the proposed method is assessed from the comparison with the 3-D finite element method.

Keywords: beam-like structure, arbitrary section shape, section decomposition, beam theory, finite eigen analysis

1. 서론

현대에 이르러 구조물들이 복잡해지고 보다 대형화됨에 따라 과거의 정적 설계만으로는 더 이상 구조물의 사용성과 안정성을 확보하기 힘들어졌다. 대형화된 구조물에 있어서 지진이나 바람을 포함한 동적인 영향이 중요한 설계변수로 인식되고 있으며 이를 고려한 동적 해석이 필수적이게 되었다.

동적 해석을 수반하는 많은 공학문제에서 시스템의 고유치와 고유벡터를 구하는 고유치 문제를 접하게 된다. 그러나 고유치 해석을 하는 것은 정적 해석을 하는 경우보다 계산량이 매우 많기 때문에 많은 연구자들이 고유치를 구하는 효율적인 알고리즘을 개발하기 위해 노력해 왔다.

해석기법의 발전으로 단일 보로 이루어진 구조물의 경우에는 비교적 간단한 수치기법을 통해 고유치 해석을 할 수 있는데 이때 단면적과 관련된 정보들이 입력으로 사용된다. 이 부분은 수동적으로 값들을 계산하여 입력하게 되는데, 단면이 일정하지 않은 다각형의 형태를 이룰 경우 그 과정이 비교적 번거롭게 된다. 이러한 계산과정을 자동으로 연산하도록 프로그램을 구성하면 입력시 필요한 값들을 계산하는 번거로움을 없애고, 보다 복잡한 임의의 단면형상의 고유치 해석에 있어서 편리함을 제공할 것이다.

* 학생회원 · 부산대학교 기계설계학과 석사과정

** 정회원 · 부산대학교 기계공학부 교수

*** 부산대학교 기계공학부 교수

**** 국방과학연구소

본 논문에서는 임의 단면형상을 간단히 좌표값의 입력으로 처리하도록 하였고, Fortran을 기반으로 하여 기본적으로 Lanczos method 및 Jacobi method으로 고유치 해석을 수행하였으며, 산출한 수치 근사해를 검증된 상용 프로그램인 ANSYS의 3차원 모델에 대한 결과값과 비교하여 타당성 여부를 검증하였다. 또한 고유치 해석에서 유용한 값은 대부분 저차이며, 저차의 고유치의 경우 비틀림(warping)과 관련된 부분은 거의 나타나지 않으며 이를 근거로 비틀림은 무시하고 해석을 수행하였다.

2. 변분 정식화

2.1. 강성행렬의 유도

비틀림과 축 방향 변형을 함께 고려한 3차원 보 요소의 강성행렬을 구하기 위해서는 다음의 3가지 지배 방정식들을 사용하게 된다.

$$\begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}) &= q(x, t) \\ \rho A dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= (P + \frac{\partial P}{\partial x} dx) - P \\ U &= \frac{1}{2} \int_{-a}^a \int_A (\tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz}) dA dx \end{aligned} \quad (1)$$

식 (1)은 각각 굽힘 변형 방정식, 뉴턴(Newton) 방정식 및 변형률 에너지 방정식이고 Galerkin method에 적용시켜 변분 정식화하면 각각의 식들로부터 자유도 성분에 따른 각각의 요소강성행렬 식들이 식 (2)와 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} [K_1^e] &= \int_{-1}^1 [B]^T EI [B] d\xi \\ [K_2^e] &= \frac{2AE}{L_e} \int_{-1}^1 \begin{pmatrix} M_1' \\ M_2' \end{pmatrix} (M_1' \ M_2') d\xi \\ [K_3^e] &= GJ \int_{-1}^1 \begin{pmatrix} M_1' \\ M_2' \end{pmatrix} (M_1' \ M_2') d\xi \end{aligned} \quad (2)$$

식 (2)에서 K_1^e 의 $[B] = [N_1'', N_2'', N_3'', N_4'']$ 이다. 형상함수 $N_i(\xi)$ 는 C^1 을 만족해야하므로 Hermitian shape function을 사용하고, $M_i(\xi)$ 는 C^0 만을 만족하면 되므로 Lagrange shape function을 사용하였다.

