

연약지점을 갖는 유체에 잠긴 기둥의 진동 특성

Vibration Characteristics of Immersed Column with Soft Base

오 상 진* · 모 정 만**
Oh, Sang-Jin · Mo, Jeong-Man

ABSTRACT

This paper deals with the free vibrations of immersed columns with soft base. The support condition of the column is represented by using a translational spring and a rotational spring. The eccentricity and rotatory inertia of the concentrated mass at the top are taken into account. In the governing equation for the free vibration of column, the density of immersed part was modified to account for the added fluid mass. The governing differential equations are solved numerically using the corresponding boundary conditions. Numerical results are presented to show the effects on the natural frequencies of non-dimensional system parameters: the mass density ratio of fluid to column, the ratio of fluid depth to span length, the ratio of tip mass to total column mass, the dimensionless mass moment of inertia, the eccentricity, the translational spring parameter, and the rotational spring parameter.

Keywords: *immersed column, soft base, free vibration, natural frequency.*

1. 서 론

해양 또는 저수지 등에 축조된 구조물에는 파압, 풍압 등 다양한 형태의 동하중이 작용한다. 동하중을 받는 이러한 구조물의 동적응답 해석시 또는 설계과정에서는 대상구조에 대한 정확한 고유진동수 및 진동형의 계산이 필요하다(McClelland 등, 1986). 해양 등에 축조된 탑이나 말뚝은 유체에 잠긴 기둥으로 모형화할 수 있으며(Chang 등, 1989; Han 등, 1994; Xing 등, 1997), 이들 구조는 수심이 변화함에 따라 유체에 잠긴 정도가 달라진다. 따라서 자유진동 특성을 지배하는 구조물의 체원 이외에도 유체 높이의 변화에 따른 진동 특성의 변화가 발생한다. 이와 관련한 연구로서 Chang과 Liu(1989)는 유한요소법을 이용하여 유체에 잠긴 기둥의 고유진동수를 산출하였다. Xing 등(1997)은 기둥-유체의 동적거동에 대한 지배방정식을 변분법으로 해석하여 고유진동수 방정식을 유도하였다.

Chan과 Zhang(1995)은 일부가 수으로 채워진 캔틸레버형 관의 자유진동에 관한 연구에서 수을 추가질량으로 모형화하여 대상구조의 자유진동에 대한 정확해를 산출하고, 실험결과와 비교하였다. Chan 등(1996)은 추가 분포질량이 작용하는 단순지지 보의 자유진동에 대한 정확해를 산출하고, 분포질량의 작용영역에 따른

* 정희원 · 남도대학 토목환경과 부교수 E-mail: sjoh@namdo.ac.kr

** 전주농림고등학교 토목공학과 교사

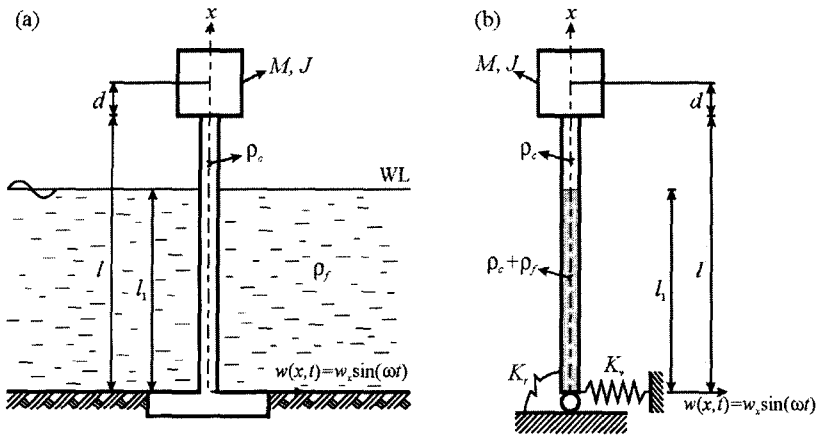


그림 1 (a) A partially immersed column with soft base; (b) its analytical model

고유진동수 및 진동형의 변화를 고찰하였다. 그리고 Uscilowska와 Kolodziej(1998)는 기둥질량에 유체질량을 추가함으로써 유체에 잠긴 기둥의 자유진동에 대한 지배방정식을 수정하여 대상구조의 고유진동수 및 진동형을 산출하였다.