세 축의 방향 변위는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \frac{\partial \theta_x(x)}{\partial x} \psi(y, z) \\ v(x, y, z) &= -\theta_x(x) z \\ w(x, y, z) &= \theta_x(x) y \end{aligned} \quad (3)$$

이를 기반으로 각각의 자유도에 따른 요소강성행렬을 구하면 식 (4)와 같다.

$$\begin{aligned}
 [K_1^e] &= \frac{EI}{l_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_e - 12 & 6l_e \\ 6l_e & 4l_e^2 - 6l_e & 2l_e^2 \\ -12 & -6l_e & 12 & -6l_e \\ 6l_e & 2l_e^2 - 6l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix} \\
 [K_2^e] &= \frac{AE}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\
 [K_3^e] &= \frac{GJ}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4}$$

식 (4)에서 l_e 는 요소의 축 방향 길이이며, 세 요소행렬의 조합으로 최종적으로 6자유도를 가지는 보요소의 12×12 요소강성행렬이 유도되어 진다.

2.2. 질량행렬의 유도

질량행렬을 유도하기 위해서는 강성행렬을 유도하는 데에 사용된 식 (1)중에서, 회전과 연관된 요소질량행렬을 유도함에 있어서 변형률 에너지 방정식 대신 다음의 운동 에너지 방정식을 사용하게 된다.

$$T = \frac{1}{2} \int_{-a}^a \theta_x^2 \rho \cdot I_x \cdot dx \tag{5}$$

식 (1)에서의 굽힘 변형 방정식, 뉴턴(Newton) 방정식과, 식 (5)의 운동 에너지 방정식으로부터 각 요소질량행렬 식들이 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned}
 [M_1^e] &= \int_{-1}^1 \rho A [H]^T [H] d\xi \\
 [M_2^e] &= \frac{\rho A l_e}{2} \int_{-1}^1 \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} (M_1 \ M_2) d\xi \\
 [M_3^e] &= \frac{1}{2} \rho I_x l_e \int_{-1}^1 \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} (M_1 \ M_2) d\xi
 \end{aligned} \tag{6}$$

식 (6)에서 M_1^e 의 $[H] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4]$ 이고, 요소강성행렬을 구할 때와 동일한 형상 함수를 사용하여 각 각의 요소질량행렬을 구할 수 있다.

$$[M_1^e] = \frac{\rho A l_e}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l_e & 54 & -13l_e \\ 22l_e & 4l_e^2 & 13l_e & -3l_e^2 \\ 54 & 13l_e & 156 & -22l_e \\ -13l_e & -3l_e^2 & -22l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 [M_2^e] &= \frac{\rho A l_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\
 [M_3^e] &= \rho I_x l_e \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 6 \\ 1 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{7}$$

여기서도 역시 l_e 는 요소의 축 방향 길이이며, 마찬가지로 식 (7)의 세 요소행렬의 조합으로 최종적으로 6자유도 보요소의 12×12 요소질량행렬을 유도할 수 있다.

3. 고유치 해석

3.1. 고유치 해석

하중이 작용하지 않는 비 감쇠 자유진동계에 있어서 운동방정식은 다음과 같이 표현되어 진다.

$$[M]\ddot{\tilde{x}} + [M]\dot{\tilde{x}} = \tilde{0} \tag{8}$$

식 (8)의 해를 식 (9)와 같이 가정한다.

$$x_i = X_i T(t) \quad , \quad \tilde{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \tag{9}$$

식 (9)에서 \tilde{X} 는 주어진 계에서 그 형상계의 진동형이 되며, 가정된 해를 식에 대입하여 n개의 스칼라 형태로 분리된 방정식을 쓰면 다음과 같다.

$$\left(\sum_{j=1}^n m_{ij} X_j \right) \ddot{T}(t) + \left(\sum_{j=1}^n k_{ij} X_j \right) T(t) = \tilde{0} \tag{10}$$

식 (10)을 정리하면 식 (11) 관계식을 얻게 된다.

$$-\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \frac{\left(\sum_{j=1}^n k_{ij} X_j \right)}{\left(\sum_{j=1}^n m_{ij} X_j \right)} \tag{11}$$

식 (11)의 좌변은 지수 i 에 무관하고 우변은 시간 t 에 무관하므로 양변은 상수로써 서로 같아야 한다. 이 상수를 ω^2 으로 가정하면 식 (12)와 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) &= 0 \\ \sum_{j=1}^n (k_{ij} - \omega^2 m_{ij}) X_j &= 0 \\ [[K] - \omega^2 [M]] \tilde{X} &= \tilde{0} \end{aligned} \tag{12}$$

여기서 고유치 또는 특성치 ω 는 계의 고유진동수이고, 식 (12)에 $\lambda = \frac{1}{\omega^2}$ 를 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} [D] &= [K]^{-1} [M] \\ [D] \tilde{X} &= \tilde{\lambda} \tilde{X} \end{aligned} \tag{13}$$

3.2 Lanczos method

Lanczos method는 Subspace 반복법과 더불어 몇 개의 고유치만 구할 경우 아주 강력한 방법으로 알려져 있고, 원하는 차수의 고유치만을 구할 수 있는 장점이 있다. 식 (13)에서 동행렬 $[D]$ 의 첫 열을 이용해 다음과 같이 q_1 벡터를 생성하고, 동행렬과 q 벡터의 곱을 통해 상수 α 를 결정한다.

$$\begin{aligned} q_1 &= r_0 / \|r_0\| \\ \alpha_k &= q_k^T D q_k \end{aligned} \tag{14}$$

β_0 는 1부터 시작되고 β 를 결정하기 위해 식 (15)와 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} r_k &= (D - \alpha_k I) q_k - \beta_{k-1} q_{k-1} \\ \beta_k &= \|r_k\| \end{aligned} \tag{15}$$

반복시킬 q 벡터와 최종 행렬은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} q_{k+1} &= r_k / \beta_k \\ Q^T D Q &= T \end{aligned} \tag{16}$$

여기서, $Q = [q_1, q_2, \dots, q_n]$ 이고 최종 행렬 $[T]$ 는 α 와 β 의 성분으로만 이루어진 삼중 대각행렬이 된다.

3.3 Jacobi method

Jacobi method는 행렬의 고유치와 고유벡터를 한꺼번에 구할 수 있는 방법이다.

식 (16)의 삼중 대각행렬 $[T]$ 는 i, j 행과 열의 회전 변환 행렬 $[R]$ 에 의해 다음과 같이 반복된다.

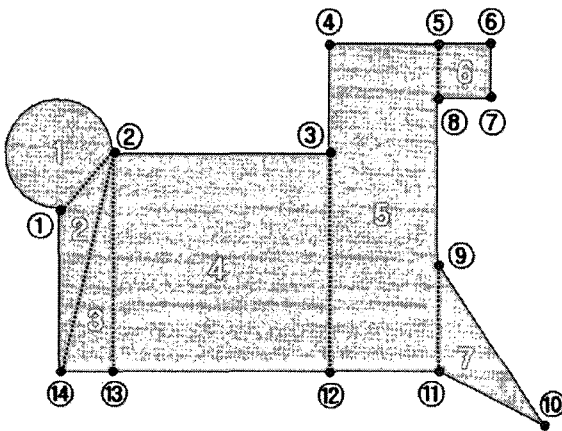
$$[T]_{k+1} = [R]_k^T [T]_k [R]_k \tag{17}$$

구하고자 하는 고유 벡터는 다음과 같다.

$$\{\vec{X}\} = [R]_1 [R]_2 \cdots [R]_k \quad (18)$$

4. 수치 예제

임의 단면형상을 처리하기 위해서 단면의 각 지점의 좌표값을 입력으로 하여 연산을 수행하게 된다. 전체 단면을 구성하는 기본단면은 크게 원, 호(segment), 삼각형, 사각형의 네 가지로 정의하였다.



Total Point				
14				
Point Number	X_Coordinate	Y_Coordinate		
1	0.00	0.00		
2	0.01	0.04		
3	0.05	0.04		
4	0.05	0.06		
5	0.07	0.04		
6	0.08	0.06		
7	0.08	0.05		
8	0.07	0.05		
9	0.07	0.02		
10	0.09	-0.01		
11	0.07	0.00		
12	0.05	0.00		
13	0.01	0.00		
14	0.00	0.00		
Total Area				
7				
Area Number	Para_1	Para_2	Para_3	Para_4
1	3	1	2	0.01
2	4	2	14	1
3	4	14	2	13
4	2	2	3	12
5	2	4	5	11
6	2	5	6	7
7	4	9	10	11