이러한 배경으로 본 연구에서는 연약지점을 갖는 유체에 잠긴 기둥의 자유진동 특성을 고찰하고자 한다. 이를 위해 대상 기둥은 회전 스프링과 횡방향 스프링으로 지지된 것으로 모형화하였으며, 문헌(Chan 등, 1995; Chan 등, 1996; Uscilowska 등, 1998)에서와 같이 유체에 잠긴 부분은 기둥질량에 유체질량을 추가하여 수정한 기둥의 자유진동에 대한 지배 미분방정식을 이용하였다. 대상구조에 대한 지배 미분방정식은 수치적분기법과 시행착오적 행렬값 탐사법이 결합된 수치해석방법으로 해석하였다. 수치해석 예로서 다양한 제변수 변화에 따른 고유진동수를 계산하고 그 결과를 분석하였다.

2. 해석모형

그림 1(a)는 상단에 집중질량을 갖는 유체에 일부가 잠긴 지간길이 l 인 기둥을 나타낸 것이다. 이 그림에서 l_1 은 유체의 깊이이며, M 과 d 는 각각 기둥 상단의 집중질량 및 기둥 상단으로부터 질량중심까지의 거리, J 는 질량관성모멘트이다. 그리고 ρ_c 와 ρ_f 는 각각 기둥 재료의 밀도 및 유체의 밀도이며, $w(x, t)$ 는 기둥축상 임의점 x 에서의 진동변위이다. 기둥 하부의 기초크기가 상대적으로 작은 경우에는 기둥 하단을 그림 1(b)에 나타낸 바와 같이 회전 스프링과 횡방향 스프링으로 지지된 것으로 가정할 수 있다. 여기서 K_r 과 K_θ 는 각각 회전 스프링상수 및 횡방향 스프링상수이다.

기둥 하단으로부터 유체 표면까지는 잠겨 있으므로 그림 1(b)에 나타낸 바와 같이 기둥질량에 유체질량을 추가하여 잘 알려진 기둥의 자유진동에 대한 지배방정식을 수정함으로써 식 (1)과 같이 유체에 잠긴 부분에 대한 지배방정식을 표현할 수 있으며(Chan 등, 1995; Chan 등, 1996; Uscilowska 등, 1998), 나머지 구간의 지배방정식은 식 (2)와 같다(Clough 등, 1975).

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + (\rho_c + \rho_f) A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq l_1 \quad (1)$$

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \rho_c A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad l_1 \leq x \leq l \quad (2)$$

여기서 EI 는 휨강성, A 는 기둥단면의 단면적이다.

기둥이 조화진동을 한다고 가정하면 횡방향 진동변위에 대한 조화진동식은 식 (3)과 같이 쓸 수 있다.

$$w(x,t) = w_x \sin(\omega t) \quad (3)$$

여기서 w_x 는 조화진동의 진폭으로 x 만의 함수이며, ω 는 고유각진동수(rad/s)이다.

본 연구에서 고려하는 구조계에 대한 효율적인 분석을 위하여 다음의 무차원 변수들을 도입한다.

$$\eta = w_x/l, \quad \xi = x/l, \quad r_i = l_1/l, \quad \varepsilon = \rho_f/\rho_c, \quad C_i = \omega_i l^2 [\rho_c A / (EI)]^{1/2} \quad (4-8)$$

식 (3)을 식 (1), (2)에 대입하고 무차원 변수들을 이용하여 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{d^4 \eta}{d\xi^4} = (1 + \varepsilon) C_i^2 \eta, \quad 0 \leq \xi \leq r_i \quad (9)$$

$$\frac{d^4 \eta}{d\xi^4} = C_i^2 \eta, \quad r_i \leq \xi \leq 1 \quad (10)$$

기둥 하단 ($x=0$)은 회전 스프링과 횡방향 스프링으로 구성되어 있으므로 휨모멘트 및 전단력은 각각 식 (11), (12)와 같다.

$$EI \frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial x^2} = K_r \frac{\partial w(0,t)}{\partial x}, \quad EI \frac{\partial^3 w(0,t)}{\partial x^3} = -K_v w(0,t) \quad (11,12)$$

그리고 기둥 상부에는 질량관성모멘트 J , 기둥 상단으로부터 질량중심까지의 거리가 d 인 질량 M 이 존재하므로 기둥 상단 ($x=l$)에서의 휨모멘트 및 전단력은 각각 식 (13), (14)와 같다.

$$EI \frac{\partial^2 w(l,t)}{\partial x^2} = -(J + Md^2) \frac{\partial^3 w(l,t)}{\partial x \partial t^2} - Md \frac{\partial^2 w(l,t)}{\partial t^2} \quad (13)$$

$$EI \frac{\partial^3 w(l,t)}{\partial x^3} = M \frac{\partial^2 w(l,t)}{\partial t^2} + Md \frac{\partial^3 w(l,t)}{\partial x \partial t^2} \quad (14)$$