그림 1 임의 단면형상 및 입력 텍스트

그림 1에서와 같이 전체 단면을 네 가지의 기본단면 요소들로 나누어 각 기본단면들의 번호 및 꼭지점의 번호와 좌표값, 그리고 각 부분단면을 정의하는 번호를 입력한다. 1차적으로 기본 부분단면의 면적과 면적중심 그리고 각 면적중심에 대한 면적관성모멘트를 계산하게 되고, 이를 토대로 전체 면적과 전체 면적중심이 계산된다. 그 후에 전체 면적중심에 대한 임의 단면의 전체 면적관성모멘트를 계산한다. 그림 1의 단면형상이 수치 예제에 사용되었고 오른쪽 텍스트에 나타난 좌표값은 미터(m)단위로 입력되었으며, 한쪽이 고정된 cantilever 보에 대해 고유치 해석을 수행하였다. 표 1은 cantilever 보의 물성 정보이고 면적과 관련된 물성치는 프로그램상에서 계산된 값들이다.

표 1 물성 정보

E	v	Density	Area	I _x	I _y	I _p	Length
210 GPa	0.3	7860 kg/m ³	0.003736 m ²	0.96750×10 ⁻⁶ m ⁴	0.21864×10 ⁻⁵ m ⁴	I _x + I _y	5 m

고유 주파수와 고유모드 추출을 위해 Lanczos method와 Jacobi method를 사용하였고, 해석 결과의 신뢰성 확보를 위해 총 30개의 고유 주파수 및 고유모드를 추출하여 최저차 6개의 결과를 비교 분석하였다.

그림 2와 그림 3은 각각 본 연구에서 개발한 프로그램으로 구한 고유모드와 ANSYS 3차원 모델의 고유모드 형상을 나타낸 것이며, 상단 좌측부터 하단 우측까지 1차에서 6차까지의 고유모드 형상이다.