새로운 무차원 변수들을 다음과 같이 도입한다.

$$k_r = K_r l / (EI), \quad k_v = K_v l^3 / (EI), \quad m = M / (\rho_c A l), \quad j = J / (\rho_c A l^3), \quad e = d/l \quad (15-19)$$

식 (3)을 식 (11)~(14)에 대입하고 무차원 변수들을 이용하면 기둥 하단 ($\xi=0$)에서 무차원 경계조건식은 식 (20), (21), 기둥 상단 ($\xi=1$)에서는 식 (22), (23)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{d^2 \eta}{d\xi^2} - k_r \frac{d\eta}{d\xi} = 0, \quad \frac{d^3 \eta}{d\xi^3} + k_v \eta = 0 \quad (20,21)$$

$$\frac{d^2 \eta}{d\xi^2} - C_i^2 (j + me^2) \frac{d\eta}{d\xi} - me C_i^2 \eta = 0, \quad \frac{d^3 \eta}{d\xi^3} + me C_i^2 \frac{d\eta}{d\xi} + m C_i^2 \eta = 0 \quad (22,23)$$

3. 수치해석 예 및 고찰

본 연구에서는 식 (9), (10)의 지배 미분방정식을 해석하여 고유진동수를 산출하기 위해 직선부재의 자유진동 및 안정성(Lee 등 1998), 곡선부재의 자유진동(Lee 등, 1989; Oh 등 1999)에 관한 연구에서 고유치 문제를 푸는데 매우 정확하고 효율적으로 사용된 바 있는 수치해석방법을 채택하였다. 본 연구에서 미분방정식의

표 1 Comparison of results between this study and reference for $\varepsilon=0.1274$, $e=0.00$, and $k_r=k_v=10^6$

r_i	m	j	Data source	Frequency parameter, C_i		
				$i=1$	$i=2$	$i=3$
0.0	1.0	0.0	This study	1.557	16.25	50.89
			Uscilowska <i>et al.</i>	1.557	16.25	50.90
		1.0	This study	0.8679	3.391	24.02
			Uscilowska <i>et al.</i>	0.8679	3.391	24.02
0.5	2.0	0.0	This study	1.158	15.51	48.82
			Uscilowska <i>et al.</i>	1.158	15.52	48.82
		1.0	This study	0.7844	2.851	22.59
			Uscilowska <i>et al.</i>	0.7844	2.852	22.61
1.0	1.0	0.0	This study	1.539	15.39	48.03
			Uscilowska <i>et al.</i>	1.539	15.39	48.04
		1.0	This study	0.8654	3.341	22.78
			Uscilowska <i>et al.</i>	0.8654	3.341	22.78

표 2 Frequency parameter C_{0i} for columns with $r_i=0$

$k_r=k_v$	m	j	e	Frequency parameter, C_{0i}			
				$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
1	0	0	0	0.8674	3.381	23.93	63.23
	0.1	0	0	0.8055	3.044	21.12	57.03
	0.1	0.1	0	0.7921	2.031	8.315	29.99
	0.1	0.1	0.05	0.7892	2.015	8.360	30.08
10	0	0	0	2.273	6.778	28.45	69.78
	0.1	0	0	2.032	6.198	25.29	63.18
	0.1	0.1	0	1.831	3.724	10.79	34.78
	0.1	0.1	0.05	1.812	3.721	10.85	34.87
10^6	0	0	0	3.516	22.03	61.69	120.9
	0.1	0	0	2.968	19.36	55.51	110.7
	0.1	0.1	0	2.274	6.793	28.53	69.98
	0.1	0.1	0.05	2.241	6.843	28.61	70.06

수치적분은 Runge-Kutta법을 이용하였으며, 대상구조의 무차원 고유진동수 C_i 는 행렬값 탐사법을 반복적으로 적용하는 과정에서 Regula-Falsi법을 이용하여 구하였다.

본 연구결과를 검증하기 위하여 $\varepsilon=0.1274$ ($\rho_c=7850 \text{ kg/m}^3$, $\rho_f=1000 \text{ kg/m}^3$), $e=0$, $k_r=k_v=10^6$ 에 대한 결과를 Uscilowska 등(1998)의 엄밀해(하단을 고정지점으로 취급)와 표 1에 비교하였다. 이 표에서 본 연구결과와 Uscilowska 등(1998)의 결과는 매우 우수하게 근접함을 알 수 있다.

표 2는 $r_i=0$ 인 기둥의 k_r , k_v , m , j , e 에 따른 무차원 고유진동수를 수록한 것으로 $k_r=k_v$ 이 증가하는 경우 고유진동수는 증가함을 알 수 있다. 그리고 m 과 j 를 고려하는 경우 고유진동수는 감소하며 특히 j 의 고려에 따른 고유진동수 감소는 현저함을 알 수 있다. 한편 e 를 고려하는 경우에는 저차모드(1 또는 2 모드)에서는 고유진동수가 감소하지만, 고차모드(2-4모드)에서는 반대경향을 보임을 알 수 있다.

그림 2 (a)~(d)는 $k_r=k_v=10^6$ 인 경우 r_i 에 따른 무차원 고유진동수비 C_i/C_{0i} 의 변화를 나타낸 것이다. 여기서 C_{0i} 는 $r_i=0$ 에 대응되는 무차원 고유진동수로서 표 2에 나타낸 바와 같다. 이 그림에서 선으로만

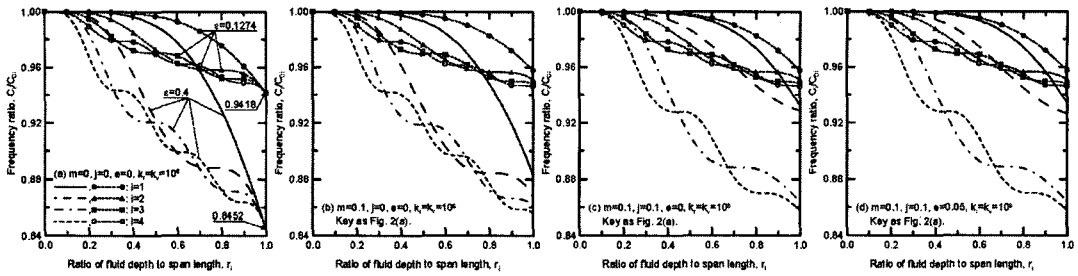


그림 2 $C_i/C_{0i} - r_i$ curves for $k_r = k_v = 10^6$

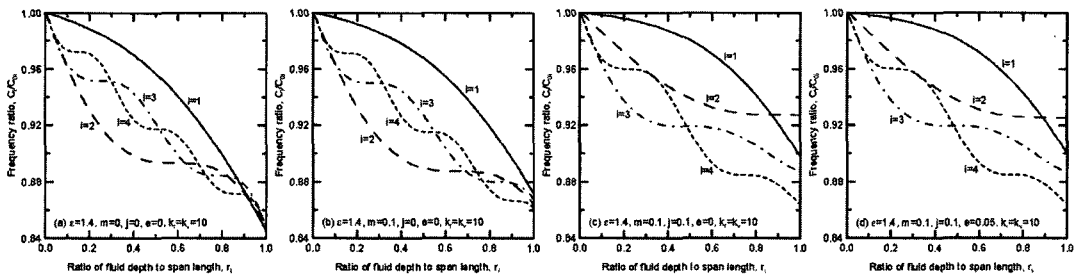


그림 3 $C_i/C_{0i} - r_i$ curves for $k_r = k_v = 10$

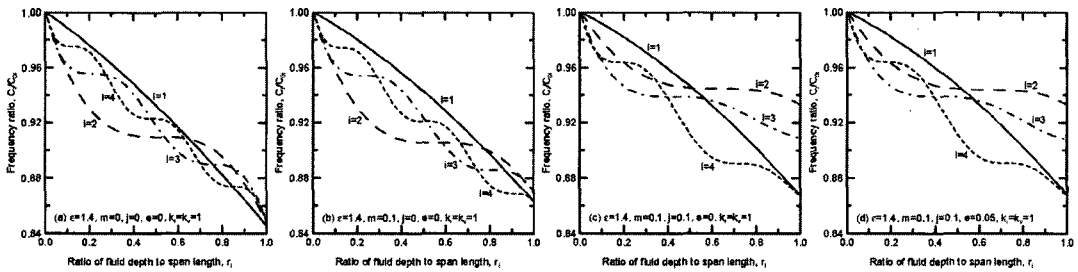


그림 4 $C_i/C_{0i} - r_i$ curves for $k_r = k_v = 1$

연결된 곡선은 $\epsilon=0.4$ ($\rho_c = 2500 \text{ kg/m}^3$, $\rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3$), (●, ▲, ■, ○)표로 연결된 곡선은 $\epsilon=0.1274$ ($\rho_c = 7850 \text{ kg/m}^3$, $\rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3$)에 대한 결과이다.