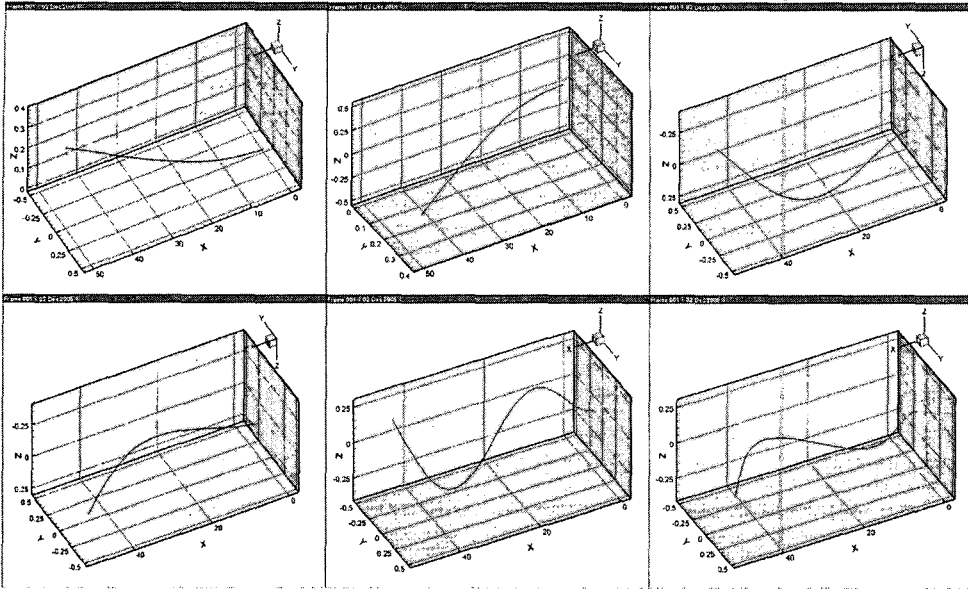


그림 2 본 연구에서 개발한 프로그램에 의한 고유모드

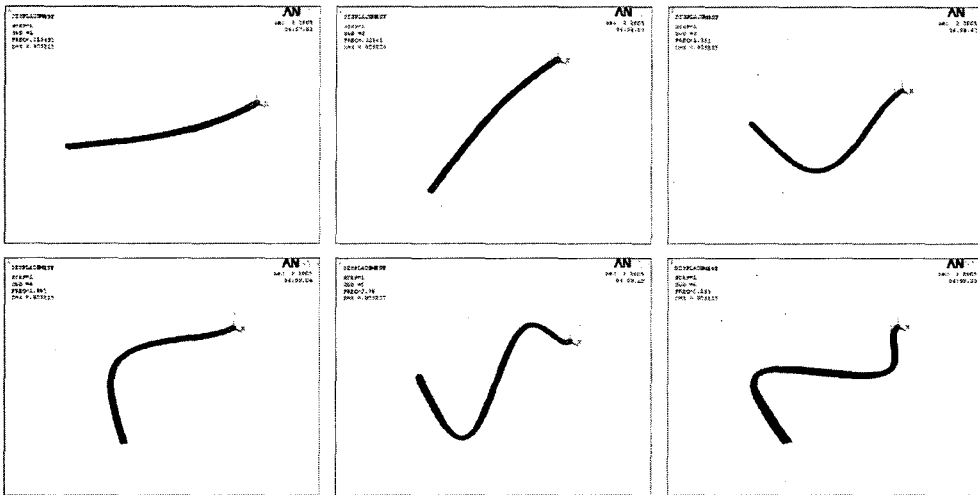


그림 3 ANSYS 3차원 모델의 고유모드

그림 2와 그림 3에서 보는 것과 같이 1차에서 6차까지 저차의 고유모드에서 ANSYS 3차원 모델과 잘 일치하는 결과를 얻을 수 있었고, 10차 고유모드까지도 비교적 잘 일치함을 확인할 수 있었다. 1차에서 6차까지의 고유 주파수의 비교는 표 2를 통해 확인할 수 있다.

표 2 고유 주파수 비교

(단위:Hz)

	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
ANSYS	2.1456	3.0031	13.440	18.803	37.597	52.521
Present	1.8619	2.7991	11.679	17.541	32.673	49.117

표 2에서 보여지는 바와 같이 고유 주파수에서는 어느 정도의 오차가 발생하는 것을 확인 할 수 있었다. 이는 보 이론(beam theory)에서는 단순히 단면의 면적과 면적관성모멘트만이 반영되어 단면의 형상과 관련된 부분에서 발생하는 오차로 여겨진다. 하지만 오차의 정도가 심각하게 크게 발생하지 않고 6차까지 오차가 증가하지 않고 일정한 정도를 유지하는 것을 감안했을 때 동적 거동을 파악하기에는 큰 무리가 없을 것으로 판단된다.

5. 결론

본 논문에서는 임의 단면형상 보의 유한요소 해석을 위해 단면의 좌표값을 통해 자동으로 면적과 관련된 물성을 산출하도록 하였다. 임의 단면형상의 처리 및 고유치 해석을 위해 포트란 프로그램을 사용하여 작성하였으며, 상용 유한요소 프로그램인 ANSYS의 3차원 모델과 결과를 비교하여 그 타당성을 검증하였다. 수치 실험을 위해서는 기존의 보 단면형상과는 달리 다각형의 단면형상을 가지는 cantilever 보에 대해 고유치 해석을 수행하였고, 참고해와 비교했을 때 6차까지의 저차에서 비교적 잘 일치하는 결과를 얻을 수 있었다.

본 논문에서 사용된 임의 단면형상을 처리하는 방법은 형상에 대한 면적과 관련된 물성을 산출함에 있어서 간단하고 편리하게 적용할 수 있고, 수치 예제에 사용된 단면형상보다 복잡한 형상에 대해서도 단순히 좌표값에 대한 정보만으로 쉽게 적용이 가능할 것이다.

한편, 본 논문에서는 비틀림에 대한 등가 단면계수는 도입하지 않았으며, 향후 추가적인 연구를 통해 이를 보완한다면 광범위한 이종재료 보의 해석에 활용할 수 있을 것이다.

후기

본 연구는 (국방부가 지정한) 수중운동체 특화연구센터의 지원으로 수행되었습니다.

참고문헌

- 조흥기 (2001) Natural Frequency and Mode Shape Sensitivity of Damped Systems, KAIST.
- Bathe, K.J. (1982) Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice Hill.
- Thomas J.R. Hughes (1987) The Finite Element Method, Prentice Hill, pp.582~590.
- Joe D. Hoffman (2001) Numerical Method for Engineering and Scientist, Marcel Dekker, pp.59~63.
- Saeed Moaveni (2003) Finite Element Analysis, Prentice Hill, pp.212~225.
- 최창근 (2002) 유한요소법, 테크노 프레스, pp.141~164.
- Maurice Petyt (1990) Introduction to Finite Element Vibration Analysis, Cambridge University Press.