그림 2에서 r_i 가 증가하는 경우 무차원 고유진동수비는 항상 감소함을 알 수 있다. 그리고 C_i/C_{0i} 의 변화는 완만한 감소와 가파른 감소가 반복되어 나타나며, 고차모드일수록 그러한 경향이 뚜렷함을 알 수 있다. 한편 $\epsilon=0.4$ 에 대한 각 모드별 고유진동수비는 $\epsilon=0.1274$ 에 비해 항상 작아 ϵ 이 클수록 r_i 에 따른 고유진동수의 변화가 큼을 알 수 있다. 그림 2 (a)~(d)에서 m 과 j 의 고려여부에 따른 고유진동수비의 변화는 비교적 크지만, e 의 영향은 작음을 알 수 있다.

그림 2 (a), (b)의 각 모드에 대응되는 곡선에서 완만한 감소를 보이는 구간의 수는 모드번호와 일치하며, 이러한 경향은 j 를 고려하는 경우 변화한다. 한편 그림 2(a)에서 r_i 가 "1"로 접근함에 따라 모든 C_i/C_{0i} 곡선은 $\sqrt{1/(1+\epsilon)}$ 로 수렴함을 알 수 있다.

그림 3과 그림 4는 각각 $k_r = k_v = 10$ 과 $k_r = k_v = 1$ 인 경우 r_i 에 따른 무차원 고유진동수비 C_i/C_{0i} 의 변화를 나타낸 것이다. 이들 결과와 그림 2의 결과로부터 다른 조건이 모두 동일할 때 제1모드의 경우 $k_r = k_v = 10^6$, $k_r = k_v = 10$, $k_r = k_v = 1$ 의 순으로 대응하는 r_i 에 대한 무차원 고유진동수비가 큼을 알 수 있다.

4. 요약 및 결론

이 논문에서는 상단에 집중질량을 갖고 유체에 잠긴 연약지점을 갖는 기둥의 자유진동을 고찰하였다. 대 상 기둥은 회전 스프링과 횡방향 스프링으로 지지된 것으로 모형화하였으며, 유체에 잠긴 부분의 기둥 질량 에 유체질량을 추가하여 수정한 기둥의 자유진동에 대한 지배 미분방정식을 수치해석하여 고유진동수를 산 출하였다. 본 연구결과를 문헌의 엄밀해와 비교하여 연구결과의 타당성을 보였다. 수치해석 예로서 회전 및 횡방향 스프링계수, 유체와 기둥의 밀도비, 유체높이 지간길이비, 집중질량과 기둥의 총질량의 비, 무차원 질 량관성모멘트, 집중질량의 편심정도에 따른 무차원 고유진동수를 산출하고 그 결과를 고찰하였다.

참고문헌

- Chan, K.T., Leung, T.P., Wong, W.O.(1996). Free Vibration of Simply Supported Beam Partially Loaded with Distributed Mass. *Journal of Sound and Vibration*, 191, pp.590-597.
- Chan, K.T., Zhang, J.Z.(1995). Free Vibration of a Cantilever Tube Partially Filled with Liquid. *Journal of Sound and Vibration*, 182, pp.185-190.
- Chang, J.Y., Liu, L.H.(1989). Some Studies on the Natural Frequencies of Immersed Restrained Column. *Journal of Sound and Vibration*, 130, pp.516-524.
- Clough, R.W., Penzien, J.(1975). *Dynamics of Structures*. McGraw-Hill.
- Han, G.D., Sahglivi, J.R.(1994). Dynamic Model Response of Wave-Excited Offshore Structures. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 120, pp.893-908.
- Lee, B.K., Oh, S.J., Park, S.G., Ser, J.W.(1998). Stability of Nonuniform Cantilever Columns Subjected to a Subtangential Follower Force. *Proceedings of 5th Pacific Structural Steel Conference*, 1, pp.205-210.
- Lee, B.K., Wilson, J.F.(1989). Free Vibrations of Arches with Variable Curvature. *Journal of Sound and Vibration*, 136, pp.75-89.
- McClelland, B., Reifel, M.D.(1986). *Planning and Design of Fixed Offshore Platforms*. Van Nostrand Reinhold Company.
- Oh, S.J., Lee, B.K., Lee, I.W.(1999). Natural Frequencies of Non-Circular Arches with Rotatory Inertia and Shear Deformation. *Journal of Sound and Vibration*, 219, pp.23-33.
- Uscilowska, A., Kolodziej, J.A.(1998). Free Vibration of Immersed Column Carrying a Tip Mass. *Journal of Sound and Vibration*, 216, pp.147-157.
- Xing, J.T., Price, W.G., Pomfret, M.J., Yam, L.H.(1997). Natural Vibration of a Beam-Water Interaction System. *Journal of Sound and Vibration*, 199, pp.491-512.